

一种新的类 Lorenz 系统的混沌行为与形成机制

王琳 倪樵 刘攀 黄玉盈

(华中科技大学力学系, 武汉 430074)

摘要 提出一种新的类 Lorenz 系统,它具有三维二次型的自治常微分方程组形式.理论分析中,应用 Lyapunov 判定方法研究了系统平衡点的稳定性.在此基础上,数值仿真表明,文中所考查的动力学系统具有极其丰富的动力学现象,包括混沌和多种形式的周期运动形式.文中还分析了两个重要参数对系统稳定性的影响,并通过构建一个受控系统分析了系统混沌吸引子的形成机制.

关键词 类 Lorenz 系统,混沌,形成机制,稳定性

引言

1963年, Lorenz^[1]在一个三维自治系统中首次发现了混沌吸引子.自此,多种类型的三维混沌系统受到国内外学者的广泛关注. Smale^[2]在他的一篇文章中指出,二十一世纪将有 18 类极具挑战性的数学问题,其中的 14 类问题与 Lorenz 吸引子相关.因此,对类 Lorenz 系统的研究工作具有广阔的工程应用背景和深远的学术意义.事实上,在最近二十年内,国内外已经发现了一系列的类 Lorenz 系统.针对这些非线性系统,人们研究了其分岔与混沌现象、混沌吸引子结构和混沌产生的条件等^[3~11].

本文提出一种新的类 Lorenz 系统,理论分析了该系统的稳定性,并通过数值计算对该系统的混沌运动及其混沌形成机制进行了分析和研究.

1 一种新的类 Lorenz 系统

本文提出的一种新的类 Lorenz 系统可以用如下的三维自治系统来描述

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = bx - kxz - gx^2 \\ \dot{z} = -cz + hx^2 - dxy \end{cases} \quad (1)$$

其中 a, b, c, d, h, k 和 g 为常数. 在下面的分析中,不失一般性,取 $a = 10, b = 40, c = 2.5, h = 4, k = 1$; d 和 g 可以根据需要选择适当的取值进行后续的理论分析和数值计算.

2 系统的稳定性分析

采用 Lyapunov 方法判断该系统的稳定性. 为求得系统的平衡点,取 $d = 0.4, g = 0.1$,其余参数与前文保持一致. 对于方程(1)所描述的系统,令

$$\begin{cases} a(y - x) = 0, bx - kxz - gx^2 = 0, \\ -cz + hx^2 - dxy = 0 \end{cases} \quad (2)$$

系统具有三个平衡点,分别表示为

$$O(0, 0, 0), P^+(x_0, y_0, z_0), P^-(x_1, y_1, z_1)$$

显然,式(2)是一个非线性的代数方程,对其进行求解可得

$$\begin{aligned} &O(0, 0, 0), P^+(4.739, 4.739, 39.526), \\ &P^-(-4.796, -4.796, 40.480) \end{aligned}$$

对于平衡点,系统(1)需要进行线性化,其对应的 Jacobi 矩阵为

$$J_0 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b - kz - 2gx & 0 & -kx \\ 2hx - dy & -dx & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 \end{bmatrix}$$

为了得到其特征值,令

$$|\lambda I - J_0| = 0$$

求解此方程可以得到与平衡点 O 对应的三个特征值为

$$\lambda_1 = -25.6155, \lambda_2 = 15.6155, \lambda_3 = -2.5$$

由此可见, λ_2 为正实数, λ_1 和 λ_3 为负实数. 因此,平

衡点 $O(0,0,0)$ 是一个不稳定的鞍点.

再分析系统(1)在平衡点 P^+ 和 P^- 的情况. 对于平衡点 P^+ , 其 Jacobi 矩阵可表示为

$$J_+ = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b - kz - 2gx & 0 & -kx \\ 2hx - dy & -dx & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 0.4738 & 0 & -4.739 \\ 36.0164 & -1.8956 & -2.5 \end{bmatrix}$$

令

$$|\lambda I - J_+| = 0$$

由此可以求得平衡点 P^+ 所对应的三个特征值

$$\lambda_1 = -17.4642, \lambda_2 = 2.0082 + j9.4464, \lambda_3 = 2.0082 - j9.4464$$

与零平衡点不同, 此时 λ_1 为负实数, λ_2 和 λ_3 却是两个实部为正的复数. 因此, 平衡点 P^+ 也是一个不稳定的鞍点.

类似的, 可以得到平衡点 P^- 所对应的 Jacobi 矩阵为

$$J_- = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b - kz - 2gx & 0 & -kx \\ 2hx - dy & -dx & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ -0.4792 & 0 & 4.796 \\ -36.4496 & 1.9184 & -2.5 \end{bmatrix}$$

求解方程 $|\lambda I - J_-| = 0$ 可得三个对应的特征值为

$$\lambda_1 = -17.1239, \lambda_2 = 2.7915 + j9.3177, \lambda_3 = 2.7915 - j9.3177$$

此结果表明, 和平衡点 P^+ 类似, λ_1 为负的实数, λ_2 和 λ_3 为两个具有正实部的复数形式.

从前面的分析可以发现, 系统(1)的三个平衡点均为不稳定的鞍点.

3 系统的混沌运动

3.1 典型的混沌运动形态

取初始条件为(2.2, 2.4, 38), 系统(1)可通过龙格-库塔法进行数值模拟. 计算表明, 这一非线性系统可产生复杂而丰富的动力学行为, 包括混沌运动. 图1和2显示了系统的奇怪吸引子. 值得注意的是, 系统(1)所给出的奇怪吸引子与 Lorenz 系统的混沌吸引子有显著的不同. 图3显示了 $x(t)$

在时间域上的波形图; 从该图可以发现, $x(t)$ 的波形图属于非周期的形态.

3.2 系统的耗散性

对于系统(1), 我们可以得到

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = a - c = p$$

若按照前面的参数取值, 即 $a = 10, c = 2.5$, p 将为负值. 此时, 方程(1)描述的是一个耗散系统, 其指数收缩率可写成

$$\frac{dV}{dt} = e^p = e^{-12.5}$$

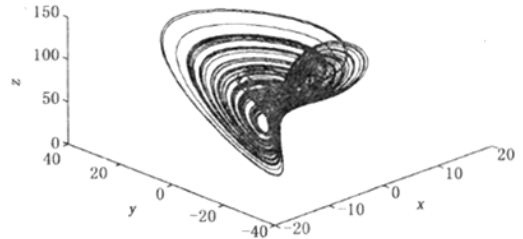
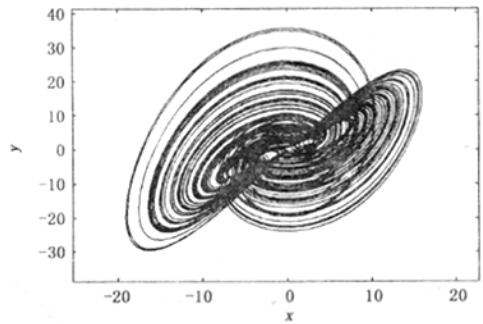
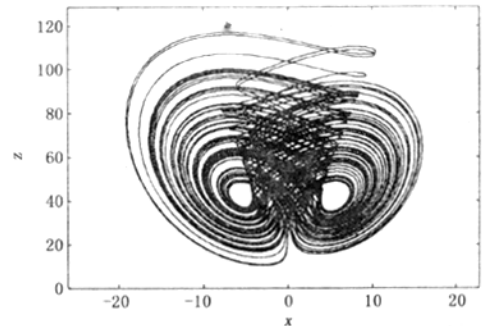


图1 系统(1)奇怪吸引子的三维形状

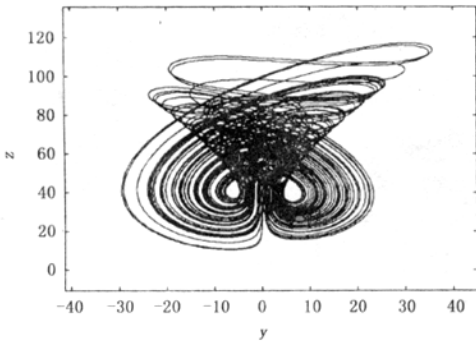
Fig. 1 Three-dimensional view of the strange attractor of system (1)



(a) x-y 相平面
(a) x-y phase plane



(b) x-z 相平面
(b) x-z phase plane



(c) $y-z$ 相平面
(c) $y-z$ phase plane

图 2 系统(1)的奇怪吸引子

Fig.2 The strange attractor of system (1)

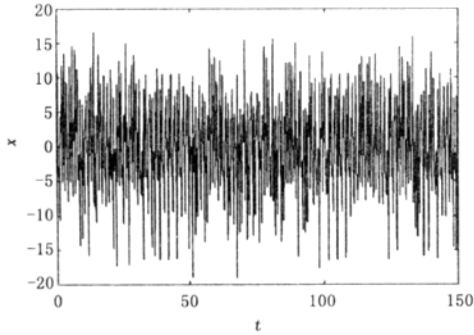


图 3 $x(t)$ 随时间的波形图

Fig.3 Waveform of $x(t)$

因此,在系统(1)中,对于一个体积元 V_0 ,随着时间的变化,它将紧缩到这样的形式 $V_0 e^{pt} = V_0 e^{-12.5t}$. 这表明,当时间趋于无穷大时,每一个含有若干轨线的体积都将以指数速率的形式收缩到零. 因此,动力系统的轨道最终将被限制到一个零体积的子集内,系统的渐进运动最终决定了吸引子的位置.

3.3 两个参数对系统稳定性的影响

在这一节中,将重点分析 g 和 d 两个参数对系统稳定性的影响. 为此,若不作特殊说明,系统参数的取值与前文保持一致. 首先取 $d = 0.4$, 研究当 g 变化时系统的稳定性. 计算表明,当 g 由 0 逐渐增大时, $z(t)$ 的幅值将逐渐增大,这在 $y-z$ 平面内的相图上反映为 $z(t)$ 具有增大的趋势(对比图 2(c)和图 4). 而且,当 g 增大到某一临界值时,系统将出现周期运动形态(图 5). 当 g 由 0 逐渐减小时, $z(t)$

的幅值也将逐渐增大,这在 $y-z$ 平面内的相图上反映为 $z(t)$ 具有增大的趋势(对比图 2(c)和图 6). 类似的,当 g 减小到某一临界值时,系统将出现周期运动的轨线.

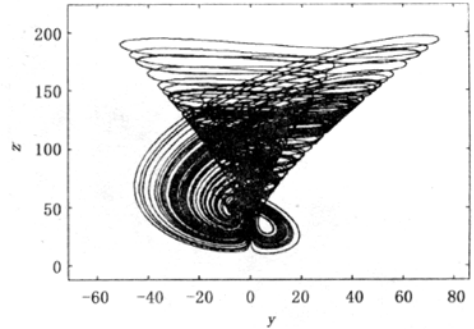


图 4 $g = 1.2$ 时系统(1)的混沌响应

Fig.4 Chaotic response of system (1) for $g = 1.2$

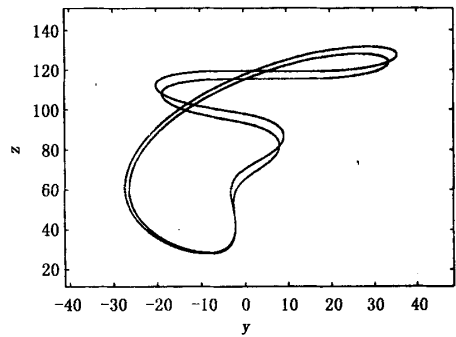


图 5 $g = 1.3$ 时系统(1)的周期响应

Fig.5 Periodic response of system (1) for $g = 1.3$

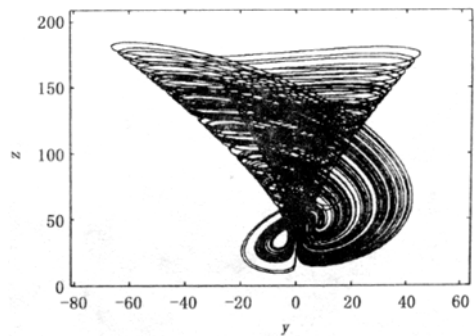


图 6 $g = -1.2$ 时系统(1)的混沌响应

Fig.6 Chaotic response of system (1) for $g = -1.2$

再研究 d 对系统稳定性的影响. 为便于分析,固定 g 的取值为 $g = 0.1$. 数值仿真发现一个有趣的现象,即当 d 由 0 逐渐增大时,系统将由混沌逐

渐变为发散的的运动状态.这一规律与参数 g 变化时的情形完全不同,其典型的相图如图 7 和 8 所示.

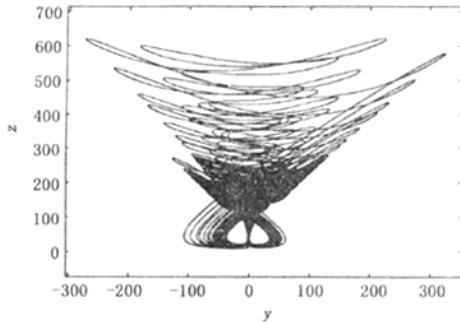


图 7 $d = 1.6$ 时系统(1)的混沌响应

Fig. 7 Chaotic response of system (1) for $d = 1.6$

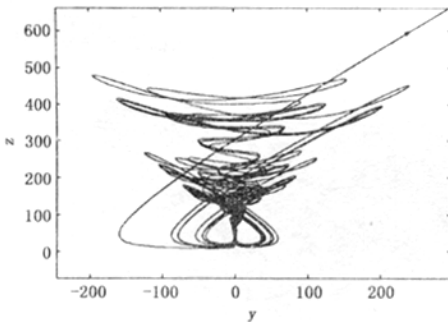


图 8 $d = 1.65$ 时系统(1)的发散运动

Fig. 8 Divergent motion of system (1) for $d = 1.65$

值得一提的是,当 d 和 g 均为零时,系统(1)将退化到文献[9]所描述的非线性系统.此时,系统的两个平衡点 P^+ 和 P^- 关于原点对称,在 $x-z$ 平面内的相图上反映为近乎对称的蝴蝶状轨线(图 9).

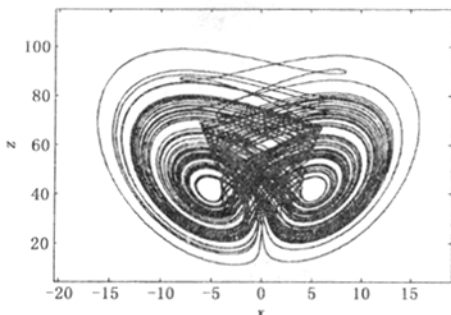


图 9 $d = 0, g = 0$ 时系统(1)的混沌响应

Fig. 9 Chaotic response of system (1) for $d = 0, g = 0$

4 混沌吸引子的形成机制

为了揭示系统(1)所描述的混沌吸引子结构的形成机制,本文提出系统(1)的一种受控系统.

这一受控系统具有如下的微分方程组形式

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= bx - kxz - gx^2 + e \\ \dot{z} &= -cz + hx^2 - dxy\end{aligned}\quad (3)$$

在这一受控系统中, e 为控制参数,它的取值可以在一定范围内进行改变.研究表明,随着参数 e 的变化,系统(3)的混沌行为可以得到有效的控制.数值计算中,初始条件和其它参数的取值与前文保持一致.首先考虑 e 由零逐渐增大的过程.当 $e = 15$, 系统(3)对应的奇怪吸引子如图 10 所示;左右两边的卷形具有明显的不对称性.当 $e = 20$, 系统(3)所对应的奇怪吸引子如图 11 所示;此时,吸引子经过演化变为仅有单边的卷形.继续增大 e 至 $e \approx 39.5$, 奇怪吸引子将演化出倍周期分岔的过程;图 12 显示了系统的周期 8 运动.类似的,研究当 e 为负值的情形.计算表明,当 e 由零逐渐减小时,系统(3)的演化规律与 e 由零逐渐增大的过程是相似的.

由此可见,当 $|e|$ 足够大时,系统(3)的混沌吸引子将消失;当 $|e|$ 足够小时,系统(3)将出现混沌运动的行为;在 $|e|$ 由小变大的过程中,系统(3)的吸引子将由两个卷形状演化为一个卷形状,并最终经由倍周期分岔的过程演化为周期解的形式.

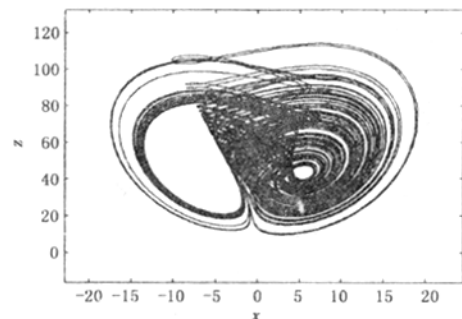
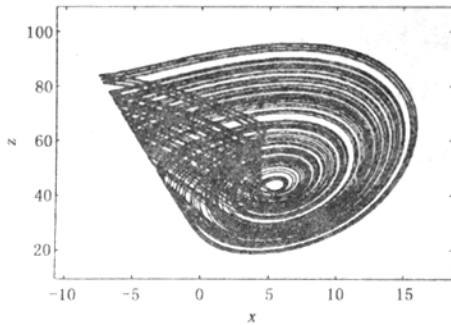
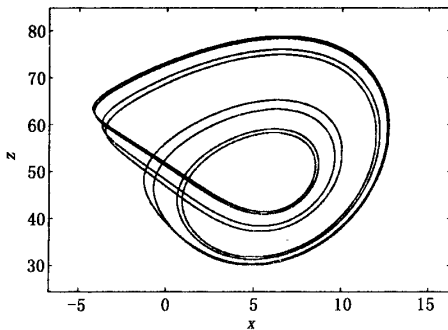


图 10 $e = 15$ 时系统(3)的混沌响应

Fig. 10 Chaotic response of system (3) for $e = 15$

图 11 $e = 20$ 时系统(3)的混沌响应Fig. 11 Chaotic response of system (3) for $e = 20$ 图 12 $e = 39.7$ 时系统(3)的周期 8 运动Fig. 12 Period-8 motion of system (3) for $e = 39.7$

5 结论

本文研究了一种新的类 Lorenz 系统. 这种系统具有极其丰富的动力学行为, 它的奇怪吸引子与 Lorenz 系统具有明显的不同. 文中所提出的这种新的吸引子不仅在电子电路中可以实现, 而且它在保密通信系统中也有广阔的应用前景. 然而, 对于本文所提出的这种类 Lorenz 系统以及其它形式类 Lorenz 系统, 其拓扑结构和混沌诱发机理尚未被充分的揭示和研究. 因此, 针对这些极为重要的类 Lorenz 系统, 国内外的研究工作正处于一个潜在的发展期; 预计在不久的将来, 学术界将会陆续提出

一些研究此类系统的新的理论分析方法与数值仿真手段.

参 考 文 献

- 1 Sparrow C. The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractor. New York: Springer, 1982
- 2 Smale S. Mathematical problems for the next century. Mathematics: Frontiers and Perspectives, 2000, January Issue, 271~294
- 3 Chen G, Ueta T. Yet another chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9:1465~1466
- 4 Ueta T, Chen G. Bifurcation analysis of Chen's attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2000, 10: 1917~1931
- 5 Lü J, Chen G, Zhang S. A new chaotic attractor coined. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12:659~661
- 6 Lü J, Zhou TS, Chen G, Zhang SC. The compound structure of Chen's attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12:855~858
- 7 Lü J, Chen G and Zhang SC. Controlling in between the Lorenz and the Chen systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12:1417~1422
- 8 Leonov GA. Bounds for attractors and the existence of homoclinic orbits in the Lorenz system. *J Appl Math Mechs*, 2001, 65:19~32
- 9 Liu C, Liu T, Liu L, Liu K. A new chaotic attractor. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 22:1031~1038
- 10 Lü J, Chen G, Cheng DZ. A new chaotic system and beyond: the general Lorenz-like system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, 14:1507~1537
- 11 陈关荣, 吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析, 控制与同步. 北京: 科学出版社, 2003 (Chen Guanrong, Lü Jinhui. *Dynamical Analysis, Control and Synchronization of Generalized Lorenz Systems Family*. Beijing: Science Press, 2003 (in Chinese))

CHAOS AND ITS FORMING MECHANISM OF A NEW LORENZ-LIKE SYSTEM

Wang Lin Ni Qiao Liu Pan Huang Yuying

(*Department of Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*)

Abstract This article introduced a new Lorenz-like system of three-dimensional quadratic autonomous ordinary differential equations. For theoretical analysis, the Lyapunov criterion was applied to study the stability of the equilibria of the system. Based on this, numerical simulations indicated that the considered system may display abundant dynamical behaviour, such as chaotic and various periodic motions. Moreover, the effect of two key parameters on the stability of the system was investigated, and the forming mechanism of the chaotic attractor was studied via constructing a controller of the system.

Key words Lorenz-like system, chaotic motion, forming mechanism, stability