

# 利用 DMSM 方法求解弹性撞击恢复系数\*

鲍四元<sup>1</sup> 邓子辰<sup>1,2</sup>

(1. 西北工业大学工程力学系, 西安 710072)(2. 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

**摘要** 给出了物体与细长杆或梁弹性碰撞恢复系数的一种求解方法。在研究碰撞问题时,把碰撞物作为靶体的附加质量,从而把碰撞问题转化为常规的振动问题求解。两个撞击物的分离时刻根据撞击力为零得到。结论如下:只考虑弹性碰撞时,恢复系数不仅与靶体的材料性质有关,还与碰撞物体质量比、靶体的支承条件有关,但与碰撞的初始速度无关。

**关键词** DMSM, Newton 恢复系数, Poisson 恢复系数, 弹性碰撞, 波动效应

## 引言

在工程界中,碰撞恢复系数反映了碰撞前后物体运动状态的变化。最初碰撞恢复系数是由 Newton 定义的,后来出现另两种恢复系数定义: Poisson 恢复系数和 Stronge 恢复系数<sup>[1-3]</sup>。表 1 给出它们的定义与比较。

恢复系数是描述能量损失的概念,可包括不同的能量损失,如材料的粘弹性、接触面的塑性变形和两个物体之间的振动等。恢复系数不是仅依赖于材料的一种固有属性,它取决于撞击物和靶体的材料、接触面的几何性质和撞击速度<sup>[4]</sup>。近年来,文[5]使用能量法研究细长杆与光滑界面碰撞的恢复系数,提出了影响恢复系数的两个因素:碰撞倾斜

角和反映杆几何性质和材料性质的常数  $Hr$ 。文[6]利用波传播理论分别提出碰撞体与杆和梁碰撞的恢复系数的求法,并得到波动能量的损失。使用恢复系数的优点在于数学表达上的简洁性,因此 Brach 在文[7]中广泛使用了恢复系数来解决撞击问题。Brach 还注意到恢复系数可取 -1 和 0 之间的数,这表明在撞击过程中损失了一些能量,但并不产生速度方向的改变。如侵入物在穿过靶体时虽然降低了自身速度,但速度方向没有改变。球体与平面碰撞的数值方法研究<sup>[8,9]</sup>表明弹塑性对撞击过程的影响。文[10]给出一种确定物体之间多次碰撞问题的恢复系数的方法,利用模态法描述撞击物的弹塑性特性,并利用有限元法研究接触区。

表 1 三种恢复系数定义比较

Table 1 Comparison of the definitions of three types of coefficient of restitution

恢复系数	定义
Newton 恢复系数	碰撞前后法向分离速度与接近速度的比值
Poisson 恢复系数	恢复阶段的法向冲量与压缩阶段的法向冲量之比
Stronge 恢复系数	$D_r: D_c$ , 其中 $D_r, D_c$ 分别为恢复阶段弹性应变所释放的能量及压缩阶段所吸收的能量。其中释放能量记为正,吸收能量记为负。
共同点	经典理论中,把恢复系数看成是只与材料有关的常数。

对于细长物体被碰撞的情形,很大一部分能量转化为波动能量,如 Zener 和 Feshbach<sup>[11]</sup>表明一个球体与简支梁完全弹性碰撞时,90%的初始动能可以转化为波动能量。因此恢复系数的定义应能够

描述由波传播和撞击物的塑性变形引起的能量损失。

DMSM 方法(直接模态叠加法)是近年来研究弹性碰撞问题的一种方法<sup>[12,13]</sup>,其思路是把碰撞

2005-07-19 收到第 1 稿。

\*国家自然科学基金(10372084);教育部新世纪优秀人才培养计划(NCET-04-0958)、西北工业大学博士创新基金(CX200314)及大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金

物作为靶体的附加质量,从而把碰撞问题转化为常规的振动问题,并利用模态叠加方法求解.本文把碰撞质量块看成质点.基于 DMSM 方法,首先得到撞击结束时间,然后按照 Newton 和 Poisson 恢复系数定义求解出恢复系数.算例表明,本文方法能够从理论上得到弹性碰撞恢复系数的表达式.

### 1 物体与杆的纵向碰撞恢复系数

一刚性块与初始静止的弹性细杆在杆的自由端面碰撞.如图 1 所示,碰撞物块  $m_{par}$  以速度  $v = V_0$  撞击于杆右端.杆的质量为  $m_{rod}$ ,位移为  $u$ ,弹性模量为  $E$ ,横截面积为  $A$ ,长度为  $L$ ,  $m$  为杆单位长度的质量,质量比  $\alpha = m_{rod}/m_{par}$ .

首先回顾撞击问题的解<sup>[12]</sup>.杆的运动方程为

$$EA \frac{\partial^2 u(x, l)}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

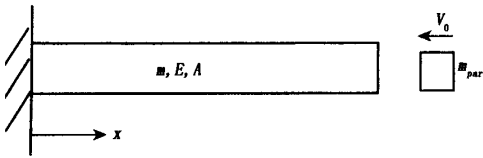


图 1 杆纵向碰撞示意图

Fig. 1 Illustration of longitudinal impact of rod

引入无量纲变量:  $\xi = x/L, \tau = tc/L, \tilde{u}(x, t) = -\frac{c}{V_0 L} u(x, t)$ . 其中  $c = \sqrt{EA/m}$ .

此撞击问题的边界条件是

$$\alpha \frac{\partial \tilde{u}(\xi, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \tilde{u}(\xi, \tau)}{\partial \tau^2}, \tilde{u}(0, \tau) = 0 \quad (2)$$

初始条件为

$$\tilde{u}(\xi, 0) = 0, \frac{\partial \tilde{u}(1, 0)}{\partial \tau} = -1 \quad (3)$$

采用直接模态叠加法(DMSM),解得

$$u(x, t) = -\frac{V_0 L}{c} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_i}{\beta_i \lambda_i} \sin \lambda_i \xi \sin \lambda_i \tau \quad (4)$$

$$v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{c}{L} \frac{\partial u(x, t)}{\partial \tau} = -V_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_i}{\beta_i} \sin \lambda_i \xi \cos \lambda_i \tau \quad (5)$$

$$\tilde{\epsilon}(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_i}{\beta_i} \cos \lambda_i \xi \sin \lambda_i \tau \quad (6)$$

其中  $\lambda_i$  由频率方程  $\alpha = \lambda \tan \lambda$  决定. 而  $\beta_i = \frac{1}{2}(\alpha + \sin^2 \lambda_i)$ .

下面考虑撞击分离时刻. 撞击力为零时, 撞击力由压力变成拉力, 杆和质量块分离. 分离时刻  $\tau_s$  由无量纲量  $\tilde{\epsilon}(1, \tau_s) = 0$  决定. 从而分离时刻质量块的速度  $V_{sep} = v(1, \tau_s)$  由式(5)得到.

撞击后杆的刚体运动速度为零, 根据 Newton 恢复系数的定义, 固定 - 自由杆受质量块弹性撞击时, 质量块恢复系数的表达式如下

$$e = -\frac{V_{sep}}{V_0} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_i^2}{\beta_i} \cos \lambda_i \tau_s \quad (7)$$

同理, 两端自由杆受质量块弹性撞击时, 质量块恢复系数的表达式为

$$e = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_i^2}{\beta_i} \cos \lambda_i \tau_s \quad (8)$$

其中  $\lambda_i$  由频率方程  $\alpha = -\lambda \cot \lambda$  决定, 而  $\beta_i = \frac{1}{2}(\alpha + \cos^2 \lambda_i)$ .

图 2 和图 3 分别作出上述固支 - 自由杆的撞击时刻  $\tau_s$  和 Newton 恢复系数随质量比变化的关系曲线.

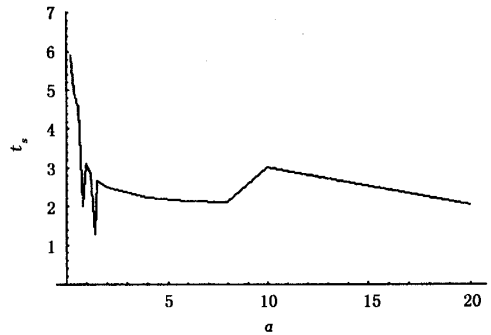


图 2 无量纲碰撞时刻  $\tau_s$  与碰撞体质量比关系图

Fig. 2 The separation moment for different mass ratios in rod impact

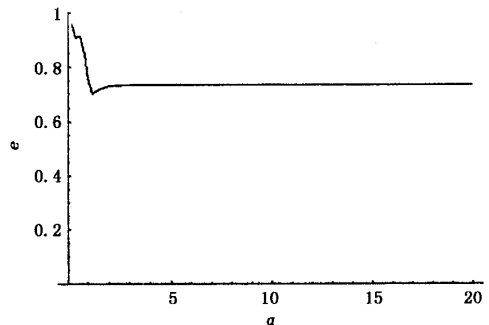


图 3 恢复系数与杆质量块质量比关系图

Fig. 3 The coefficient of restitution for different mass ratios in rod impact

由图3可得,质量比 $\alpha$ 越小,撞击时间长,散失在弹性杆中的波动能量较少,恢复系数越接近于1,因此可不考虑波动效应.而质量比较大时,恢复系数趋向于定值0.736,此时应该考虑波动效应.

## 2 物体与 Euler-Bernoulli 梁横向碰撞的恢复系数

刚性块与弹性均匀的简支梁在梁中点处发生碰撞,以梁左端为 $x$ 轴的坐标原点,见图4.梁质量为 $M$ ,梁的横向位移为 $w$ ,弹性模量为 $E$ ,横截面积为 $A$ ,长度为 $L$ , $m$ 为杆单位长度的质量.碰撞物块质量为 $m_{par}$ ,且不计弹簧质量.

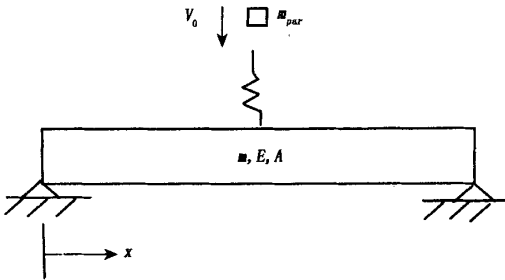


图4 Euler-Bernoulli 梁纵向碰撞示意图

Fig. 4 Illustration of transverse impact of Euler-Bernoulli beam

### 2.1 撞击问题的解

首先回顾撞击问题的解<sup>[13]</sup>.这里梁采用 Euler-Bernoulli 模型,故梁的横向振动微分方程为

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (9)$$

由于撞击点在梁的中点,根据对称性只分析左半结构系统.相应的边界条件和弹簧连接处的连续性条件为

$$w_1(0, t) = 0, w_1'(0, t) = 0, \\ EI[w_1''(\eta L, t)] = \frac{m_{par}}{2} \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} \quad (10)$$

对于弹簧,存在关系

$$m_{par} \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} + \frac{1}{f} [u(t) - w_1(\frac{L}{2}, t)] = 0 \quad (11)$$

其中 $u(t)$ 表示物体 $m_{par}$ 的位移.

问题的初始条件为

$$w(x, 0) = 0, u(x, 0) = 0 \quad (12a)$$

$$\frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = 0, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (12b)$$

引入无量纲变量: $\xi = x/L, \tau = tc_s/L$ ,及常数 $c = \sqrt{E/\rho}, c_s = \sqrt{kG/\rho}$ 和 $\theta = r/L$ ,通过求解上述具有初速度的振动问题,可得问题的解<sup>[13]</sup>.

振动的频率方程为

$$\beta(\tan\beta - \tanh\beta + 32fEI/L^3\beta^3) = 2\alpha \quad (13)$$

其中 $\alpha = M/m_{par}$ .

撞击物的位移、速度及无量纲撞击力分别为

$$u(x, t) = -\frac{V_0 L}{c} u(x, t) = -\frac{V_0 L}{c} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\theta \beta_i^4 M_i} \sin(4\theta \beta_i^2 \sqrt{\frac{E}{kG}} \tau) \quad (14)$$

$$v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{c_s}{L} \frac{\partial u(x, t)}{\partial \tau} = \\ -V_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4\alpha^2}{\beta_i^2 M_i} \cos(4\theta \beta_i^2 \sqrt{\frac{E}{kG}} \tau) \quad (15)$$

$$\bar{F}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{16\alpha\theta}{M_i} \sin(4\theta \beta_i^2 \sqrt{\frac{E}{kG}} \tau) \quad (16)$$

其中集中质量 $M_i$ 为 $M_i = 2\alpha \int_0^{L/2} \phi_i^2(x) dx +$

$\phi_i^2(L)$ .由式(16),无量纲撞击力 $\bar{F}(t)$ 与撞击位置 $\xi_0 = x_0/L$ 没有直接关系,但决定频率 $\beta_i$ 的频率方程与撞击位置,弹簧柔度系数,梁长度和弯曲刚度都有关系.

分离时刻由无量纲撞击力 $\bar{F}(\xi_0, \tau_s) = 0$ 决定.从而在分离时刻质量块的速度 $V_{sep} = v(\xi_0, t_s)$ 由式(15)得到.

### 2.2 Newton 恢复系数的求法

撞击后梁的刚体运动速度为零.根据 Newton 恢复系数的定义,两端简支梁受质量块弹性撞击时,质量块恢复系数的表达式为

$$e = -\frac{V_{sep}}{V_0} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4\alpha^2 M}{\beta_i^2 M_i} \cos(4\theta \beta_i^2 \sqrt{\frac{E}{kG}} \tau_s) \quad (17)$$

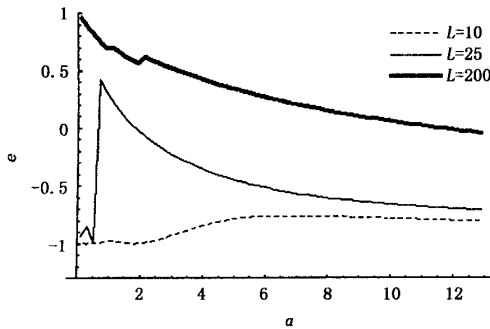
由式(13)和(17)知,恢复系数的值与质量比,材料性质及弹簧柔度有关.算例采用无量纲值, $E = 10^6, I = 1/12, A = 1, \sqrt{E/(kG)} = \sqrt{3}$ .当弹簧柔度系数 $f$ 分别为 $10^{-4}$ 和 $10^{-5}$ 时,图5作出 Newton 恢复系数 $e$ 与质量比的关系曲线.

### 2.3 Poisson 恢复系数的求法

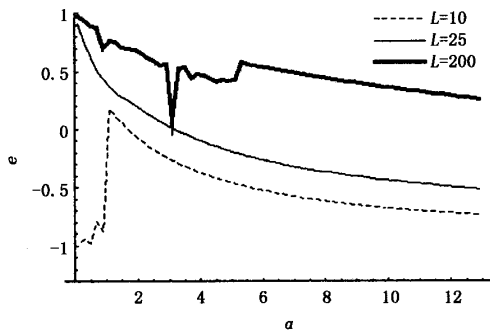
物体与梁的撞击阶段可分为压缩阶段和恢复阶段.记压缩阶段撞击物的动量为 $I_c$ ,恢复阶段撞

击物的动量为  $I_r$ . 根据 Poisson 恢复系数的定义,有

$$e = I_r / I_c \tag{18}$$



(a)  $f = 10^{-4}$



(b)  $f = 10^{-5}$

图 5 梁撞击 Newton 恢复系数与梁 - 物体质量比曲线

Fig. 5 Newton restitution with different mass ratio in beam impact

故在碰撞压缩阶段和恢复阶段结束时刻,对撞击物分别使用冲量定理得

$$I_c = m_{par}(V_0 - V_c) \tag{19}$$

$$I = I_r + I_c = m_{par}(V_0 - V_{sep}) \tag{20}$$

其中  $V_c$  是碰撞压缩阶段结束时刻撞击物的速度. 碰撞压缩阶段结束时刻撞击物的速度与梁质心速度相等,由动量守恒定理得到

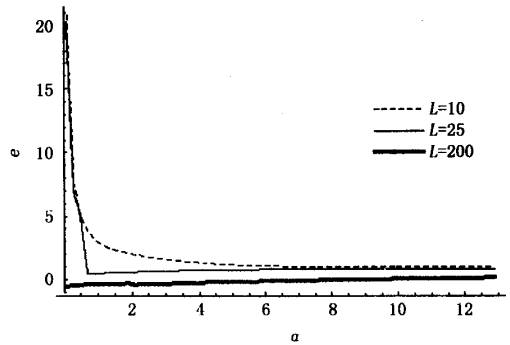
$$V_c = \frac{m_{par}V_0}{m_{par} + M} \tag{21}$$

注意到  $I = I_c + I_r$ , 由式(18) ~ (21) 得到 Poisson 恢复系数的表达式

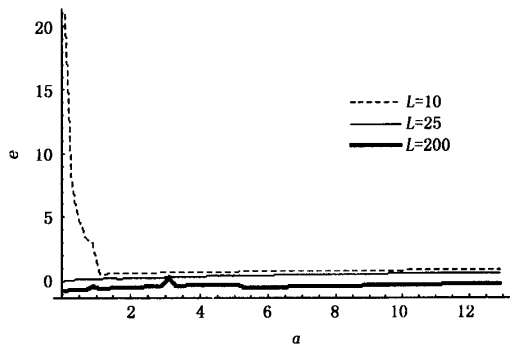
$$e = \frac{(1 + \alpha)(V_0 - V_{sep})}{\alpha V_0} - 1 \tag{22}$$

其中  $V_{sep}$  由式(15) 确定. 对于 2.1 中的算例,图 6 作出当弹簧柔度分别为  $10^{-4}$  和  $10^{-5}$  时, Poisson 恢复系数  $e$  与质量比的关系曲线.

根据质量块与 Euler-Bernoulli 梁撞击的研究, 可得如下结论:



(a)  $f = 10^{-4}$



(b)  $f = 10^{-5}$

图 6 梁撞击 Poisson 恢复系数与梁 - 物体质量比曲线

Fig. 6 Poisson restitution with different mass ratio in beam impact

(1) 由式(17)和式(22)可知, Newton 恢复系数和 Poisson 恢复系数不是常数, 而受到碰撞物体的质量比及弹性梁长度及弹簧柔度系数等的影响. 由于波动的作用使恢复系数有较大变化范围, 并未是 1 或一个定值. 由图 5 和图 6 知, Newton 恢复系数数值与 Poisson 恢复系数数值相差较大.

(2) 图 5 中恢复系数出现负值说明撞击力变号后, 撞击物速度没有变号, 且继续按原速度运动, 但受到的加速度相反. 同理, 图 6 中恢复系数大于 1 的情形说明撞击结束后, 撞击物仍按原速度方向运动.

### 3 结论

通过碰撞过程中波动效应明显的刚体对弹性杆的纵向压缩及横向碰撞的典型特例, 运用直接模态叠加法(DMSM), 得到了恢复系数的表达式. 通

过分析得到:(1)表示能量损失程度的恢复系数并不是常数,而与质量比、靶体的支承条件有关。(2)无论对于质量块与杆撞击还是质量块与梁撞击问题,当质量比 $\alpha$ 较小时,散失在杆或梁中的波动能量较少,可不考虑波动效应,反之则必须考虑波动效应。

进一步的工作如下:(1) Euler-Bernoulli 梁模型没有考虑剪切变形,使用 Timoshenko 梁模型可得到更加符合实际的结果。(2)考虑接触端的塑性变形等更精确的条件,进一步分析各个参量对恢复系数的影响。

### 参 考 文 献

- 1 Goldsmith, W. Impact: The Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids. London: Edward Arnold, 1960
- 2 Johnson W. Impact Strength of Material. Edward Arnold, 1972
- 3 Stronge WJ. Impact mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2000
- 4 Kozlov, Valerii V, Treshchëv, Dmitrii V. Billiards: A Genetic Introduction to the Dynamics of Systems with Impacts. American Mathematical Society, 1991
- 5 Yildirim Hurmuzlu. ASME Journal of Applied Mechanics. An Energy Based Coefficient of Restitution for Planar Impacts of Slender Bars with Massive. *External Surfaces*, 1998, 65(4):952~962
- 6 姚文莉. 考虑波动效应的碰撞恢复系数研究. 山东科技大学学报, 2004, 23 (2): 83~86 (Yao Wenli. Study on restitution coefficient of Impact with wave effect. *Journal of Shandong University of Science and Technology*, 2004, 23(2):83~86(in Chinese))
- 7 Brach, Raymond M. Mechanical Impact Dynamics: Rigid Body Collisions. New York: John Wiley & Sons, 1991
- 8 Wu CY, Li LY, Thornton C. Rebound behavior of spheres for plastic impacts. *Int J Impact Eng*, 2003, 28:929~46
- 9 Zhang X, Vu-Quoc L. Modeling of the dependence of the coefficient of restitution on impact velocity in elasto-plastic collisions. *Int J Impact Eng*, 2002, 27:317~341
- 10 Rajalingham C, Rakheja S. Analysis of impact force variation during collision of two bodies using a single-degree-of-freedom system model. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 229(4):823~835
- 11 Zener C, Feshbach H. A method of calculating energy losses during impact. *J Appl Mech*, 1939, 61:A67~70
- 12 诸德超, 邢誉峰. 点弹性碰撞问题之解析解. 力学学报, 1996, 28(1):99~103 (Zhu DC, Xing YF. Analytical solution of point elastic impact between structures. *Acta Mechanica Sinica*, 1996, 28(1):99~103(in Chinese))
- 13 邢誉峰. 梁结构线弹性碰撞的解析解. 北京航空航天大学学报, 1998, 24(6):633~637 (Xing Yufeng. Analytical Solutions of Linearly Elastic Impact of Beams. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 1998, 24(6):633~637(in Chinese))

## SOLUTION OF THE COEFFICIENT OF RESTITUTION FOR ELASTIC IMPACT USING DMSM\*

Bao Siyuan<sup>1</sup> Deng Zichen<sup>1,2</sup>

(1. Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, 710072, China)

(2. State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

**Abstract** An analytical solution for the coefficient of restitution of a mass colliding with a slender rod or beam was presented. The colliding body was regarded as the attachment of the target, so the problem was transformed into a normal vibration problem using DMSM (Direct Mode Superposition Method). The separation moment was obtained by setting the impact force as zero. It can be concluded that, when only elastic impact is considered, the coefficient of restitution is determined by not only the material property of the target, but also the mass ratio of the colliding body to the target, and the boundary condition of the target. However, the initial velocity has no effect on the coefficient of restitution.

**Key words** DMSM, Newton's coefficient of restitution, Poisson's coefficient of restitution, elastic impact, wave effect

---

Received 19 July 2005.

\* The project supported by the National Science Foundation of China(10372084), Program for New Century Excellent Talents of Education Ministry of China(NCET-04-0958), Doctorate Foundation of Northwestern Polytechnical University(CX200314), Open Foundation of State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment