

# 重物撞击圆板时的冲击力计算研究

杨立军 吴 晓

(湖南文理学院土木建筑系,常德 415000)

**摘要** 研究了重物对圆板的冲击问题.采用伽辽金原理及拉普拉斯变换推导出了物体对圆板的冲击力解析表达式.通过数值实例,讨论了圆板半径、板厚、缓冲垫刚度、重物下落高度、重物质量等因素对重物对圆板冲击力影响,并绘出了冲击力随时间的变化曲线.算例表明:用该法求冲击力问题,不但比传统的 Hertz 接触理论更接近真实情况,而且计算简便,便于工程设计人员应用.

**关键词** 重物,圆板,冲击力

## 引言

在土木、机械等工程中存在很多重物对结构冲击的问题,因此,研究这类问题对实际工程是有指导意义的<sup>[1]</sup>.重物对结构的冲击大致可分为3类.第1类是可以导致结构破坏的严重冲击;第2类是可能导致较大过载使结构损坏的冲击;第3类是冲击荷载不大,但可能干扰结构预定的工作环境,如在土木工程结构试验中,为防止重物在结构上弹跳或砸损结构,常在结构被冲击的部位放置缓冲垫,将重物提高到一定高度,通过脱钩或剪断绳索的方法使重物自由落到结构上,使结构在弹性冲击荷载作用下产生振动,即采用冲击荷载法来测定桥梁、闸门等结构的动力特性.为了防止重物的冲击对结构造成损坏,必须较精确地计算出重物对结构的冲击力<sup>[2-4]</sup>.关于重物对结构的冲击问题,许多研究是以 Hertz 接触理论为基础的,它并不能代表物体间所有真实接触过程,同时其计算过程复杂繁琐,不便于工程设计人员在实际工程中应用<sup>[5,6]</sup>.本文采用拉普拉斯变换及伽辽金原理研究了重物对放置了缓冲垫圆板的冲击问题,并推导出了冲击力解析表达式,通过实例计算得到了一些有益的结论.

## 1 冲击力近似公式

首先,我们做如下假设:1)假设圆板周边是固定的;2)重物冲击在圆板中心,冲击力可以看成是作用在圆板中心的集中荷载;3)与横向振动相比,

纵向振动可以忽略.

以图1所示圆板为例,假设重物自一定高度  $H$  处对圆板进行冲击.以  $u(t)$  表示重物从它与缓冲垫接触点算起的位移,用  $y(r, t)$  表示圆板在具有初速度物体冲击下的位移.

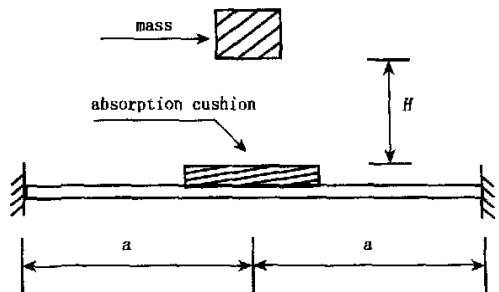


图1 圆板受冲击时的模型

Fig. 1 The model of a circular plate being impacted

在本文中可设

$$y(r, t) = T(t)(1 - \frac{r^2}{a^2})^2 \quad (1)$$

当重物对圆板发生冲击时,重物的位移等于圆板冲击处的位移与缓冲垫压缩量之和,即

$$u(t) = y(0, t) + \frac{N(t)}{k} \quad (2)$$

式中  $N(t)$  为冲击力,  $k$  为缓冲垫的弹性刚度.

以重物为研究对象时,由达朗伯原理有

$$N(t) = Mg - M \frac{d^2 u(t)}{dt^2} \quad (3)$$

以圆板为研究对象时,利用振动理论写出圆板受冲击时的动力控制方程<sup>[7]</sup>

$$\left\{ \frac{D}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} [\nabla^2 y(x, t)] \right] + \rho h \frac{\partial^2 y(r, t)}{\partial t^2} \right\} = \frac{MV\omega^2}{b(r_1^2 - r_2^2)} \left( \frac{\sin r_2 t}{r_2} - \frac{\sin r_1 t}{r_1} \right) \quad (12)$$

$$\frac{N(t)}{2\pi r} \quad (4)$$

式中  $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} (\dots) \right]$ ,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  为圆板的抗弯刚度,  $E$  为圆板的弹性模量,  $\rho$  为材料密度,  $\mu$  为泊松比,  $h$  为圆板的厚度.

把式(1)和式(2)代入式(3)中,得

$$N(t) = Mg - M \left[ \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \frac{1}{k} \frac{d^2 N(t)}{dt^2} \right] \quad (5)$$

利用伽辽金原理可把式(4)化为

$$\int_0^a \left\{ \frac{D}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} (\nabla^2 y) \right] + \rho h \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{N(t)}{2\pi r} \right\} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2 r dr = 0 \quad (6)$$

将式(1)代入式(6)可以得到

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = KN(t) \quad (7)$$

式中  $\omega^2 = 320D/(3\rho ha^4)$ ,  $K = 8/(3\pi\rho ha)$ .

当重物开始接触缓冲垫的瞬间,其速度  $V = \sqrt{2gH}$ .

由式(1),式(2),式(3)可以知道  $t = 0$  时,有

$$T(0) = \frac{dT(0)}{dt} = 0, N(0) = 0, \frac{dN(0)}{dt} = kV \quad (8)$$

利用式(8)对式(7)进行拉普拉斯变换,得

$$L[T(t)] = \frac{KL[N(t)]}{s^2 + \omega^2} \quad (9)$$

利用式(8)对式(5)进行拉普拉斯变换,得

$$L[N(t)] = MV + \frac{Mg}{s} - \frac{Ms^2 L[N(t)]}{k} - Ms^2 L[T(t)] \quad (10)$$

把式(9)代入式(10),并整理得

$$L[N(t)] = - \frac{M(s^2 + \omega^2)(g + V_s)}{s[bs^4 + (b\omega^2 + a + 1)s^2 + \omega^2]} \quad (11)$$

式中  $c = MK$ ,  $b = M/k$ .

再对式(11)进行拉普拉斯逆变换,得

$$N(t) = Mg + \frac{Mg}{b(r_1^2 - r_2^2)} (\cos r_2 t - \cos r_1 t) + \frac{Mg\omega^2}{b(r_1^2 - r_2^2)} \left( \frac{\cos r_1 t}{r_1} - \frac{\cos r_2 t}{r_2} \right) + \frac{MV}{b(r_1^2 - r_2^2)} (r_1 \sin r_1 t - r_2 \sin r_2 t) +$$

式中

$$r_{21} = [(b\omega^2 + c + 1) + \sqrt{(b\omega^2 + c + 1)^2 - 4b\omega^2}] / 2b;$$

$$r_{22} = [(b\omega^2 + c + 1) - \sqrt{(b\omega^2 + c + 1)^2 - 4b\omega^2}] / 2b.$$

式(12)即为图1所示圆板受到重物的冲击时的冲击力计算公式.

## 2 实例计算及讨论

**算例1** 如图1所示,一周边固定的均质钢筋混凝土圆板,混凝土强度等级为C20,弹性模量  $E = 2.55 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,密度  $\rho = 2.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,泊松比  $\mu = 0.2$ ,质量为  $M$  的重物从高度  $H$  处自由落下对圆板进行冲击,冲击点为圆板的中心.

根据式(12),讨论了圆板半径  $a$ 、板厚  $h$ 、缓冲垫刚度  $k$ 、重物下落高度  $H$ 、重物质量  $M$  等因素对重物对圆板冲击力影响,并绘出了冲击力随时间的变化曲线,如图2~图6所示.

**算例2** 如图1所示,一周边固定的由铝合金制成的圆板,圆板半径  $a = 1 \text{ m}$ ,圆板厚  $h = 0.2 \text{ m}$ ,弹性模量  $E = 7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,密度  $\rho = 2.768 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,泊松比  $\mu = 0.33$ ,质量为  $M = 1 \text{ kg}$  的重物从高度  $H$  处自由落下对圆板进行冲击,冲击点为圆板的中心.

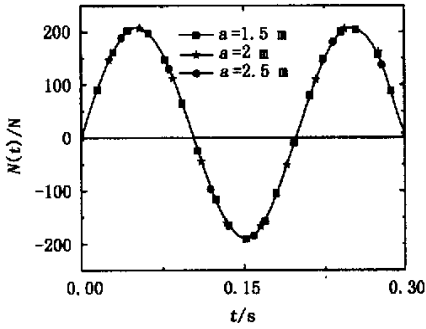
根据式(12),讨论了缓冲垫刚度  $k$ 、重物下落高度  $H$  等因素对重物对圆板冲击力影响,并绘出了冲击力随时间的变化曲线,如图7~图8所示.

对算例2,我们同样分析了圆板半径  $a$ 、板厚  $h$ 、重物质量  $M$  等因素对重物对圆板冲击力影响;同样的,我们对很多种情况进行了计算,得出的冲击力变化规律同图2~图8.限于篇幅,本文没有给出.

对图2~图8进行分析,可以得到如下:

1) 图2和图3中3条曲线基本上重合,这说明圆板半径  $a$  和板厚  $h$  对冲击力的影响很小.

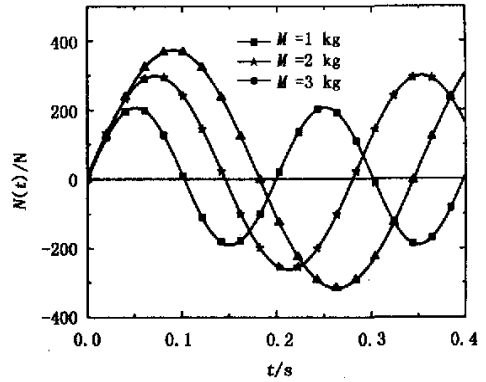
2) 当缓冲垫刚度  $k$  变小时,冲击力峰值也变小,因此为了减弱冲击荷载,在被撞击部位设置缓冲垫是切实可行的.



$k = 1 \text{ kN/m}, H = 2 \text{ m}, M = 1 \text{ kg}, h = 0.1 \text{ m}$

图 2 不同圆板半径的冲击力随时间变化曲线

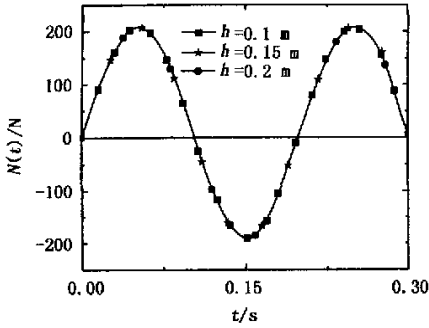
Fig. 2 The curves between impact force and time when the circular plate's radius is different



$k = 1 \text{ kN/m}, H = 2 \text{ m}, a = 2.5 \text{ m}, h = 0.1 \text{ m}$

图 5 不同重物质量的冲击力随时间变化曲线

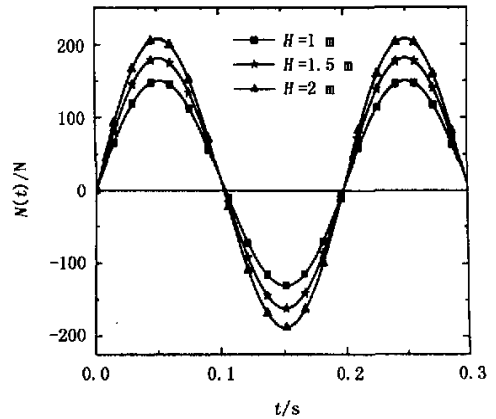
Fig. 5 The curves between impact force and time when the mass's weight is different



$k = 1 \text{ kN/m}, H = 2 \text{ m}, M = 1 \text{ kg}, a = 2.5 \text{ m}$

图 3 不同圆板厚度时冲击力随时间变化曲线

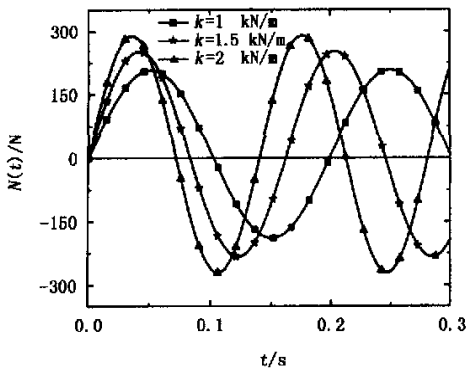
Fig. 3 The curves between impact force and time when the circular plate's thickness is different



$k = 1 \text{ kN/m}, M = 1 \text{ kg}, a = 2.5 \text{ m}, h = 0.1 \text{ m}$

图 6 不同下落高度时冲击力随时间变化曲线

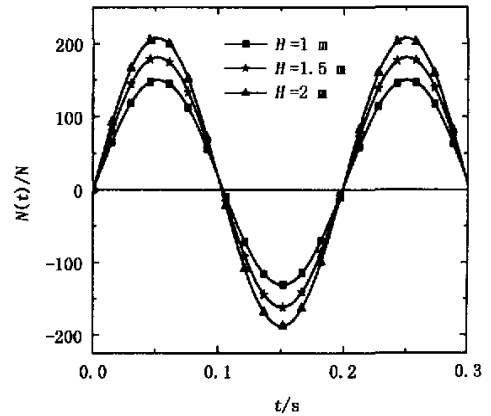
Fig. 6 The curves between impact force and time when the mass drops at different altitude



$H = 2 \text{ m}, M = 1 \text{ kg}, a = 2.5 \text{ m}, h = 0.1 \text{ m}$

图 4 不同缓冲垫刚度时冲击力随时间变化曲线

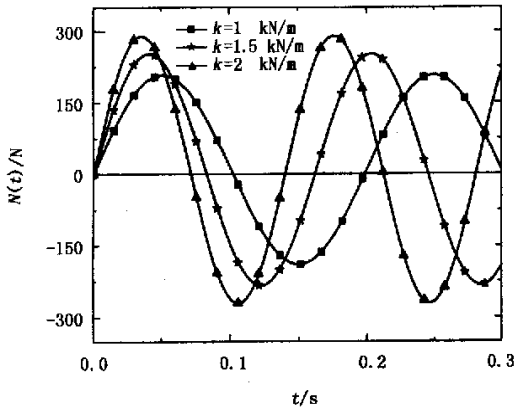
Fig. 4 The curves between impact force and time when the absorption cushion's stiffness is different



$k = 1 \text{ kN/m}, M = 1 \text{ kg}, a = 1 \text{ m}, h = 0.2 \text{ m}$

图 7 不同下落高度时冲击力随时间变化曲线

Fig. 7 The curves between impact force and time when the mass drops at different altitude



$H = 2 \text{ m}, M = 1 \text{ kg}, a = 1 \text{ m}, h = 0.2 \text{ m}$

图8 不同缓冲垫刚度时冲击力随时间变化曲线

Fig.8 The curves between impact force and time when the absorption cushion's stiffness is different

3) 当重物下落高度  $H$ 、重物质量  $M$  及缓冲垫刚度  $k$  变大时,冲击力峰值相应变大,但不同下落高度时冲击力峰值出现的时刻相同,冲击力随时间的变化曲线周期不变,而后两者冲击力峰值和冲击力随时间的变化曲线周期都发生了改变。

从上面的实例计算可以看出,用本文所述方法求冲击力问题,不但比传统的 Hertz 接触理论更接近真实情况,而且计算简便,便于工程设计人员在实际工作中应用。

### 3 结论

1) 由于本文采用了弹性振动理论研究重物对板的弹性冲击问题,因此本文得到的冲击力计算公式完全可以满足实际工程所要求的精度。

2) 在本文实例计算中,质量仅  $1 \text{ kg}$  的重物产生的冲击力就达到  $250 \text{ N}$  左右,所以重物对结构冲击力是非常大的。因而对结构进行检测或对其动力特性进行测定时,一定要对结构采取必要的保护措施,以免损坏结构。

3) 采用冲击荷载法定测定结构的动力特性时,考虑到重物会随结构一起振动,为了避免影响结构动力特性的测定效果,重物质量不可太大。

### 参 考 文 献

- 1 刘理,刘土光,张涛,等.非均匀轴向冲击荷载作用圆柱壳的弹塑性动力屈曲.兵工学报,2002,3(4):508~512 (Liu Li, Liu Tuguang, Zhang Tao, et al. Elastic-plastic dynamic buckling of cylindrical shells under axial non-uniform impact loading. *Acta Armamentarii*, 2002, 23(4): 508~512(in Chinese))
- 2 王延斌,魏雪英,俞茂宏.简支圆板在冲击荷载作用下的塑性动力响应分析.振动工程学报,2003,16(4):435~441 (Wang Yanbin, Wei Xueying, Yu Maohong. Dynamic plastic response analysis of circular plate subjected to impulsive load. *Journal of Vibration Engineering*, 2003, 16(4): 435~441(in Chinese))
- 3 王刚,刘海燕,宁建中.冲击作用下有限长线性硬化杆的动态屈曲.北京理工大学学报,2003,23(2):158~161 (Wang Gang, Liu Haiyan, Ning Jianguo. Dynamic buckling in a rod having finite length due to axial impact. *Transactions of Beijing Institute of Technology*, 2003, 23(2): 158~161(in Chinese))
- 4 盖秉政.论变形固体间的冲击力.哈尔滨工业大学学报,1991,23(5):91~96 (Gai Bingzheng. On the impact force between deformable solids. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 1991, 23(5): 91~96(in Chinese))
- 5 邓梁波,叶天麒.圆板在物体撞击下的非线性动力响应.力学学报,1990,22(4):421~428 (Deng Liangbo, Ye Tianqi. Nonlinear dynamic response of the circular plates under impact of a mass. *Acta Mechanica Sinica*, 1990, 22(4): 421~428(in Chinese))
- 6 Ma GW, Iwasaki S, Miyamoto Y, et al. Dynamic plastic behaviour of circular plate using unified yield criterion. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, 36: 3257~3275.
- 7 Wu SC, Haug EJ. A substructure technique for dynamics of flexible mechanical systems with contact-impact. *Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design*, 1990, 112: 390~398.

## CALCULATION OF CIRCULAR PLATE'S IMPACT FORCE UNDER IMPACT OF A MASS\*

Yang Lijun Wu Xiao

(*Department of Civil and Architectural Engineering, Hunan University of Arts and Science, Changde 415000, China*)

**Abstract** This paper studied a circular plate's impact force under impact of a mass. The formula for the plate's impact force was deduced by using the Galerkin Principle and Laplace Transform. At the same time, the factors that affect the impact force such as the circular plate's radius and thickness, the absorption cushion's stiffness, the altitude of the dropping mass as well as the mass's weight were discussed, and the curves of the impact force versus time were presented for the numerical example. The examples indicated that the above method of calculating the impact force was not only more correct than the conventional contact theory of Hertz, but also more simple and easy to be applied by engineers.

**Key words** mass, circular plate, impact force