

一个经济周期模型的分岔与混沌*

赵俊锋 李伟

(西北工业大学应用数学系,西安 710072)

摘要 在 Goodwin 与 Puu 的宏观经济思想基础上,得到了一个推广的非线性动力学经济周期系统. 首先用数值方法研究了此系统在特定参数条件下的全局分岔行为. 然后结合最大 Lyapunov 指数,详细讨论了系统在分岔过程中动力学特征的转变. 通过分析分岔图形发现在某些参数区间内倍周期分岔导致了混沌;在混沌区域内嵌有多个周期窗口;“加速数”值的增加可以促进经济的周期性运动. 最后介绍了分岔和混沌分析得到的动力学性质对理解经济波动的应用.

关键词 经济周期,分岔,混沌,最大 Lyapunov 指数

引言

经济周期是指经济活动沿着经济发展的总体趋势所经历的有规律的扩张和收缩活动^[1],表现为国内生产总值、工业生产、物价水平、就业和失业等经济变量的变动. 由于经济周期是总体经济活动的波动,因此经济周期理论的研究对经济发展的整体把握、经济政策的制定具有重要的参考价值.

1951年, Goodwin^[2]改进了 Hicks^[3,4]的消费函数思想,结合一个时滞引致投资和均衡国民收入决定模型,首次建立了一个非线性二阶微分方程经济周期模型,并用动力学方法研究了自发投资和自发消费为零时经济周期模型的极限环解. 2004年, Puu^[5,6]结合 Hicks 的消费函数思想和均衡国民收入决定模型,提出了一个具有非线性引致投资函数的经济周期模型,并研究了此模型的分岔、混沌等动力学行为. 本文在 Goodwin 和 Puu 的工作基础上,以 GDP 为研究对象,一方面,采用 Goodwin 的改进的消费函数思想,在宏观经济中考虑储蓄因素和自发消费的影响;另一方面,采用 Puu 提出的更加符合实际情况的、可以抵制萧条的非线性投资函数思想,但加入自发投资函数. 最后结合均衡国民收入决定模型,得到了一个新的、更加全面的、具有二阶非线性微分方程形式的经济周期模型. 该模型既是对 Goodwin 模型的改进,又是对 Puu 模型的延伸,具有一定的理论意义和应用前景.

1 经济周期模型

假设在开放的经济中,政府具有较好的预算,经济发展平衡. 在某种程度上可以理解为,进口等于出口,政府支出等于政府税收. 若不考虑存货量,则在宏观经济理论^[7-9]中,均衡国民收入可以分解成两部分,投资与消费. 因此,如何定义投资函数与消费函数就成为建立经济周期模型的关键. 在过去的宏观理论研究,经济学家曾赋予投资函数与消费函数多种形式,构建出多种经济周期模型,并且每种模型都有其不同的特征和经济解释,其中最具代表性是 Goodwin 的消费函数和 Puu 的投资函数.

采用 Goodwin 的消费函数思想,消费函数可表示为

$$C_t = \alpha x_{t-1} - s(x_{t-1} - x_{t-2}) + C_0 \quad (1)$$

采用 Puu 的投资函数思想,并考虑自发投资函数,则有

$$I_t = v(x_{t-1} - x_{t-2}) + v(x_{t-1} - x_{t-2})^3 + I_0 \quad (2)$$

基于均衡的政府预算,将投资函数与消费函数代入到恒等式 $x_t = I_t + C_t$ 中,得到.

$$x_t = (\alpha - s + v)x_{t-1} + (s - v)x_{t-2} - v(x_{t-1} - x_{t-2})^3 + C_0 + I_0 \quad (3)$$

将差分方程转化为连续的微分方程,可以得到新的经济周期模型为

$$\ddot{x} + vx^3 + (2 - \alpha + s - v)\dot{x} + (1 - \alpha)x =$$

2005-07-08 收到第1稿,2005-07-30 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(10472091, 10332030)和陕西自然科学基金(2003A03)资助项目

$$C_0 = I_0 \tag{4}$$

其中 x 表示收入(或产出), \dot{x} 和 \ddot{x} 分别表示 x 关于时间 t 的一阶、二阶导数. $0 \leq \alpha \leq 1$ 为边际消费倾向, $s \leq 1$ 则是补充储蓄率. v 为常数, 表示资本 - 产出率, 一般情况下只考虑 $v > 0$ 的情形. $C_0 + I_0$ 是自发消费与自发投资之和, 作为自发函数可记为 $O^*(t) = C_0 + I_0$.

如 Strotz^[10] 所言, “自发函数 $O^*(t)$ 可以是任意函数”, 但函数是否符合真实的经济环境, 是否具有合理的经济解释则是问题的关键. Strotz^[10] 考虑了自发函数表示为变频三角函数时的 Goodwin 经济周期模型的动力学行为. 他指出, 当频率达到一定临界值时, 自发函数可以控制极限环的个数和周期; Lorenz^[11] 也考虑了自发函数为变频三角函数时一个推广的 Goodwin 经济周期模型的动力学行为. 结果表明经济周期模型会产生混沌, 存在一个混沌吸引子. 著名经济学家罗伯特·卢卡斯^[12] 认为“从技术上说, 任何一个国家的 GDP 围绕其趋势的运动都可以用一个低阶的周期干扰的差分方程来描述”. 可见自发函数可以表示为时间 t 的周期函数.

本文继承自发函数为周期函数的思想, 设 $O^*(t) = f \cos \Omega t$. f 为振幅, Ω 为频率. 这样方程 (4) 可改写为一个周期激励的受迫动力系统

$$\ddot{x} + v\dot{x}^3 + (2 - \alpha + s - v)\dot{x} + (1 - \alpha)x = f \cos(\Omega t) \tag{5}$$

2 分岔行为

非线性经济学特别是混沌经济学的出现, 使得经济研究发生了令人瞩目的变化. 混沌经济学与传统经济学的显著区别在于: 一方面, 混沌理论提供给我们一种重要分析工具, 通过运用动态、非均衡等方法, 可以分析复杂经济系统的吸引、分岔、突变、混沌等重要动力学特征, 从而揭示隐藏在复杂经济现象背后的某些规律. 另一方面, 混沌经济学的研究打破了传统经济学主张的经济发展可预测性的“真理”, 为经济的不可预测性提供了理论依据. 尽管其理论尚未成熟, 但经济模型动力学研究却可能提出对所观察到的经济波动的独特见解, 因此经济周期模型的混沌研究是非常有意义的. 而在混沌理论研究中, 人们对混沌问题始终关心的一个

主题是混沌产生的原因或过程. 目前关于这个问题, 由数值模拟和物理实验已经证实存在四种重要的通向混沌的道路^[13]: 分岔道路、阵发道路、危机道路和拟周期道路.

为了更好地了解系统的动态性, 以下用数值的方法给出系统 (5) 在特定参数值条件下的全局分岔图以研究外加周期力对系统动力学行为的影响. 选择谐和力的振幅为分岔参数, 固定系统中的其他参数, 取 $\alpha = 0.9, s = 0.5, v = 2.9, \Omega = 1.5$, 初始条件为 (3, 0), 作全局分岔图, 见图 1.

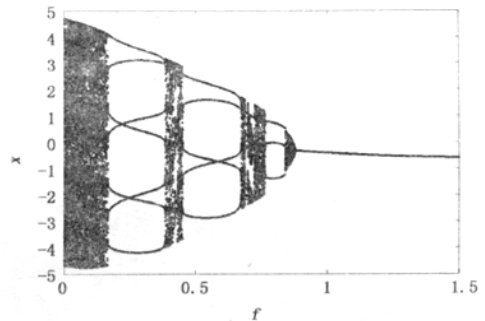


图 1 系统 (5) 的分岔图

Fig.1 Bifurcation diagram of system (5)

可以看出, 有外加谐和力作用时, 改变谐和力的幅值, 出现 3 个周期窗口, 并且系统响应出现周期解和拟周期解(混沌)的共存. 随着外加周期力振幅的逐渐增加, 系统响应历经了混沌(或拟周期)- 周期- 混沌(或拟周期)- 周期- 混沌(或拟周期)- 周期- 混沌(或拟周期)- 周期这样的变化过程. 图中模糊区域到底是混沌运动还是拟周期运动需要用其他非线性动力学分析方法来判断, 如最大 Lyapunov 指数法^[14].

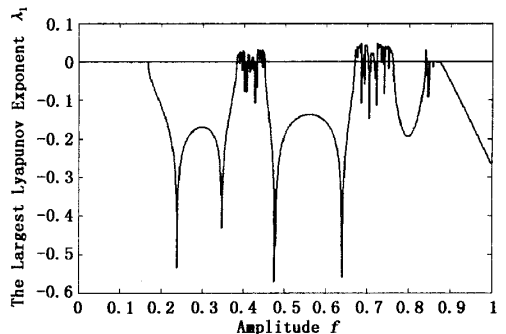


图 2 与全局分岔图相应的最大 Lyapunov 指数曲线.

Fig.2 The Largest Lyapunov exponent corresponding to Fig. 3

基于 Alan Wolf^[15] 思想, Lyapunov 指数定义为: $\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log_2 \frac{p_i(t)}{p_i(0)}$, 其中 λ_i 表示第 i 个 Lyapunov 指数, 并由大到小排列, 其中 λ_1 为最大 Lyapunov 指数. $p_i(t)$ 为连续动力系统在状态空间中形成的椭圆体的长轴长度. 特别的, 最大 Lyapunov 指数的正负号可以用来判断系统动力学行为的定性特征. 其判别标准就是: 最大 Lyapunov 指数 $\lambda_1 > 0$ 表示混沌运动, 而 $\lambda_1 < 0$ 则表示规则运动. 图 2 给出了以外加周期力振幅为函数的最大 Lyapunov 指数, 其参数值、初始值与图 1 同. 从图中看出, 振幅值为 0 ~ 0.15 左右时对应的最大 Lyapunov 指数为几乎为零的负值, 因此在全局分岔图中遇到的第 1 片模糊区域对应于系统响应的拟周期运动. 当振幅值介于 0.38 ~ 0.45 之间时, 最大 Lyapunov 指数间歇出现正值, 说明系统历经拟周期和 7 周期运动后有混沌运动的发生. 第 3 片模糊区域与第 2 片模糊区域情形相似, 最大 Lyapunov 指数正负值兼而有之, 说明周期的与混沌的系统响应相间存在.

3 混沌行为

结合图 1 和图 2, 下面用图形来回答混沌是如何产生的. 图 3 和图 4 给出了从左向右第 2 和第 3 片模糊区域的细分的分岔图, 初始值仍为 (3, 0).

图 3 对应于图 1 中从左向右的第 2 模糊区域. 回顾图 2 可知, 最大 Lyapunov 指数在点 $f = 0.382$ 处由负值转为正值, 这一转变导致了系统响应 7 周期的失败, 取而代之的是暂态混沌运动. 随着参数值 f 的增加, 在大约 [0.4, 0.43] 区间内出现 3 个小周期窗口, 且系统响应在 $f = 0.401$ 处退出混沌区, 重新进入周期运动. 不仅如此, 系统响应向前进一步分岔, 由 6 周期向右分岔成 12 周期再分岔成 24 周期, 依次下去, 最后进入混沌状态. 在此过程中最大 Lyapunov 指数由负值变为正值. 这种周期数成倍的分岔就是倍周期分岔, 出现的混沌就是倍周期分岔的结果. 换句话说, 倍周期分岔可以导致混沌. 仔细观察图 3 的中间部分, 发现: 系统响应经过短暂的混沌运动后退出, 再次出现多周期运动, 且这些多周期运动进一步向右分岔成少周期的运动, 但随参数 f 的增加, 这些少周期运动又向右分岔成 2 倍数目的周期运动. 图 5 用时间历程图验证了这种倍周期分岔变化的过程,

其中 $T = 2\pi/\Omega$, 两 * 之间表示一个完整的周期 T . 与前面类似, 倍周期分岔后进入混沌. 这种情况比较特殊, 说明当谐和力 f 介于 0.41 与 0.42 之间时, 不仅向右的倍周期分岔导致了混沌, 而且向左的倒倍周期分岔也导致了混沌. 同样地, 此区间内的第 3 个小周期窗口也有倒倍周期分岔的发生. 以上这些讨论说明: 倍周期分岔是经济周期系统(5) 通向混沌的主要通道.

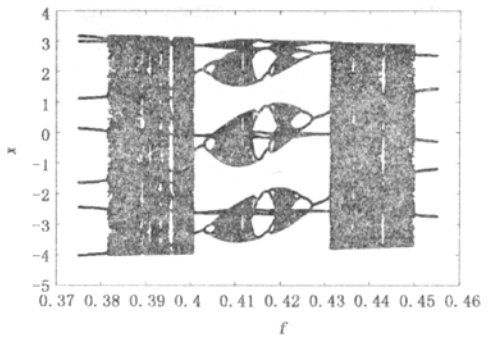


图 3 幅值在 [0.375, 0.455] 内的分岔图

Fig. 3 The bifurcation diagram within the amplitude interval [0.375, 0.455]

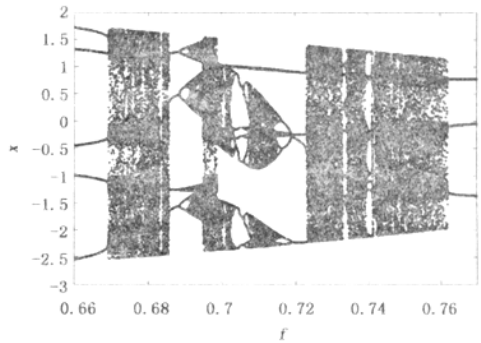


图 4 幅值在 [0.66, 0.77] 区间内的分岔图

Fig. 4 The bifurcation diagram within the amplitude interval [0.66, 0.77]

图 4 对应图 1 中从左向右的第 3 片模糊区. 不难看出, 系统行为与图 3 中讨论的情形类似, 即: 周期行为或混沌行为相间存在; 倍周期分岔或倒倍周期分岔相间存在; 倍周期分岔是通向混沌的主要道路; 倍周期分岔的发生在某种程度上预示着混沌的发生.

4 参数影响

值得注意的是, 当保持其他参数值不变而只增

大参数 v 的值时,系统全局分岔将发生重大的改变,见图6和图7. $v = 3.5$ 时,除了图1中原有的明显的1,3,5,7周期运动外,新的9周期运动出现,并且图1中的混沌区域逐渐减少.若再增大参数 v 的值到4.5,分岔图中又有新的11,13周期出现.有趣的是这些周期的数目按照奇数顺序依次排列,同时混沌区域(或不规则区域)进一步减小甚至消失,见图7.由此可知,增大参数 v 的值可以直接增强系统响应的规则运动,间接地抑制了混沌,消除了混沌.

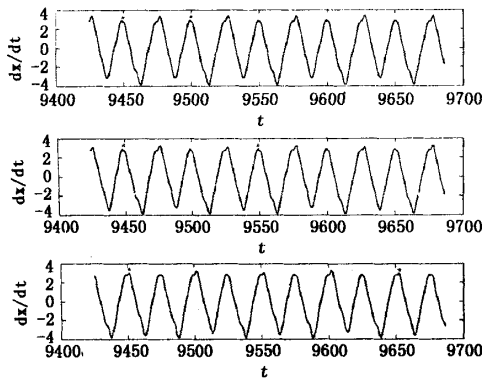


图5 时间历程图.参数为 $\alpha = 0.9, s = 0.5, v = 2.9, \Omega = 1.5$

Fig.5 The time response of system for $\alpha = 0.9, s = 0.5,$
 $v = 2.9, \Omega = 1.5$

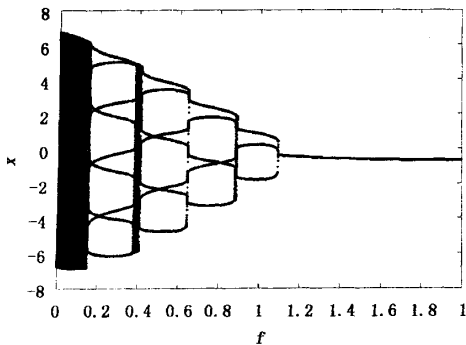


图6 系统的全局分岔图.参数为 $\alpha = 0.9, s = 0.5,$

$v = 3.5, \Omega = 1.5$

Fig.6 The global bifurcation diagram of system for $\alpha = 0.9, s = 0.5,$

$v = 3.5, \Omega = 1.5$

从经济角度来看,经济周期系统发生分岔说明系统内部存在不稳定的因素,使得经济系统不停的振荡,难于掌握.系统规则的周期运动意味着经济变量在未来时刻的行为服从一定的规律,可以进行预测,而混沌运动则意味着经济变量的行为是类似

随机的,不可预测的.参数 v 在经济周期模型起着“加速数”^[16]的作用,表示资本-产出率.以上分析表明,增大资本-产出率可以促进经济有规则的发展,从而有利于对收入变量的长期预测.

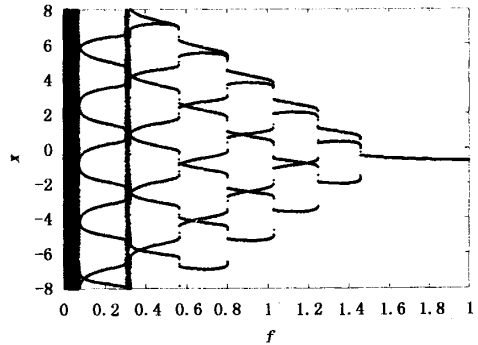


图7 系统的全局分岔图.参数为 $\alpha = 0.9, s = 0.5,$

$v = 4.5, \Omega = 1.5$

Fig.7 The global bifurcation diagram of system for $\alpha = 0.9, s = 0.5,$

$v = 4.5, \Omega = 1.5$

5 结束语

本文得到的新的经济周期模型是在一定的假设条件下得到的,其理论研究可以丰富宏观经济理论的内容,促进经济理论特别是动力经济动力学理论的发展.需要强调的是,文中使用的动力学分析方法与传统经济分析方法侧重点不同,本文注重模型的全局分析和动力学性质的探索.另外,经济周期模型的分岔混沌研究是对混沌经济学的进一步讨论,除了对复杂的非线性经济周期模型进行生动的动力学分析外,在一定程度上对经济变量难于预报或预测的现状也提供了一些新的解释.然而需要强调的是,把混沌动力学方法应用于经济,并非像人们预期的那样一下子就找到了解决一切复杂经济学问题的钥匙,确切的说,混沌理论自身并不能帮助我们预测经济,它只能帮助我们从事不同角度理解经济.

参 考 文 献

- 1 石良平. 宏观经济学. 北京: 高等教育出版社, 2004: 238 ~ 260 (Shi Liangping. Macroeconomics. Beijing: Higher Education Press, 2004: 238 ~ 260 (in Chinese))
- 2 Goodwin RM. The non-linear accelerator and the persistence of business cycles. *Econometrica*, 1951, 19: 1 ~ 17

- 3 Hicks JR. Harrod's dynamic theory. *Econometrica*, 1949, 16: 106~121
- 4 Hicks JR. A Contribution to the Theory of the Trade Cycle. Oxford: Oxford University Press, 1950
- 5 Puu T, Sushko I. A business cycle model with cubic non-linearity. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 19: 597~612
- 6 Puu T. Attractors, bifurcations, and chaos-nonlinear phenomena in economics. New York: Springer-Verlag, 2003
- 7 梁小民. 宏观经济学. 北京: 中国社会科学出版社, 1996 (Liang Xiaomin. Macroeconomics. Beijing: China Social Science Press, 1996 (in Chinese))
- 8 白暴力. 宏观经济模型与分析. 西安: 陕西人民出版社, 1990 (Bai Baoli. Macroeconomic Model and Analysis. Xi'an: Shaanxi Renmin Press, 1990 (in Chinese))
- 9 托马斯萨金特. 动态宏观经济理论. 北京: 中国社会科学出版社, 1997 (Thomas J. Sargent. Dynamical Macroeconomic Theory. Beijing: China Social Science Press, 1997 (in Chinese))
- 10 Strotz RH, McAnulty JC, Naines JB. Goodwin nonlinear theory of the business cycle: an electro-analog solution. *Econometrica*, 1953, 21(3): 22~43
- 11 Lorenz HW. Chaotic attractors, chaotic saddles, and fractal basin boundaries: Goodwin's nonlinear accelerator model reconsidered. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2002, (13): 957~965
- 12 Lucas RE. Econometric policy evaluations: a critique. (In): Brunner K, Meltzer A. H. The Phillips Curve and Labor Markets. Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy. Amsterdam: North Holland, 1976: 19~46
- 13 格里博格·约克. 混沌对科学和社会的冲击. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2001 (Grebogi C, Yorke J. A. The Impact of Chaos on Science and Society. ChangSha: Science and Technology of Hunan Press, 2001 (in Chinese))
- 14 Arnold L, Wihstutz V. Lyapunov Exponents-a Survey. (In): Arnold L. Wihstutz V. Lyapunov Exponents, Proceedings of a Workshop. Lecture Notes in Mathematics, Berlin: Springer-Verlag, 1986
- 15 Wolf A, Swift JB, Swinney HL, Vastano JA. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 1985, 16: 285~317
- 16 杨玉生. 现代宏观经济学. 北京: 中国经济出版社, 2003: 330~333 (Yang Yusheng. Modernistic Macroeconomics. Beijing: Economic Press of China, 2003: 330~333 (in Chinese))

BIFURCATION AND CHAOS IN A BUSINESS CYCLE MODEL *

Zhao Junfeng Li Wei

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710072, China)

Abstract Based on the macroeconomic ideas of Goodwin and Puu, this article derived a generalized nonlinear dynamical business cycle system. First, the numerical methods were used to investigate the global bifurcation behaviors of the system depending on certain parameters. Then, by means of the largest Lyapunov exponent, the variations of the dynamical characters during the bifurcation were discussed. Through the bifurcation figures, we found the period-doubling bifurcation route to chaos within some parameter intervals, and there were several periodic windows embedded in the chaotic domains. Besides, the increase of "accelerator" value can improve the cyclical motion of economics. Finally, the potential applications of the dynamical properties by bifurcation and chaos analysis to understanding economic fluctuations were introduced.

Key words business cycle, bifurcation, chaos, the largest Lyapunov exponent

Received 08 July 2005, revised 30 July 2005.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10472091, 10332030) and Shaanxi Provincial Natural Science Foundation(2003A03)