

# 松弛状态非圆截面弹性螺旋细杆的稳定性\*

刘延柱

(上海交通大学工程力学系,上海 200030)

**摘要** 研究松弛状态下的非圆截面弹性螺旋细杆,即带有原始曲率和挠率的非圆截面弹性杆的平衡稳定性问题.基于 Kirchhoff 动力学比拟,建立用欧拉角表达的弹性杆动力学方程.忽略线加速度引起的微小惯性力,仅考虑截面转动的动力学效应,使欧拉方程封闭.证明松弛状态下的非圆截面螺旋杆无论在空间域或时域均满足一次近似意义下的 Lyapunov 稳定性条件.从而为螺旋形态弹性细杆存在于自然界中的广泛性和稳定性作出理论解释.提示负泊松比材料的螺旋杆可能不稳定.

**关键词** 弹性细杆, Kirchhoff 动力学比拟, Lyapunov 稳定性

## 引言

70年代以来,由于分子生物学领域中利用弹性细杆模型分析 DNA 几何形态研究工作的兴起,使弹性杆的平衡和稳定性问题成为非线性力学的研究热点<sup>[1,2]</sup>.弹性杆非线性力学的理论研究基于 1859 年 Kirchhoff 的动力学比拟<sup>[3]</sup>.无原始曲率弹性杆是文献中的主要研究对象,其螺旋线状态的平衡稳定性问题已被充分讨论<sup>[4-7]</sup>.但松弛状态的直杆必需在轴向压力作用下才能维持螺旋线平衡.而自然界中普遍存在的实际螺旋细杆,如卷曲的短纤维、DNA、螺旋杆菌等均为松弛状态下的螺旋杆,不能直接引用轴向受压状态螺旋杆的分析结论.本文以松弛状态下的螺旋杆,即带有原始曲率和原始挠率的非圆截面弹性杆为对象,研究其平衡稳定性问题.圆截面杆为其特例.在动态稳定性分析中忽略线加速度引起的微小惯性力,仅考虑截面转动的动力学效应,使欧拉方程封闭.证明无论在空间域或在时域内,非圆截面松弛螺旋杆恒满足一次近似意义下的 Lyapunov 稳定性条件.从而为螺旋形态弹性细杆存在于自然界中的广泛性和稳定性作出理论解释,并提示负泊松比材料的螺旋杆可能不稳定.

## 1 松弛非圆截面杆的动力学方程组

设圆截面弹性细杆满足不可伸长、无弯曲剪切

变形、均匀、线弹性、无分布力等 Kirchhoff 理论的规定条件.以固定点  $O$  为原点,建立固定参考坐标系  $(O - \xi\eta\zeta)$ , 平移至杆中心线上任意点  $P$ , 令  $(P - \xi\eta\zeta)$  绕  $\zeta$  轴转过  $\psi$  角后的位置为  $(P - x_1y_1z_1)$ ,  $(P - x_1y_1z_1)$  绕  $x_1$  轴转过  $\vartheta$  角后的位置为  $(P - x_2y_2z_2)$ , 绕  $z_2$  轴转过  $\varphi$  角后的位置与截面主轴坐标系  $(P - xyz)$  重合,  $z_2$  和  $z$  轴沿杆中心线的切线.  $\psi, \vartheta, \varphi$  为确定截面姿态的欧拉角(见图 1). 以端点  $P_0$  为原点,沿杆中心线建立弧坐标  $s$  以确定  $P$  点的位置.设松弛状态下的杆中心线为半径  $R$ , 倾角  $\alpha$  的螺旋线,则杆的原始曲率  $\kappa^0$  和原始挠率  $\tau^0$  为

$$\kappa^0 = \omega_0 \sin \vartheta_0, \tau^0 = \omega_0 \cos \vartheta_0 \quad (1)$$

其中  $\vartheta_0, \omega_0$  为  $\vartheta$  和  $\partial\psi/\partial s$  的原始值

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha, \omega_0 = \frac{\sin \vartheta_0}{R} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial s} \right)_0 \quad (2)$$

截面内力的主矩  $\mathbf{M}$  在截面坐标系  $(P - xyz)$  中的投影为

$$\begin{aligned} M_1 &= A\omega_1, M_2 = B(\omega_2 - \kappa^0), \\ M_3 &= C(\omega_3 - \tau^0) \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\omega_i (i = 1, 2, 3)$  为弯扭度矢量  $\boldsymbol{\omega}$  在  $(P - xyz)$  中的投影,  $A = EI_1, B = EI_2, C = GI_3$  为杆相对  $x, y$  轴的抗弯刚度和相对  $z$  轴的抗扭刚度,  $E, G$  分别为杆的杨氏模量和剪切模量, 杆为均匀各向同性时,  $G = E/2(1 + \nu)$ ,  $\nu$  为泊松比,  $I_1, I_2, I_3$  分别为截面对  $x, y$  轴的惯性矩和极惯性矩. 在静力学分析中, 由于无分布力, 截面内力主矢  $\mathbf{F}$  与杆端作

2005-08-26 收到第 1 稿, 2005-10-08 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金(10472067)

用的外力相等而保持常值. 在无外力作用的松弛状态, 主矢  $F$  恒为零. 在动力学分析中, 杆截面线加速度形成的惯性力可引起非零主矢增量. 但由于杆的密度远小于刚度(以 DNA 为例,  $\rho = 1.7 \text{ g/cm}^3$ ,  $E = 1.6 \times 10^9 \text{ dyne/cm}^2$ ), 惯性力引起的主矢增量极其微小, 且由于 Kirchhoff 动力学比拟理论中, 杆的变形是由截面的转动所体现. 因此本文在动力学分析中仅考虑截面转动的角加速度产生的惯性效应, 而忽略线加速度引起的惯性力. 此近似假定使描述截面转动的欧拉方程自行封闭. 在  $P$  点处取杆的微元体, 利用相对截面中心的动量矩定理列出

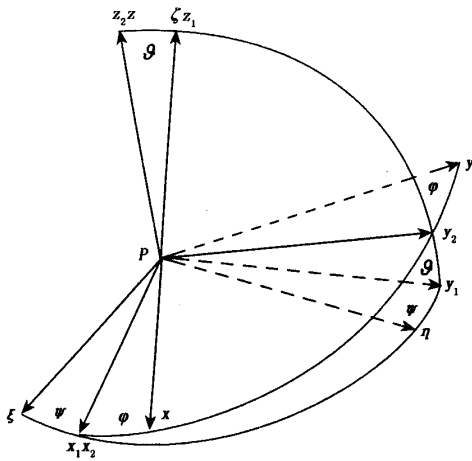


图1 参考坐标系

Fig.1 Reference frames

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial s} + \omega \times M - \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{J} \cdot \Omega) - \Omega \times (\tilde{J} \cdot \Omega) = 0 \quad (4)$$

其中波浪号表示相对截面坐标系 ( $P - x_1y_2x_3$ ) 的局部导数,  $\tilde{J}$  为单位长度杆的惯量张量,  $\Omega$  为截面的角速度矢量. 将式(2)代入后导出描述截面转动的欧拉方程

$$A \frac{\partial \omega_1}{\partial s} + (C - B)\omega_2\omega_3 + B\kappa^0\omega_3 - C\tau^0\omega_2 - J_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + (J_2 - J_3)\Omega_2\Omega_3 = 0 \quad (5a)$$

$$B \frac{\partial \omega_2}{\partial s} + (A - C)\omega_3\omega_1 + C\tau^0\omega_1 - J_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} + (J_3 - J_1)\Omega_3\Omega_1 = 0 \quad (5b)$$

$$C \frac{\partial \omega_3}{\partial s} + (B - A)\omega_1\omega_2 - B\kappa^0\omega_1 - J_3 \frac{\partial \Omega_3}{\partial t} + (J_1 - J_2)\Omega_1\Omega_2 = 0 \quad (5c)$$

其中  $J_i = \rho I_i (i = 1, 2, 3)$  为单位长度杆相对 ( $P -$

$x_1y_2x_3$ ) 各轴的转动惯量,  $\rho$  为杆的密度. 转动惯量与杆的抗弯和抗扭刚度之间有以下关系

$$J_1 = \frac{\rho A}{E}, J_2 = \frac{\rho B}{E}, J_3 = \frac{\rho C}{G} \quad (6)$$

方程组(5)中的变量  $\omega_i, \Omega_i (i = 1, 2, 3)$  可利用截面相对 ( $O - \xi\eta\zeta$ ) 的欧拉角  $\psi, \vartheta, \varphi$  表示为

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sin\vartheta \sin\varphi \frac{\partial \psi}{\partial s} + \cos\varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \\ \omega_2 &= \sin\vartheta \cos\varphi \frac{\partial \psi}{\partial s} - \sin\varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \\ \omega_3 &= \cos\vartheta \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \sin\vartheta \sin\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} + \cos\varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \\ \Omega_2 &= \sin\vartheta \cos\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} - \sin\varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \\ \Omega_3 &= \cos\vartheta \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned} \quad (8)$$

## 2 静态稳定性分析

方程组(5)存在以下特解, 对应于杆保持原始螺旋线状态的静平衡

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0, \psi = \omega_0 s, \varphi = 0, \\ \Omega_i &= 0 (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (9)$$

作静力学分析时, 令  $\Omega = 0$ , 各变量均为弧坐标  $s$  的一元函数, 动力学方程组(4)转化为静力学平衡方程组

$$\begin{aligned} A \frac{d\omega_1}{ds} + (C - B)\omega_2\omega_3 + B\kappa^0\omega_3 - C\tau^0\omega_2 &= 0 \end{aligned} \quad (10a)$$

$$B \frac{d\omega_2}{ds} + (A - C)\omega_3\omega_1 + C\tau^0\omega_1 = 0 \quad (10b)$$

$$C \frac{d\omega_3}{ds} + (B - A)\omega_1\omega_2 - B\kappa^0\omega_1 = 0 \quad (10c)$$

引入无量纲化的弧坐标  $\bar{s}$  及无量纲扰动量  $x_i (i = 1, 2, 3)$

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \omega_0 s, x_1 = \vartheta - \vartheta_0, \\ x_2 &= \psi - \bar{s}, x_3 = \varphi \end{aligned} \quad (11)$$

变量  $x_i (i = 1, 2, 3)$  均为弧坐标  $\bar{s}$  的函数. 用撇号表示对  $\bar{s}$  的导数, 略去扰动量的2次以上微量, 得到

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0(x_1 + \sin\vartheta_0 x_3) \\ \omega_2 &= \omega_0[\cos\vartheta_0 x_1 + \sin\vartheta_0(1 + x_2)] \\ \omega_3 &= \omega_0[-\sin\vartheta_0 x_1 + \cos\vartheta_0(1 + x_2) + x_3] \end{aligned} \quad (12)$$

代入方程组(10),导出螺旋杆状态的一次近似静态扰动方程

$$\begin{aligned} & \gamma(1+v)x_1'' - (1 - v\cos^2\vartheta_0)x_1 - \\ & v\cos\vartheta_0\sin\vartheta_0x_2' + [1 + \gamma(1 + \\ & v)]\sin\vartheta_0x_3' = 0 \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} & (1 + \gamma)\cos\vartheta_0x_1' + \sin\vartheta_0x_2'' + \\ & \gamma\cos\vartheta_0\sin\vartheta_0x_3 = 0 \end{aligned} \quad (13b)$$

$$- [1 + \gamma(1 + v)]\sin\vartheta_0x_1' + \cos\vartheta_0x_2' +$$

$$\begin{vmatrix} \gamma(1+v)\lambda^2 - 1 - v\cos^2\vartheta_0 & -v\lambda\cos\vartheta_0\sin\vartheta_0 & [1 + \gamma(1 + v)]\lambda\sin\vartheta_0 \\ (1 + \gamma)\lambda\cos\vartheta_0 & \lambda^2\sin\vartheta_0 & \gamma\cos\vartheta_0\sin\vartheta_0 \\ -[1 + \gamma(1 + v)]\lambda\sin\vartheta_0 & \lambda^2\cos\vartheta_0 & \lambda^2 - \gamma(1 + v)\sin^2\vartheta_0 \end{vmatrix} =$$

$$\gamma(1 + v)(\lambda^2 + 1)^2\lambda^2\sin\vartheta_0 = 0 \quad (16)$$

除零根以外的特征值为纯虚根,证明在一次近似意义下,松弛状态下的螺旋杆平衡状态恒满足空间域内的 Lyapunov 稳定性条件,与杆的物理参数或螺旋线的几何参数无关. 扰动量沿弧坐标以角频率  $k$  周期变化. 匝数为  $N$  的螺旋杆长度为  $L = 2\pi N/\omega_0$ , 杆两端的几何约束条件相同时,受扰挠性线在端部应满足

$$x_i(L) = x_i(0) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17)$$

则要求  $kL = 2m\pi$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), 导出

$$k = n\omega_0, n = m/N \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (18)$$

判别静态稳定性的特征方程(16)要求  $\lambda = \pm i$ , 即  $k = \pm \omega_0, n = \pm 1$ . 此边界条件要求螺旋杆由整数匝螺旋组成.

### 3 动态稳定性分析

在静力学范畴内研究弹性杆的稳定性,由于无时间变量参与,不能根据弹性杆变形的时间历程来判断受扰后的运动趋向. 严格的稳定性分析必须在动力学范畴内进行,即必须研究具有弧坐标  $s$  和时间  $t$  双重自变量离散系统的稳定性问题<sup>[6,7]</sup>. 引入无量纲化的时间变量  $\bar{t}$

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \omega_0^2 t \quad (19)$$

其中  $I$  为截面的平均惯性矩,  $S$  为截面面积. 各扰动量  $x_i$  ( $i = 1, 2, 4$ ) 均为弧坐标  $\bar{s}$  和时间  $\bar{t}$  的 2 元

$$x_3'' - \gamma(1 + v)\sin^2\vartheta_0x_3 = 0 \quad (13c)$$

其中  $v, \gamma$  为无量纲参数,对于均匀各向同性弹性杆,  $v$  等于泊松比

$$v = \frac{B}{C} - 1, \gamma = \frac{A}{B} \quad (14)$$

将以下指数形式特解代入扰动方程组(13)

$$x_i(\bar{s}) = x_{i0}\exp(\lambda\bar{s}) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (15)$$

导出特征方程

函数. 用点号表示对  $\bar{t}$  的偏导数,在 1 次近似范围内,受扰运动的角速度分量为

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \omega_0^2 \dot{x}_1, \Omega_2 = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \omega_0^2 \sin\vartheta_0 \dot{x}_2, \\ \Omega_3 &= \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \omega_0^2 (\cos\vartheta_0 \dot{x}_2 + \dot{x}_3) \end{aligned} \quad (20)$$

代入动力学方程组(5),利用式(6)将转动惯量用刚度系数表示,导出螺旋杆平衡状态的一次近似动态扰动方程

$$\begin{aligned} & \gamma(1 + v)(x_1'' - \beta\ddot{x}_1) - (1 + v\cos^2\vartheta_0)x_1 - \\ & v\cos\vartheta_0\sin\vartheta_0x_2' + [1 + \gamma(1 + \\ & v)]\sin\vartheta_0x_3' = 0 \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} & (1 + \gamma)\cos\vartheta_0x_1' + \sin\vartheta_0(x_2'' - \beta\ddot{x}_2) + \\ & \gamma\cos\vartheta_0\sin\vartheta_0x_3 = 0 \end{aligned} \quad (21b)$$

$$\begin{aligned} & - [1 + \gamma(1 + v)]\sin\vartheta_0x_1' + \cos\vartheta_0[x_2'' - \\ & 2\beta(1 + v)\ddot{x}_2] + x_3'' - (1 + v)[2\beta\ddot{x}_3 - \\ & \gamma\sin^2\vartheta_0x_3] = 0 \end{aligned} \quad (21c)$$

其中撇号表示对  $\bar{s}$  的偏导数,无量纲参数  $\beta$  定义为

$$\beta = \frac{I\omega_0^2}{S} \quad (22)$$

由于  $\omega_0 = \sin\vartheta_0/R$ , 且  $I \sim r^4, S \sim r^2, r$  为截面的平均半径,则  $\beta \sim (r/R)^2$ . 弹性杆极端细长时  $R \gg r$ ,  $\beta$  为无限小量. 将以下指数形式特解代入方程组(20)

$$x_i(\bar{s}, \bar{t}) = x_{i0}\exp(\lambda\bar{s} + \omega\bar{t}) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (23)$$

导出特征方程

$$\begin{vmatrix} \gamma(1+v)(\lambda^2 - \beta\omega^2) - 1 - v\cos^2\vartheta_0 & -v\lambda\cos\vartheta_0\sin\vartheta_0 & [1 + \gamma(1+v)]\lambda\sin\vartheta_0 \\ (1+\gamma)\lambda\cos\vartheta_0 & (\lambda^2 - \beta\omega^2)\sin\vartheta_0 & \gamma\cos\vartheta_0\sin\vartheta_0 \\ -[1 + \gamma(1+v)]\lambda\sin\vartheta_0 & [\lambda^2 - 2\beta(1+v)\omega^2]\cos\vartheta_0 & \lambda^2 - (1+v)[2\beta\omega^2 + \gamma\sin^2\vartheta_0] \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

由于几何约束条件(17) 同样适用于动态稳定性分析, 空间域特征值  $\lambda$  所确定的弧坐标角频率  $k$  应满足与静态情形相同的条件(18). 将  $\lambda = \pm i$  代入式(24), 仅保留  $\beta$  的一次项, 展开后得到仅含时间变量  $\omega$  的特征方程

$$\omega^2(a\omega^2 + b) = 0 \quad (25)$$

方程的系数为

$$\begin{aligned} a &= \beta[\gamma^2(1+v)(1 + \sin^2\vartheta_0) + 2(1 + v\cos^2\vartheta_0) + \gamma(5 + 4v)] \\ b &= (1 + \gamma)^2 + [1 + \gamma + v\gamma(1 + \gamma + \sin^2\vartheta_0)]\sin^2\vartheta_0 \end{aligned} \quad (26)$$

一般情况下, 泊松比  $v$  为正值, 对于参数  $\omega_0, \vartheta_0, \gamma$  的任意值, 均满足  $a > 0, b > 0$ . 时域特征值  $\omega$  除零根外为纯虚根, 满足一次近似意义下的 Lyapunov 稳定性条件. 从而证明, 弹性杆在松弛状态下的螺旋线平衡无论在空间域或时域均满足 Lyapunov 稳定性条件. 稳定的螺旋形态弹性细杆在自然界中广泛存在, 以上分析可对此作出理论解释. 在式(26)中负泊松比  $v$  有使系数  $b/a$  成为负值的可能性, 提示负泊松比特殊材料的螺旋线平衡可能不稳定<sup>[8]</sup>.

## 参 考 文 献

- 1 Bouchiat C, Mezard MM. Elastic rod model of a supercoiled DNA molecule. *The Europ. Phys. Journ.*, 2000, (E2): 377~402
- 2 刘延柱. 弹性杆基因模型的力学问题. 力学与实践, 2003, 25(1): 1~5 (Liu Yanzhu. Mechanical problems on elastic rod model of DNA. *Mechanics in Engineering*, 2003, 25(1): 1~5 (in Chinese))
- 3 Love AEH. A treatise on mathematical theory of elasticity. 4-th ed., New York: Dover, 1927
- 4 刘延柱. 非圆截面弹性细杆的螺旋线平衡及稳定性. 力学季刊, 2003, 24(4): 433~439 (Liu Yanzhu. Helical equilibrium and stability of a thin elastic rod with noncircular cross-section. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2003, 24(4): 433~439 (in Chinese))
- 5 Liu YZ, Zu JW. Stability and bifurcation of helical equilibrium of thin elastic rod. *Acta Mechanica*, 2004, 167(1-2): 29~39
- 6 刘延柱, 薛纭, 陈立群. 弹性细杆平衡的动态稳定性. 物理学报, 2004, 53(8): 2424~2428 (Liu Yanzhu, Xue Yun. Dynamical stability of equilibrium of thin elastic rod. *Chinese Physics*, 2004, 53(8): 2424~2428 (in Chinese))
- 7 刘延柱, 薛纭. 弹性细杆螺旋线平衡的动态稳定性. 力学季刊, 2005, 26(1): 1~7 (Liu Yanzhu, Xue Yun. Dynamical stability of helical equilibrium of thin elastic rod. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2005, 26(1): 1~7 (in Chinese))
- 8 郝松林. 负泊松比的实验与分析, 力学与实践, 1992, 14(6): 28~31 (Hao Songlin. Experiment and analysis of negative Poisson ratio. *Mechanics in Engineering*, 2003, 25(1): 1~5 (in Chinese))

## STABILITY OF A THIN ELASTIC HELICAL ROD WITH NONCIRCULAR CROSS SECTION IN RELAXED STATE\*

Liu Yanzhu

(*Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China*)

**Abstract** This paper discussed the stability of a thin elastic helical rod with noncircular cross section in relaxed state, i. e. , the stability of a rod with intrinsic curvature and twisting. Based on the Kirchhoff's kinetic analogy, the dynamical equations of the elastic rod were expressed by the Euler's angles. Neglecting the small force of inertia caused by the linear acceleration, only the inertial effect of the rotation of the cross section was considered, which made the Euler's equations closed. We proved that the Lyapunov's stability condition in first approximation was satisfied for the helical rod in relaxed state in the spatial domain, as well as in the time domain. Therefore the extensive and stable existence of a thin elastic rod with helical configuration in the nature can be explained theoretically. It was also noticed that a helical rod with negative Poisson ratio can be unstable.

**Key words** thin elastic rod, Kirchhoff's kinetic analogy, Lyapunov's stability