矿井提升系统的强非线性振动*

蔡建平[1,3]， 陈树辉[1] 李怡平[2]
(1.中山大学应用力学与工程系，广州 510275)(2.中山大学数学系，广州 510275)
(3.漳州师范学院数学系，漳州 363000)

摘要 矿井提升机在提升重物的过程中，由于质量和刚度的变化引起的系统固有频率十分缓慢的变化，因此考虑钢绳质量的矿井提升机系统是一个慢变参数振动系统.本文首先应用Kuzmak-Luke的多尺度法得到有一般非线性弹性力的强非线性振动系统解的周期性条件及用Jacobi椭圆函数表示的平方非线性振动和立方非线性振动的首阶渐近解.其次，将得到的结果分别应用于有平方、立方非线性弹性力的质量慢变的矿井提升系统.最后，将理论结果应用于某个矿井提升系统，应用算例的渐近解和数值解的比较表明本方法是有效的.

关键词 非线性振动，矿井提升系统，多尺度法，慢变参数

引言

矿井提升机作为地面与井下物质与人员流通的运输工具，在煤矿生产中有重要作用.提升系统的振动是安全生产的首要问题，直接影响着矿井的生产能力和人员、设备的安全，已引起很多工程技术人员的关注[1~4].

本文考虑钢绳质量的矿井提升机罐笼与钢绳组成的振动系统(图1).在提升重物的过程中，系统的质量和刚度随着钢绳的伸长与缩短连续地变化.由于质量和刚度的变化引起的系统固有频率十分缓慢的变化，因此这是一个具有慢变参数的非线性振动系统[5,6]，其运动微分方程如下

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m(\tilde{t})\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]+g(y,\tilde{t})=0 \tag{1}$$

其中 $m(\tilde{t})$ 是慢变质量，$\tilde{t}=\varepsilon t$ 是慢变时间($0<\varepsilon<<1$)，y 是罐笼的位移，$g(y,\tilde{t})$ 是非线性弹性力.慢变质量是由于钢绳的伸长与缩短引起的，可由下式计算

$$m(\tilde{t})=m_p+\frac{1}{3}\gamma L(\tilde{t})$$

其中 m_p 是罐笼的质量，γ 是钢绳单位长度的质量，$L(\tilde{t})$ 是钢绳的慢变长度.当非线性弹性力 $g(y,\tilde{t})$ 是 y 的线性函数时，闻邦椿等曾用KBM法求得渐近解[5,6].对一般的非线性弹性力 $g(y,\tilde{t})$，传统的KBM法失效.Kuzmak-Luke的多尺度法能有效地解决这一困难[7~10].本文应用该方法得到解的周期性条件及平方、立方非线性振动的渐近解.两个应用算例的渐近解和数值解的比较表明本方法是有效的.

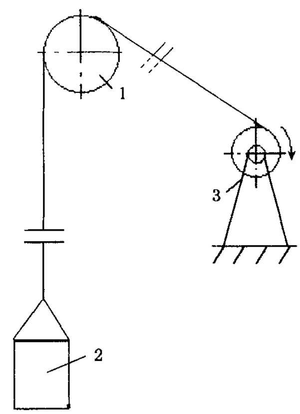

图1 矿井提升机的力学模型[5,6]
1——天轮，2——罐笼，3——提升机卷筒
Fig.1 Mechanical model of mine hoist
1 —— pulley，2 —— cage，3 —— mine hoist reel

1 Kuzmak-Luke的多尺度法

首先考虑带慢变参数的强非线性振动系统

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\varepsilon k(y,\tilde{t})\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+g(y,\tilde{t})=0 \tag{2}$$

2005-07-12收到第1稿，2005-09-01收到修改稿.
*国家自然科学基金(10272117)和中国博士后科学基金(2004036517)资助项目

其中 $\tilde{t}=\varepsilon t$ 是慢变尺度.假设方程(2)的解具有如下渐近展开式

$$y(t,\varepsilon)=y_0(t^+,\tilde{t})+\varepsilon y_1(t^+,\tilde{t})+\varepsilon^2 y_2(t^+,\tilde{t})+\cdots \quad (3)$$

其中的快变尺度 t^+ 按照 Kuzmak[7] 的定义为 $\frac{\mathrm{d}t^+}{\mathrm{d}t}=\omega(\tilde{t})$,其中 $\omega(\tilde{t})$ 为待定函数,它由方程解的周期性质所决定.设周期规范为1,其简化的表达式为

$$\omega(\tilde{t})=\frac{c}{\int_0^1 f_\varphi^2\mathrm{d}\varphi}\exp\left(-\int_0^{\tilde{t}}k(y_r,\tau)\mathrm{d}\tau\right) \quad (4)$$

其中 y_r 是振动中心,记 $y_0=f(\varphi,\tilde{t})$ 是首阶近似解,而 $\varphi=t^++\varphi_0$,常数 c 和 φ_0 由系统的初始条件确定,详细的推导见作者的另一文章[11].

(Ⅰ)当 $g(y,\tilde{t})=a(\tilde{t})y+b(\tilde{t})y^3$ 时

将展开式(3)代入方程(2)得到首阶方程

$$\omega^2(\tilde{t})\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^{+2}}+a(\tilde{t})y_0+b(\tilde{t})y_0^3=0 \quad (5)$$

其能量积分为

$$\frac{\omega^2(\tilde{t})}{2}\left(\frac{\partial y_0}{\partial t^+}\right)^2+V(y_0,a,b)=E_0\tilde{t}) \quad (6)$$

式中

$$V(y_0,a,b)=\frac{1}{2}a(\tilde{t})y_0^2+\frac{1}{4}b(\tilde{t})y_0^4$$

为系统势能,而 $E_0(\tilde{t})$ 为系统的慢变能量.当 $a(\tilde{t})>0$ 且 $b(\tilde{t})<0$ 时(振动中心 $y_r=0$),对方程(6)再积分一次可以解出 y_0 是 t^+ 的椭圆正弦函数

$$y_0=A_0(\tilde{t})sn[K(v)\varphi,v(\tilde{t})] \quad (7)$$

其中 $\varphi=t^++\varphi_0$,常数 φ_0 由初值决定,$K(v)$ 是关于模数 $\sqrt{v}$ 的第一类完全椭圆积分,而

$$A_0=\sqrt{\frac{-2av}{b(1+v)}} \quad (8)$$

模数 v 由方程

$$\frac{L^2(v)v^2}{(1+v)^3}=\frac{c^2b^2}{4a^3}\exp\left(-2\int_0^{\tilde{t}}k(0,\tau)\mathrm{d}\tau\right) \quad (9)$$

确定.其中常数 c 由初值确定,而

$$L(v)=\int_0^K cn^2(u,v)dn^2(u,v)\mathrm{d}u=\frac{1}{3v}[(1+v)E(v)-(1-v)K(v)]$$

其中 $E(v)$ 是关于模数 $\sqrt{v}$ 的第二类完全椭圆积分.

(Ⅱ)当 $g(y,\tilde{t})=a(\tilde{t})y+b(\tilde{t})y^2$ 时

将展开式(3)代入方程(2)得到首阶方程

$$\omega(\tilde{t})\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^{+2}}+a(\tilde{t})y_0+b(\tilde{t})y_0^2=0 \quad (10)$$

其能量积分为

$$\frac{\omega^2(\tilde{t})}{2}\left(\frac{\partial y_0}{\partial t^+}\right)^2+V(y_0,a,b)=E_0(\tilde{t}) \quad (11)$$

式中

$$V(y_0,a,b)=\frac{1}{2}a(\tilde{t})y_0^2+\frac{1}{3}b(\tilde{t})y_0^3 \quad (12)$$

为系统势能,而 $E_0(\tilde{t})$ 为系统的慢变能量.当 $a(\tilde{t})>0$ 时,对方程(12)再积分一次可以解出 y_0 是 t^+ 的椭圆余弦函数

$$y_0=A_0(\tilde{t})cn^2(K(v)\varphi,v(\tilde{t}))+B_0(\tilde{t}) \quad (13)$$

其中

$$A_0=\frac{3av}{ab\sqrt{v^2-v+1}},$$

$$B_0=-\frac{a}{2b}\left(\frac{2v-1}{\sqrt{v^2-v+1}}+1\right)$$

模数 $\sqrt{v}$ 由方程

$$\frac{v^2J(v)}{(v^2-v+1)^{5/4}}=\frac{2cb^2}{9a^{5/2}}\exp\left(-\int_0^{\tilde{t}}k(0,\tau)\mathrm{d}\tau\right) \quad (14)$$

其中

$$J(v)=\int_0^K sn^2(u,v)cn^2(u,v)dn^2(u,v)\mathrm{d}u=\frac{1}{15v^2}[(1-v)(v-2)K(v)+2(v^2-v+1)E(v)]$$

更详细的推导及参数 $a(\tilde{t})$ 和 $b(\tilde{t})$ 的不同符号的情况参阅[10]或[12].

当 $m(\tilde{t})=m_p+\frac{1}{3}\gamma L(\tilde{t})$ 和 $g(y,\tilde{t})=a(\tilde{t})y+b(\tilde{t})y^3$ 时,方程(1)为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left[m_p+\frac{1}{3}\gamma L(\tilde{t})\right]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\}+a(\tilde{t})y+b(\tilde{t})y^3=0 \quad (15)$$

当 $m(\tilde{t})=m_p+\frac{1}{3}\gamma L(\tilde{t})$ 和 $g(y,\tilde{t})=a(\tilde{t})y+b(\tilde{t})y^2$ 时,方程(1)为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left[m_p+\frac{1}{3}\gamma L(\tilde{t})\right]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\}+a(\tilde{t})y+b(\tilde{t})y^2=0 \quad (16)$$

它们都是方程(2)的特殊情况,其首阶渐近解可分别由(7)和(13)式表示.本文的首阶渐近解的精确度已相当令人满意,更高阶的渐近解可参阅[9].

2　算例

例 1 考虑某矿井提升机的提升过程,其非线性弹性力为$\frac{AE}{L(t)}(y-\frac{1}{2}y^3)$,其中 A,E 分别为钢丝绳的横截面积和弹性模量.若罐笼重 4590 kg,一次提升量 4000 kg,单位钢丝绳长度质量 6.63 kg/m,钢丝绳总抗拉力 119000 kg,提升速度 1 m/s,罐笼位于下止点时钢丝绳长度 320 m.当初始条件 $y(0)=1$,$\dot{y}(0)=0$ 时,用 Kuzmak-Luke 的多尺度法求得的首阶渐近解和数值解的比较见图 2.

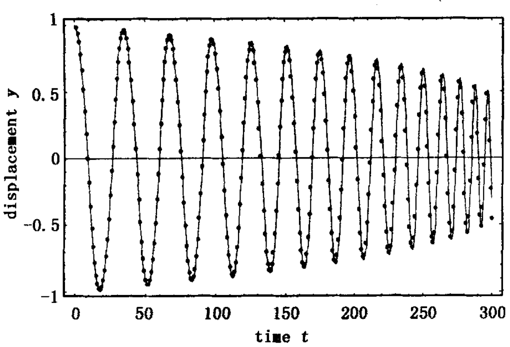

图 2　方程(15)的首阶渐近解和数值解的比较:
---- 数值解,…… 渐近解

Fig.2　Comparison of asymptotic solution with numerical one of Eq.(15):
---- numerical solution,…… asymptotic solution

例 2　考虑某矿井提升机的提升过程,其非线性弹性力为$\frac{AE}{L(t)}(y-\frac{1}{2}y^2)$,其余数据同例 1.当初始条件 $y(0)=1$,$\dot{y}(0)=0$ 时,用 Kuzmak-Luke 的多尺度法求得的首阶渐近解和数值解的比较见图 3.

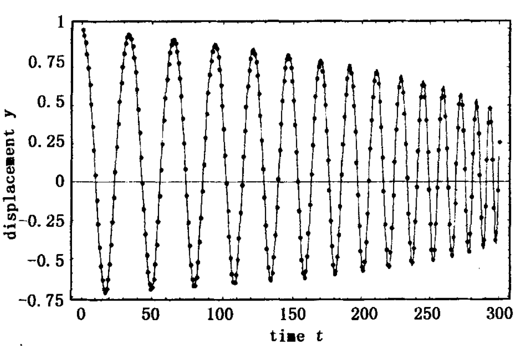

图 3　方程(16)的首阶渐近解和数值解的比较:
---- 数值解,…… 渐近解

Fig.3　Comparison of asymptotic solution with numerical one of Eq.(16):
---- numerical solution,…… asymptotic solution

3　结论

对于考虑钢绳质量的矿井提升机罐笼与钢绳组成的慢变参数振动系统,Kuzmak-Luke 的多尺度法能有效地用于求得用 Jacobi 椭圆函数表示的渐近解.两个应用算例的渐近解与数值解几乎一致,表明本文的方法是有效的.

参 考 文 献

1　龚宪生,谢志江,杨雪华.矿井提升机多层缠绕钢丝绳振动控制.振动工程学报,1999,12(4):460～467(Gong Xiansheng, Xie Zhijiang, Yang Xuehua. Vibration control on winding wire rope of multiple layers on mine hoists. *Journal of Vibration Engineering*,1999,12(4):460～467(in Chinese))

2　黄民,李功,张永忠.矿井提升机振动测试与故障诊断.煤矿机械,2002,(12):78～81(Huang Min, Li Gong, Zhang Yongzhong. Vibration test and fault diagnosis of mine hoisting gear. *Coal Mine Machinery*,2002,12:78～81(in Chinese))

3　朱华,等.矿井提升机振动故障诊断.振动与冲击,1997,16(4):31～35(Zhu Hua, et al. Fault diagnosis of mine hoist. *Journal of Vibration and Shock*,1997,16(4):31～35(in Chinese))

4　Terumichi Y, et al. Modeling, simulation and analysis techniques in the prediction of non-stationary vibration response of hoist ropes in lift systems. *Materials Science Forum*,2003,440-441:497～504

5　闻邦椿,李以农,韩清凯.非线性振动理论中的解析方法及工程应用.沈阳:东北大学出版社,2001(Wen Bangchun, Li Yinong, Han Qingkai. Analytical methods in the theory of nonlinear oscillations and their applications to engineering, Shenyang: Northeastern University Press, 2001(in Chinese))

6　闻邦椿,等.含慢变参数的非线性振动系统的振动特性.非线性动力学学报,1998,5(2):181～188(Wen Bangchun, et al. The vibration characteristics of the nonlinear systems with slow-changing parameters. *Journal of Nonlinear Dynamics in Science and Technology*,1998,5(2):181～188(in Chinese))

7　Kuzmak GZ. Asymptotic solutions of nonlinear second order differential equations with variable coefficients. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*,1959,23:730～744

8 Luke JC. A perturbation method for nonlinear dispersive wave problem, Proceeding of Royal Society of London (Series A), 1966, 292: 403~412
9 Kevorkian J, Li YP. Explicit approximations for strictly nonlinear oscillators with slowly varying parameters with applications to free electron lasers, Studies in Applied Mathematics, 1988, 78(2): 111~165
10 Cai Jianping, Li YP. Strongly nonlinear oscillators with slowly varying parameters. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 275(1-2): 241~248
11 Li YP. Elapsed time of periodic motion with negative damping. *Applied Mathematics Mechanics* (*English Edition*), 1992, 13(8): 719~723
12 蔡建平. 带慢变参数的强非线性振动分析及其应用[博士论文]. 广州: 中山大学, 2004 (Cai Jianping. Strongly nonlinear oscillations with slowly varying parameters and their Applications[Ph D Dissertation]. Guangzhou: Zhongshan University, 2004 (in Chinese))

STRONGLY NONLINEAR OSCILLATIONS IN MINE HOIST SYSTEMS*

Cai Jianping[1,3] Chen Shuhui[1] Li Yiping[2]

(1. *Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University, Guangzhou* 510275, *China*)

(2. *Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou* 510275, *China*)

(3. *Department of Mathematics, Zhangzhou Teachers College, Zhangzhou* 363000, *China*)

Abstract When a mine hoist is lifting a heavy weight, the natural frequency of the system varies slowly with the changes of mass and stiffness. So the mine hoist system is an oscillatory system with slowly varying parameters if the mass of steel rope is taken into account. The multiple scales method of Kuzmak-Luke was firstly applied to obtain the periodicity condition of solutions of strongly nonlinear oscillators with generally nonlinear spring, and then Jacobian elliptic functions were used to express the leading order approximate solutions of quadratic and cubic nonlinear oscillators. Secondly, the obtained results were applied respectively to mine hoist systems with slowly varying mass and with quadratic or cubic nonlinear spring. Finally, the theoretical results were used to deal with certain mine hoist systems, and comparisons of asymptotic solutions with numerical solutions of two examples showed the efficiency of the proposed method.

Key words nonlinear oscillation, mine hoist system, multiple scales method, slowly varying parameter

Received 12 July 2005, revised 01 September 2005.

* Research is supported by the National Natural Science Foundation of China under grant(10272117) and China Postdoctoral Science Foundation under grant(2004036517)