第3卷第4期
2005年12月

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 3 No. 4
Dec. 2005

(2+1)维广义 Borer-Kaup 系统的变量分离解* 和半包局域结构

叶健芬[1,3] 郑春龙[1,2] 陈立群[2]

(1.浙江丽水学院物理系,丽水 323000)(2.上海大学应用数学和力学研究所,上海 200072)

(3.浙江丽水职业技术学院,丽水 323000)

摘要 基于一个特殊的 Painlevé-Bäcklund 变换和多线性变量分离方法,分析了(2+1)维非线性广义 Borer-Kaup(GBK)系统,求得了该系统具有若干任意函数的变量分离严格解.根据得到的变量分离严格解,并通过选择解中的任意函数,引入恰当的局域函数和多值函数,找到了 GBK 系统一种新的具有实际物理意义的半包局域相干结构,如海洋表面波,并简要地讨论了这种半包局域相干结构的一些特殊的演化性质.结果表明:这种半包局域相干结构相互作用后,完全保持它们原有的速度、波形和波幅,即它们的演化性质是完全弹性的.

关键词 广义 Borer-Kaup 系统,多线性变量分离法,半包局域结构

引言

在物理学的众多领域中,如流体力学,等离子体物理,非线性光学,凝聚态物理等[1~3],现代孤子理论扮演了重要角色,并得到了广泛的应用,尤其是高维孤子系统的局域结构理论,现已引起了相关学者的极大关注.例如,由 Boiti 等人[4,5]通过 Bäcklund 变换方法发现的 DaverúStewartson(DS)系统的 Dromion 型的局域相干解,使人们对(2+1)维孤子系统产生了新的兴趣.近十年来,许多学者对高维非线性物理模型进行了广泛的研究.现在,关于多值孤波(在各个方向上发生折叠的孤波)的研究,虽有一些报道[6,7],但人们研究的范围主要仍局限于单值孤波.可是,我们的自然世界是丰富多彩的,常会遇到一些半包折叠的、相当复杂的局域结构.如:海面上的波浪会在某个方向上(如 X 轴方向)发生折叠,即以某种多值函数的方式折叠,而在另外一个方向上(如 Y 轴方向),又以某种单值函数的方式局域.在文献[8]中,我们已成功构建了这种新型的半包局域相干结构.现在一个令人感兴趣的问题是,这种半包局域结构是否会存在于其他物理模型,它的演化特性又如何呢?本文将关注下面(2+1)维广义 Broer-Kaup(GBK)非线性系统的半包局域结构及其一些特殊的演化行为[9]

$$h_t - h_{xx} - 2hh_x + u_x + Au + Bg = 0 \tag{1}$$

$$g_t + 2(gh)_x + g_{xx} + 4A(g_x - h_{xy}) + 4B(g_y - h_{yy}) + C(g - 2h_y) = 0 \tag{2}$$

$$u_y - g_x = 0 \tag{3}$$

其中 A,B,C 是任意常数.该 GBK 系统是楼森岳、张顺利等最近用 Painlevé 分析法从一特殊的 Broer-Kaup(BK)系统提出的新系统.显然,当 $A=B=C=0$ 时,上述 GBK 系统将退化为著名的浅水波 Broer-Kaup(BK)系统[10].

1 (2+1)维 GBK 系统的变量分离解

对一个给出定的非线性物理模型来说,人们可以用不同的方法求解.其中一个有效的方法是最近提出的多线性变量分离法(MLVSA).它先由 Lou 和 Lu[11] 在求解(2+1)维 Davey-Stewartson(DS)方程时提出的.该方法的主要思想是把系统中的物理场量 u 作为多个约化场量的泛函,如二个约化场分别为 P 和 Q,即

$$u(x,y,t) = \varphi(x,y,t,P(x,t),Q(y,t)) \tag{4}$$

其中 $P \equiv P(x,t)$ 是与 y 无关的变量分离函数,$Q \equiv Q(y,t)$ 是与 x 无关的变量分离函数.最近这个方法被不断完善,并成功的应用于各类(2+1)维非线性模型,如(2+1)维 AKNS 系统,非线性薛定

2005-07-21 收到第1稿,2005-08-06 收到修改稿.

*浙江省自然科学基金(Y604106),浙江省"新世纪151人才工程"基金和浙江省重点学科科研基金资助项目

鄂方程,Nizhnik-Novikov-Ve-sselov(NNV)模型,以及高阶 Broer-Kaup(BK) 方程(HBK) 等[12~18]. 事实上,MLVSA 方法研究(2+1)维孤子系统的基本理论已经建立. 当然,MLVSA 还在进一步发展,旨在得到非线性系统更广义的精确解(就某种意义而言,所求得的解应包含更多的任意函数).

在本文中,我们将 MLVSA 方法拓展到(2+1)维 GBK 系统. 为分析方便,先将方程(1)对变量 y 微分一次,然后将方程(3)代入(1)式,这时 GBK 系统会变为一组耦合的非线性系统

$$(h_t - h_{xx} + 2hh_x)_y + g_{xx} + Ag_x + Bg_y = 0 \tag{5}$$

$$g_t + 2(gh)_x + g_{xx} + 4A(g_x - h_{xy}) + 4B(g_y - h_{yy}) + C(g - 2h_y) = 0 \tag{6}$$

现在对上述耦合系统(5)和(6)中 h,g 进行 Painlevé-Bäcklund 变换

$$h = (\ln f)_x + h_0, g = 2(\ln f)_{xy} + g_0 \tag{7}$$

这里 $f = f(x,y,t)$ 是关于 $\{x,y,t\}$ 的待定函数,$\{h_0, g_0\}$ 是系统(5)和(6)种子解. 很显然方程(5)和(6)拥有平凡的种子解

$$h_0 = h_0(x,t), g_0 = 0 \tag{8}$$

其中 $h_0(x,t)$ 为所示变量的任意函数. 而且根据 Painlevé-Bäcklund 变换(7)和种子解(8),我们可以引入一个简单的变量代换 $g = 2h_y$. 利用这一变换 $g = 2h_y$,耦合系统(5)和(6)可以进一步约化为同一个非线性性方程

$$\partial_y(h_t + h_{xx} + 2hh_x + 2Ah_x + 2Bh_y) = 0 \tag{9}$$

现要将(7)中的第一个方程和种子解(8)代入方程(9),导出

$$[f^2\partial_{xy} - f(f_x\partial_y + f_y\partial_x + f_{xy}) + 2f_xf_y] \times (f_t + f_{xx} + 2Af_x + 2Bf_y + 2h_0f_x) = 0 \tag{10}$$

由(10)式,很容易发现如果函数 f 满足

$$f_t + f_{xx} + 2Af_x + 2Bf_y + 2h_0f_x = 0 \tag{11}$$

则式(10)自动成立.

由于方程(11)是一个线性方程,自然可以运用线性叠代原理,如设 f 为

$$f = \lambda + \sum_{k=1}^{N} P_k(x,t)Q_k(y,t) \tag{12}$$

其中 λ 是任常,$P_k(x,t) \equiv P_k$ 和 $Q_k(y,t) \equiv Q_k (k = 1,2,\cdots,N)$ 分别关于 $\{x,t\}$ 和 $\{y,t\}$ 变量分离函数.

将上面的 f 的设解(12)代入方程(11)可导出下面的变量分离方程组

$$P_{kt} + 2h_0P_{kx} + P_{kxx} + 2AP_{kx} + \sum_{l=1}^{M} \times \Gamma_{kl}(t)P_k = 0 \tag{13}$$

$$Q_{kt} + 2BQ_{ky} - \sum_{l=1}^{M} \Gamma_{kl}(t)Q_k = 0 \quad (l = 1,2,\cdots,M) \tag{14}$$

这里 $\Gamma_{kl}, (k = 1,2,\cdots,N; l = 1,2,\cdots,M)$ 是关于时间 t 的任意函数.

这样上述(2+1)维广义 BK 系统(5)和(6)的变量分离解可表示为

$$h = \frac{\sum_{k=1}^{N} P_{kx}Q_k}{\lambda + \sum_{k=1}^{N} P_kQ_k} + h_0 \tag{15}$$

$$g = \frac{2\sum_{k=1}^{N} P_{kx}Q_{ky}}{\lambda + \sum_{k=1}^{N} P_kQ_k} - \frac{2\sum_{k=1}^{N} P_{kx}Q_k \sum_{k=1}^{N} P_kQ_{ky}}{(\lambda + \sum_{k=1}^{N} P_kQ_k)^2} \tag{16}$$

其中的 h_0, P_k 和 Q_k 应满足式(13)和式(14).

考虑上面变量分离解式(15)和式(16)的复杂性和实际讨论的方便,我们可以对它们进行适当简化,给出一些具体的特解.

情形一:考虑一种最简单的情形:$N = M = 1$, $\{P_1, Q_1\} = \{P, Q\}, \Gamma_{11}(t) = \tau(t)$. 上述式(12) ~ 式(14)变为

$$f = \lambda + PQ \tag{17}$$

$$P_t + P_{xx} + 2h_0P_x + 2AP_x + \tau(t)P = 0 \tag{18}$$

$$Q_t + 2BQ_y - \tau(t)Q = 0 \tag{19}$$

根据方程(18)式很容易得出它的一般解. 由于种子解 $h_0(x,t)$ 是关于 (x,t) 的任意函数,我们可先将函数 P 看作关于变量 $\{(x,t)\}$ 的任意函数,然后种子解 h_0 由方程(18)确定

$$h_0 = -\frac{P_t + 2AP_x + P_{xx} + \tau(t)P}{2P_x} \tag{20}$$

至于式(19),其形式解可以直接表示为

$$Q(y,t) = S(y - 2Bt)\exp\int^t \tau(t)\mathrm{d}t \tag{21}$$

其中 $S(y - 2Bt) \equiv S$ 是关于 $(y - 2Bt)$ 的任意函数.

最后,我们可以得到广义 BK 系统式(5) 和式(6) 一组特解

$$h = \frac{P_x S\exp\int^t \tau(t)\mathrm{d}t}{\lambda + PS\mathrm{xp}\int^t \tau(t)\mathrm{d}t} - \frac{P_t + 2AP_x + P_{xx} + \tau(t)P}{2P_x} \quad (22)$$

$$g = \frac{2\lambda P_x S_y \exp\int^t \tau(t)\mathrm{d}t}{[\lambda + PS\exp\int^t \tau(t)\mathrm{d}t]^2} \quad (23)$$

式中 $P(x,t)$,$S(y-2Bt)$ 和 $\tau(t)$ 为所示变量的任意函数.

情形二:用类似的方法,当考虑另一种情形:

$N=3, M=1, \lambda=a_0$,

$\{P_1, Q_1\} = \{p(x,t), a_1\}$,

$\{P_2, Q_2\} = \{a_2, Q(y,t)\}$,

$\{P_3, Q_3\} = \{P(x,t), a_3 Q(y,t)\}$,

$\Gamma_{kl}(t)=0$,其中 $a_i(i=1,\cdots,4)$ 为任意常数,则上述方程式(12) ~ (14) 变为

$$f = a_0 + a_1 P + a_2 Q + a_3 PQ \quad (24)$$

$$P_t + P_{xx} + 2h_0 P_x + 2AP_x = 0 \quad (25)$$

$$Q_t + 2BQ_y = 0 \quad (26)$$

根据方程式(24) ~ (26),可以得到广义 BK 系统式(5) 和式(6) 另一组特解

$$H \equiv h = \frac{P_x(a_1 + a_3 Q)}{a_0 + a_1 P + a_2 Q + a_3 PQ} - \frac{P_t + 2AP_x + P_{xx}}{2P_x} \quad (27)$$

$$G \equiv g = \frac{2(a_3 a_0 - a_2 a_1)P_x Q_y}{(a_0 + a_1 P + a_2 Q + a_3 PQ)^2} \quad (28)$$

式中 $P(x,t) \equiv P$, $Q(y-2Bt) \equiv Q$ 为任意函数. 值得说明一下的是,以前由 Zhang 等人得到分离变量解是现在情形二中当 $a_3 = a_0 = 0, a_2 = a_1 = 1$ 时的特解[9].

2 GBK 系统的半包局域结构和它们的一些特殊演化性质

在这里我们暂不考虑一般场函数 g(16) 式,而只讨论由(28) 式描述的场函数 G 所产生的一些新局域结构. 事实上,即使在这种特殊情形中,人们也可以得到 GBK 系统的非常丰富的局域相干结构[2,13]. 由于函数 P 和 Q 在场函数 G(18) 式中有任意性,相应地 G 具有丰富的局域结构,如 dromion, peakon 局域相干孤子等. 例如,在各个方向中都局域的 dromion 孤子可以由直线或曲线孤子共振作用后得到:当考虑选取函数 P 和 Q 为[13]

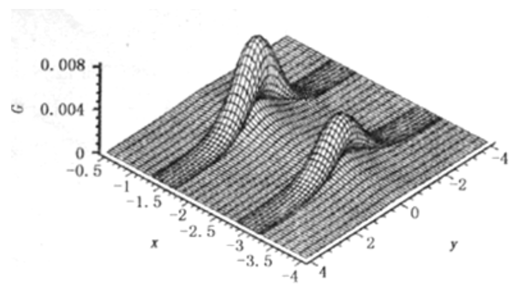
$$P = \sum_{i=1}^{N} \exp[k_i(x+ct) + x_{0i}],$$

$$Q = 1 + \sum_{i=1}^{M} \exp[k_i(y-2Bt) + y_{0i}] \quad (29)$$

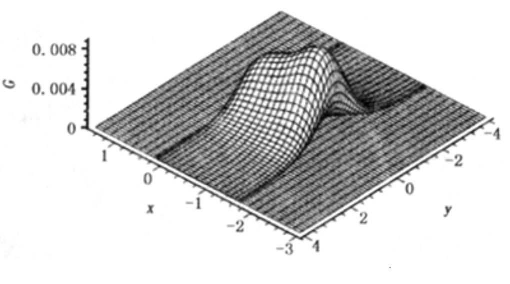
时,其中 K_i, k_i, x_{0i} 和 y_{0i} 是任意常量, M 和 N 是正整数,那么我们就可以得到场函数 G 的平面相干孤子(dromion). 沿着上面的思路,当考虑函数 $P(x,t)$ 和 $Q(y-2Bt)$ 为一些恰当的分段连续函数时,我们则可以得到场函数 G 的一些峰状孤子(peakon)[7],如

$$P = \sum_{i=1}^{N} \begin{cases} \psi_i(x+ct), & x+ct \leqslant 0 \\ -\psi_i[-(x+ct)] = 2\psi_i(0), & x+ct > 0 \end{cases}$$

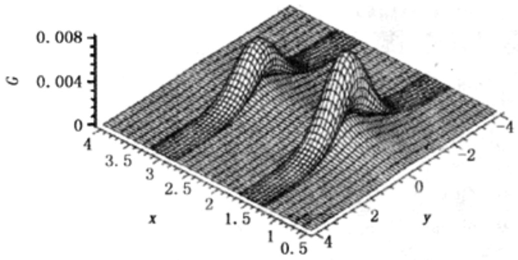
$$Q = \sum_{i=1}^{M} \begin{cases} \chi_i(y-2Bt), & y-2Bt \leqslant 0 \\ -\chi_i[-(y-2Bt)] + 2\chi_i(0), & y-2Bt > 0 \end{cases} \quad (30)$$



(a) $t=-15$



(b) $t=-5$



(c)　$t=15$

图1　场函数 G(28) 满足条件式(32) 和式(33) 时的 2个半包局域结构和它们在不同时间的演化图

Fig.1　Two semifolded localized structures and their evolution profiles for the field G(28) with the conditions (32) and (33) at different times

这里的 $\chi_i(y-2Bt)\equiv\chi_i(\eta)$ 和 $\psi_i(x+ct)\equiv\psi_i(\zeta)$ 是所变量的可微函数，边界约束条件为：$\chi_i(\pm\infty)=A_{\pm i},(i=1,2,\cdots,M),\psi_i(\pm\infty)=B_{\pm i},(i=1,2,\cdots,N)$，这里的 $A_{\pm i}$ 和 $B_{\pm i}$ 为任意常量或甚至无穷.

现在我们分析场函数 G 在一些特定情形下存在的三维半包局域结构.若取 Q 是单值函数，而 P 由下面关系给定[8]

$$P_x=\sum_{j=1}^{M}h_j(\zeta+c_jt),$$

$$x_x=\zeta+\sum_{j=1}^{M}X_j(\zeta+c_jt),$$

$$P=\int^{\zeta}P_xx_\zeta\mathrm{d}\zeta \tag{31}$$

其中的 $c_j,(j=1,2,\cdots,M)$ 是任意常量，h_j,X_j 为局部函数，其特性是 $h_j(\pm\infty)=0,X_j(\pm\infty)=consts$.从式(31)知：通过适当选取 X_j 在 x 的某些区域上，ζ 可能是一个关于 x 的多值函数.在这些区域里，P_x 虽然是关于 ζ 的单值函数，但它可能是关于 x 的多值函数.另外，一般来说，如果取 P 或 Q 是低维系统中具有相移的多孤子解，那么由式(28) 表示的(2+1) 维局域激发孤子也具有相移性质.例如，当

$$P_x=\mathrm{sech}(\zeta)^2+0.5\mathrm{sech}(\zeta-0.3t)^2,$$

$$x=\zeta-1.5\tanh(\zeta)-1.5\tanh(\zeta-0.3t) \tag{32}$$

$$Q=\exp(y-0.01t),(a_0=10,a_1=a_2=1,a_3=0.2) \tag{33}$$

则我们可以得到一个具有相移的半包局域结构.在图(1a)),(1b) 和(1c) 中描绘了二个有趣的局域结构.从图(1) 可以看到，这二个半包波局域结构具有新的特性：它在 x 方向上发生折叠，而在 y 方向上单值局域.与此同时，通过仔细分析，我们发现这两个传播的半包局域结构(有时也称为泡孤子[7])的相互作用是完全弹性的.在这两个半包局域结构中，其中一个泡孤子的速度已设定为零，但它仍有相移.从图中我们可以清楚地看出，静止的那个半包局域结构(图中较大的泡孤子) 的位置大约从 $x=-1.5$ 的地方移到了 $x=1.5$ 处.但是它们作用后，完全保持原有的形状和波幅.

3　总结和讨论

本文从 Painlevé-Bäcklund 变换出发，运用多线性变量分离理论，研究了(2+1)维非线性 GBK 系统，得到了该系统具有许多任意分离变量函数的一般局域解.根据所得的局域激发解，通过选择恰当的任意函数，则可以构造各种各样的局域相干子孤子，如平面相干孤子，环孤子，团孤子，呼孤子，瞬子，峰孤子，折叠子，混沌孤子和分形孤子等等.本文还得到了一种新的半包局域相干结构，并简要地讨论了其演化特性.就我们所知，关于(2+1)维 GBK 系统的局域激发变量分离一般解，尤其是其半包局域相干结构及其演化性质，还少有报道.实际上，我们这篇短文也只是个初始工作.由于孤子理论的广泛应用，关于高维非线性可积系统的半包局域激发模式及其演化特性值得进一步深入研究.

参　考　文　献

1　Camassa Rand Holm DD. An integrable shallow water equation ith peaked solitons. *Phys Rev Lett*, 1993, 71: 1661～1664

2　Tang Xiaoyan, Lou senyue and zhang ying. Localized excitations in (2+1)-dimensional systems. *Phy Rev E*, 2002, 66: 046601～0466017

3　Lou Senyue. Searching for higher dimensional integrable models from lower ones via painlevé analysis. *Phys Rev Lett*, 1998, 80: 5027～5032

4　Boiti M, Leon J, Martina L and Pempinelli F. Scattering of localized solitions in the plane. *Phys Lett A*, 1988, 132: 432～439

5　Fokas A S. Coherent structures multidimensions. *Phys Rev*

LettA, 1989, 63: 1329～1333

6 Tang Xiaoyan and Lou Senyue. Extended multilinear variable separation approach and multivalued localized excitations for some (2 + 1)-dimensional integrable systems. *J Math Phys*, 2003, 44: 4000～4025

7 Zheng Chunlong et al. Peakon and foldon excitations in a (2 + 1)-dimensional breaking soliton system. *Chin Phys Lett*, 2003, 20(6): 783～786

8 Zheng Chunlong and Chen Liqun. Semifolded localized coherent structures in generalized (2 + 1)-dimensional Korteweg de Vries system. *J Soc Phys Jpn*, 2004, 73: 293～295

9 Zhang shuli, Wu Bin, and Lou Senyue. Painlevé analysis and special solutions of generalized BroerKaup equations. *Phys Lett A*, 2002, 300: 40～48

10 Fokas A S. On the simplest integrable equation in 2 + 1. *Inverse Problems*, 1994, 10: L19～L22

11 Lou Senyue and Lu jizong. Special solutions from variable separation approach: Davey-Stewartson equation. *J Phys A: Math Gen*, 1996, 29: 4209～4215

12 Lou Senyue and Ruan Hangyu. Revisitation of the localized excitations of the(2 + 1)-dimensional KdV equation. *J phys A: Math Gen*, 2001, 34: 305～316

13 Zheng Chunlong, Chen Liqun, and Zhang Jiefang. Peakon, compacton and loop excitations with periodic behavior in KdV type models. *Phys Lett A*, 2005, 340: 397～402

14 Zheng Chunlong and Chen Liqun. Solitons with fission and fusion behaviors in a variable coefficient Broer-Kaup sysem. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, 24: 1347～1351

15 Zheng Chunlong, Fang Jianping, and Chen Liqun, New variable separation excitations of a (2 + 1)-dimensional Broer-Kaup-Kupershmidt system via an extended mapping approach. *Z Naturforsch A*, 2004, 59: 912～918

16 Zheng Chunlong and Sheng Zhengmao. Localized coherent soliton structures for a (2 + 1)-dimensional generalized schr? dinger system. *Inter J Mod Phys B*, 2003, 17: 4407～4414

17 Zheng Chunlong and Zhang Jiefang. General solution and fractal localized structures for the (2 + 1)-dimensional generalized Ablowitz-Kaup-Newell-Segur system. *Chin Phys lett*, 2002, 19: 1399～1402

18 Zheng Chunlong, Zhang Jiefang and Sheng Zhengmao. Chaos and fractals in a soliton system. *Chin Phys lett*, 2003, 20: 331～334

VARIABLE SEPARATION SOLUTIONS AND SEMIFOLDED LOCALIZED STRUCTURES FOR(2+1)-DIMENSIONAL GENERALIZED BORER-KAUP SYSTEM *

Ye Jianfen[1,3]　Zheng Chunlong[1,2]　Chen Liqun[2]

(1. *Department of Physics, Zhejiang Lishui University, Lishui* 323000, *China*)

(2. *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai* 200072, *China*)

(3. *Zhejiang Lishui Vocational College, Lishui* 323000, *China*)

Abstract Starting from a special Painlevé-Bäcklund transformation and a multilinear variable separation approach, the (2+1)-dimensional generalized Borer-Kaup(GBK) system was analyzed, and a general variable separation excitation with some arbitrary functions for the (2+1)-dimensional GBK system was derived. Based on the derived variable separation excitation and by selecting the arbitrary functions in the exact solution appropriately, such as certain localized functions and multi-valued functions, a new type of solitary wave, i.e., a semifolded localized structure with practical meaning like ocean surface waves for the GBK system was constructed, and its evolution property of the novel localized structures was briefly discussed. The results show that it is completely elastic interaction, because the semifolded localized coherent structures are completely preserved, and their initial velocities, wave shapes and amplitudes are preserved after collision.

Key words generalized Borer-Kaup system, multilinear variable separation approach, semifolded localized structure

Received 21 July 2005, revised 06 August 2005.

* This project was supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province (Y604106), the Foundation of "New Century 151 Talent Engineering" of Zhejiang Province, and the Scientific Research Foundation of Key Discipline of Zhejiang Province