

求解强非线性动力系统响应的一种新方法*

孙中奎 徐伟 杨晓丽

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

摘要 将同伦理论和参数变换技术相结合提出了一种可适用于求解强非线性动力系统响应的新方法,即 PE-HAM 方法(基于参数展开的同伦分析技术).其主要思想是通过构造合适的同伦映射,将一非线性动力系统的求解问题,转化为一线性微分方程组的求解问题,然后借助于参数展开技术消除长期项,进而得到系统的解析近似解.为了检验所提方法的有效性,研究了具有精确周期的保守 Duffing 系统的响应,求出了其解析的近似解表达式.在与精确周期的比较中,可以得出:在非线性的强度 α 很大,甚至在 $\alpha \rightarrow \infty$ 时,近似解的周期与原系统精确周期的误差也只有 2.17%.数值模拟结果说明了新方法的有效性.

关键词 PE-HAM 方法,强非线性动力系统,同伦理论,参数展开

引言

在数学、力学、物理学以及工程应用上,对非线性动力系统的研究一直是人们关注的焦点.由于非线性微分方程固有的复杂性,对其进行精确求解很困难,甚至是不能的.因此,对它高精度近似解的研究,一直是中外广大学者一个重要研究课题.目前,包括经典摄动法在内的许多方法^[1,2],例如各种奇异摄动法和平均法等,在动力系统中得到广泛应用,并揭示出大量复杂的动力学现象.由于其对小参数的依赖,使得它们只能适用于弱非线性动力系统,而对于那些不含参数或含有有限参数的所谓强非线性系统,这些方法就显得无能为力.诚然,随着计算机性能的提高,包括龙格-库塔在内的许多数值方法,被移植到动力系统来,但是巨大的计算量,让耗费的时间依旧很长.因此,提出一种新的、不依赖于小参数的解析方法,就显得必要和迫切.

1992年 Liao^[3]在博士论文中首次将同伦理论运用到非线性动力系统中,提出了一种崭新的不依赖于小参数的方法:同伦分析技术(HAM),并用它研究了著名的 Blasius 方程^[4,5],得到了高精度的近似解.随后 He^[6,7]结合摄动法和同伦理论提出了同伦摄动法(HPM).

已有的算例^[3-8],表明同伦理论在求解非线性动力系统响应问题中巨大的应用潜力.

作者进一步拓宽了同伦理论在非线性的动力系统中的应用范围,将同伦理论和参数变换技术相结合提出了一种崭新的方法:基于参数展开的同伦分析技术,即 PE-HAM.通过构造同伦映射,将求解非线性系统的响应问题转化为求解一组线性微分方程,然后将频率的平方 ω^2 进行展开,消除了长期项,得到系统的近似周期解.本文组织如下:第1部分介绍了 PE-HAM 法的基本思想;第2部分研究了保守的 Duffing 振子的响应问题;并在第3部分给出数值模拟.结果表明,在非线性的强度 α 很大,甚至 $\alpha \rightarrow \infty$ 时,零阶近似解与精确解的周期的相对误差也只有 2.17%.

1 PE-HAM 基本思想

为了说明 PE-HAM 法的基本思想,我们考虑具有一般形式的非线性系统

$$L(u) + N(u) = 0 \tag{1}$$

其中 $L(\cdot)$ 为线性微分算子, $L(u)$ 表示系统(1)的线性部分; $N(\cdot)$ 为非线性微分算子, $N(u)$ 表示系统(1)的非线性部分.这里并不要求系统(1)中含有小参数或任何其它类型的参数.

首先,构造同伦映射 $H: x(t) \rightarrow x(t, p, \gamma)$ ^[4-6], 满足

$$H(t, p, \gamma) = (1 - \gamma p)[L(u) - L_0(u_0)] + \gamma p[L(u) + N(u)] \tag{2}$$

2004-12-15 收到第1稿.

* 国家自然科学基金(10472091, 10302036)和陕西省自然科学基金资助项目

这里 $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p \in [0, 1/\gamma]$. 显然, 在 $\gamma \gg 1$ 时 $p \ll 1$.

令 $H(\tau, p, \gamma) = 0$, 得到

$$(1 - \gamma p)[L(u) - L_0(u_0)] + \gamma p[L(u) + N(u)] = 0 \quad (3a)$$

很明显, 在 $p \rightarrow 1/\gamma$ 时, 式(3a)即为原系统(1)式; 在 $p = 0$ 时, 式(3a)即退化为一线性系统. 根据同伦论原理和微分方程解对参数的连续依赖性, 易知: 式(3a)的解 $u(\tau, p)$ 在 $p \rightarrow 1/\gamma$ 时, 连续变化到式(1)的解 $u(t)$. 因为方程(1)是二阶微分方程, 因此很自然地可以对 ω^2 进行展开

$$\omega^2(p) = \omega_0^2 + \omega_1 p + \omega_2 p^2 + \omega_3 p^3 + \dots \quad (4)$$

这个展开式曾被 Veronis^[9], Burton^[10], Burton 和 Rahman^[11], Y · K · Cheung^[12] 和唐驾时^[13] 采用. 引进新的时间尺度

$$\tau = \omega t \quad (5)$$

将式(4)和式(5)代入式(1)中, 得到

$$\dot{L}(u) + \dot{N}(u) = 0 \quad (6)$$

其中 $\dot{L}(u) = L(u(\tau, p))$ 表示系统(1)的线性部分; $\dot{N}(u) = L(u(\tau, p))$ 表示系统(1)的非线性部分. 易知系统(1)和(6)是等价的.

将式(4)和式(5)代入式(3a)中, 得到

$$(1 - \gamma p)[\dot{L}(u) - L_0(u_0)] + \gamma p[\dot{L}(u) + \dot{N}(u)] = 0 \quad (3b)$$

同理, 根据同伦论原理和微分方程的解对参数的连续依赖性, 式(3b)的解 $\hat{u}(\tau, p)$ 在 $p \rightarrow 1/\gamma$ 时, 连续变化到式(6)的解 $\hat{u}(\tau)$.

为了求解式(3b), 我们首先对它进行变形 (deformation)^[3-5]

$$\begin{aligned} & -\gamma(k+1)\dot{L}(u)^{[k]} + (1-\gamma p)\dot{L}(u)^{[k+1]} = \\ & -\gamma(k+1)[\dot{L}(u)^{[k]} + \dot{N}(u)^{[k]}] - \\ & \gamma p[\dot{L}(u)^{[k+1]} + \dot{N}(u)^{[k+1]}] \end{aligned} \quad (3c)$$

这里 $\dot{L}(u)^{[k]} = \frac{\partial^k \dot{L}(u)}{\partial p^k}$, $\dot{N}(u)^{[k]} = \frac{\partial^k \dot{N}(u)}{\partial p^k}$.

在式(3c)中, 令 $p = 0$, 则

$$\begin{aligned} & -\gamma(k+1)\dot{L}(u)^{[k]} + \dot{L}(u_0)^{[k+1]} = \\ & -\gamma(k+1)[\dot{L}(u_0)^{[k]} + \dot{N}(u_0)^{[k]}] \end{aligned} \quad (3d)$$

不难看出在 $k = 0, 1, 2, \dots$ 时, 式(3d)为一组递推的线性微分方程, 根据微分方程理论很容易逐次求解出 $u_0^{[k]}$. 其次将 $\hat{u}(\tau, p)$ 在 $p = 0$ 点进行 Taylor 展开, 并在方程两边取极限 $p \rightarrow 1/\gamma$, 则

$$\begin{aligned} \hat{u}(\tau) &= \lim_{p \rightarrow 1/\gamma} \hat{u}(\tau, p) = \lim_{p \rightarrow 1/\gamma} (u_0 + \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_0^{[k]}}{k!} p^k) = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_0^{[k]}}{k!} \frac{1}{\gamma^k} \end{aligned} \quad (3e)$$

这样我们就把对非线性动力系统(1)的求解问题化为一组线性微分方程的求解问题. 根据(3d)式求解出 $u_0^{[k]}$ 后, 代入(3e)式中, 并由式(5)就可以得到原方程的解.

2 PE-HAM 方法在保守 Duffing 系统中的应用

为了具体地说明这种方法的理想, 我们考虑保守的 Duffing 系统

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + au^3 = 0 \quad (7)$$

u 上的圆点表示对 t 求导, ω_0 为系统的自然频率, a 为非线性项的系数, 这里并不要求 a 为小参数. 把系统(7)表示成算子的形式

$$L(u) + N(u) = 0$$

这里 $L(u) = \ddot{u} + \omega_0^2 u$, $N(u) = au^3$, 并令 $A(u) = L(u) + N(u)$. 下面运用 PE-HAM 方法分成 4 步对系统(7)进行求解.

Step 1 构造同伦映射 $H: x(t) \rightarrow x(t, p, \gamma)$, 满足

$$H(\tau, p, \gamma) = (1 - \gamma p)[L(u) - L_0(u_0)] + \gamma p[L(u) + N(u)] \quad (8a)$$

其中 $L_0(u_0) = \omega_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0$.

Step 2 我们将系统(7)的频率的平方 ω^2 展开如下

$$\omega^2(p) = \omega_0^2 + \omega_1 p + \omega_2 p^2 + \omega_3 p^3 + \dots \quad (9)$$

并令 $\tau = \omega t$

则系统(7)变为

$$\omega^2(p)u'' + \omega_0^2 u + au^3 = 0 \quad (10)$$

u 上的“'”表示对 τ 求导. 为了书写方便, 我们将式(10)写成算子形式, 并仍然令

$$L(u) + N(u) = 0$$

其中 $L(u) = \dot{L}(u) = \omega^2(p)u'' + \omega_0^2 u$, $N(u) = \dot{N}(u) = u^3$.

则(8a)式变为

$$\begin{aligned} H(\tau, p, \gamma) &= (1 - \gamma p)[L(u) - L_0(u_0)] + \\ & \gamma p[L(u) + N(u)] = (1 - \gamma p)[\omega^2(p)u'' + \\ & \omega_0^2 u - (\omega_0^2 u'' + \omega_0^2 u)] + \\ & \gamma p[\omega^2(p)u'' + \omega_0^2 u + u^3] \end{aligned} \quad (8b)$$

Step 3 令 $H(\tau, p, \gamma) = 0$, 则

$$(1 - \gamma p)[\omega^2(p) \dot{u} + \omega_0^2 u - (\omega_0^2 \dot{u}_0 + \omega_0^2 u)] + \gamma p[\omega^2(p) \dot{u} + \omega_0^2 u + u^3] = 0 \quad (11)$$

下面对式(8b) 变形 m 次

$$\begin{aligned} m = 0 \text{ 时} \quad & (1 - \gamma p)[L(u) - L_0(u_0)] = \\ & - \gamma p[A(u)] \\ m = 1 \text{ 时} \quad & - \gamma[L(u) - L_0(u_0)] + (1 - \\ & \gamma p)L(u)^{[1]} = - \gamma[L(u) + N(u)] - \\ & \gamma p[L(u)^{[1]} + N(u)^{[1]}] \\ & \vdots \\ m = k + 1 \text{ 时} \quad & - \gamma(k + 1)[L(u)^{[k]}] + \\ & (1 - \gamma p)L(u)^{[k+1]} = \\ & - \gamma(k + 1)[L(u)^{[k]} + \\ & N(u)^{[k]}] - \gamma p[(u)^{[k+1]} + \\ & N(u)^{[k+1]}] \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (12)$$

根据微分法则, 我们不难得到 $L(u)^{[m]}, N(u)^{[m]}$ 的表达式

$$\begin{aligned} L(u)^{[m]} \\ m = 0 \text{ 时} \quad & L(u) = \omega^2(p) \dot{u} + \omega_0^2 u \\ m = 1 \text{ 时} \quad & L(u)^{[1]} = \omega^2(p) \dot{u}^{[1]} + \omega_0^2 \dot{u} + \\ & \omega^2(p)^{[1]} \dot{u} \\ & \vdots \\ m = k + 1 \text{ 时} \quad & L(u)^{[k+1]} = \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i \omega^2(p)^{[i]} \dot{u}^{[k-i+1]} + \\ & \omega_0^2 \dot{u}^{[k+1]} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} N(u)^{[m]} \\ m = 0 \text{ 时} \quad & N(p) = au^3 \\ m = 1 \text{ 时} \quad & N(p)^{[1]} = 3au^{[1]}u \\ & \vdots \\ m = k + 1 \text{ 时} \quad & N(p)^{[k+1]} = \alpha \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{j=0}^i C_{k+1}^i C_j^i u^{[j]} u^{[i-j]} \times \\ & u^{[k-i+1]}, \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (14)$$

由式(9) 得

$$\omega^2(p)^{[m]} = \begin{cases} \omega_0^2 + \omega_1 p + \omega_2 p^2 + \dots, & m = 0 \\ \sum_{i=0}^m \frac{(m+i)!}{i!} p^i \omega_{m+i}, & m \geq 1 \end{cases} \quad (15)$$

将式(13) ~ 式(15) 代入式(12)

$$\begin{aligned} - \gamma(k + 1)[L(u)^{[k]}] + (1 - \gamma p)L(u)^{[k+1]} = \\ - \gamma(k + 1)[A(u)^{[k]}] - \gamma p[A(u)^{[k+1]}] = \\ - \gamma(k + 1)\left[\sum_{i=0}^k C_{k+1}^i \omega^2(p)^{[i]} \dot{u}^{[k-i]} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \omega_0^2 \dot{u}^{[k+1]} + \alpha \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i C_{k+1}^i C_j^i u^{[j]} u^{[i-j]} \dot{u}^{[k-j]}\right] - \\ \gamma p \left[\sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i \omega^2(p)^{[i]} \dot{u}^{[k-i+1]} + \right. \\ \left. \omega_0^2 \dot{u}^{[k]} + \alpha \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{j=0}^i C_{k+1}^i C_j^i u^{[j]} u^{[i-j]} \dot{u}^{[k-i+1]} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

在上式中令 $p = 0$, 并整理得

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \dot{u}^{[k+1]} + \omega_0^2 u^{[k+1]} = - \gamma(k + 1) \times \\ \left[\alpha \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i C_{k+1}^i C_j^i u_0^{[j]} u_0^{[i-j]} u_0^{[k-j]} \right] - \\ \sum_{i=1}^{k+1} C_{k+1}^i i! \omega_i u_0^{[k-i+1]}, \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (17)$$

显然, 从式(13) ~ 式(15) 及式(17) 我们可以很容易得到任意阶的变形方程.

Step 4 由式(13) ~ 式(15) 及式(17), 可以得到任意阶的变形方程, 为避免繁琐, 在这里我们只取到二阶

$$\begin{cases} \dot{u}_0 + u_0 = 0 \\ u_0^{[1]} + u_0^{[1]} = - \gamma(u_0 + u_0 + \frac{\alpha}{\omega_0^2} u_0^3) - \frac{\omega_1}{\omega_0^2} \dot{u}_0 \\ u_0^{[2]} + u_0^{[2]} = - \gamma \frac{6\alpha}{\omega_0^2} u_0^2 u_0^{[1]} - \gamma \frac{2\omega_1}{\omega_0^2} u_0^{[1]} - \\ \frac{2\omega_2}{\omega_0^2} \dot{u}_0 \end{cases} \quad (18)$$

初始条件: $u_0(0) = a_0, u_0^{[k]}(0) = 0, u_0(0) = a_0, u_0^{[k]}(0) = 0, k \geq 1$.

由初始条件和式(18) 中的第 1 个式子, 可以设零阶近似解为

$$u_0(\tau) = a_0 \cos \tau + b_0 \sin \tau \quad (19)$$

这里 $u_0(0) = a_0, b_0 = 0$.

将式(19) 代入式(18) 中的第 2 式

$$\begin{aligned} u^{[1]} + u_0^{[1]} = - \gamma \left(\frac{\alpha}{\omega_0^2} (a_0 \cos \tau + b_0 \sin \tau)^3 \right) + \\ \frac{\omega_1}{\omega_0^2} (a_0 \cos \tau + b_0 \sin \tau) \end{aligned} \quad (20)$$

消除长期项

$$- \frac{3\alpha a_0^3}{4\omega_0^2} \gamma + \frac{\omega_1}{\omega_0^2} a_0 = 0 \quad (21)$$

求解式(21) 和式(22): $\omega_1 = \frac{3\alpha a_0^2}{4} \gamma - \frac{\lambda}{a_0} \gamma$.

从而原系统(7) 的零阶近似解为

$$u(t) = a_0 \cos \left[t\omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{3aa_0^2}{4} \right)} \right] \quad (22)$$

$$\text{近似周期 } T_{\text{pert}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{3aa_0^2}{4} \right)}}$$

$$\text{原系统具有精确周期 } T = \frac{4}{\sqrt{1 + aa_0^2}} K(\mu).$$

其中 $\mu = \sqrt{\frac{1}{2} aa_0^2 / (1 + aa_0^2)}$, $K(\cdot)$ 为第 1 类椭圆积分. 易得 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{T_{\text{pert}}}{T} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) \frac{1}{K(1/\sqrt{2})} = 0.9783$.

因此, 基于参数展开的同伦分析技术的零阶近似解与系统精确解的周期的相对误差为

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{|T - T_{\text{pert}}|}{T} = 217\%.$$

接下来, 我们求一阶近似解. 在消除了长期项后, 式(20)简化为

$$u_0^{[1]} + u_0^{[1]} = \gamma \left(-\frac{aa_0^3}{4\omega_0^2} + \frac{3aa_0b_0^2}{4\omega_0^2} \right) \cos 3\tau + \gamma \left(-\frac{3aa_0^2b_0}{4\omega_0^2} + \frac{ab_0^3}{4\omega_0^2} \right) \sin 3\tau \quad (23)$$

式(23)的通解为

$$u_0^{[1]}(\tau) = a_1 \gamma \cos \tau + b_1 \gamma \sin \tau + \frac{aa_0^3}{32\omega_0^2} \gamma \cos 3\tau \quad (24)$$

由初始条件可得 $a_1 = -\frac{aa_0^3}{32\omega_0^2}$, $b_1 = 0$.

将式(24)代入式(18)中的第 3 式, 有

$$u^{[2]} + u_0^{[2]} = \left(-\frac{9a}{2\omega_0^2} \gamma^2 a_0^2 a_1 - \frac{3a}{\omega_0^2} \gamma^2 a_0^2 A + \frac{2\omega_1}{\omega_0^2} \gamma^2 a_1 + \frac{2\omega_2}{\omega_0^2} a_0 \right) \cos \tau + \left(\frac{3a}{\omega_0^2} \gamma^2 a_0^2 b_1 + \frac{2\omega_1}{\omega_0^2} \gamma^2 b_1 \right) \sin \tau + \gamma^2 \left(-\frac{3a}{2\omega_0^2} a_0^2 a_1 - \frac{3a}{\omega_0^2} a_0^2 A + \frac{18\omega_1}{\omega_0^2} A \right) \cos 3\tau + \left(-\frac{3a}{2\omega_0^2} \gamma^2 a_0^2 b_1 \right) \sin 3\tau + \left(-\frac{3a}{\omega_0^2} \gamma^2 a_0^2 A \right) \cos 5\tau$$

消除长期项可得

$$-\frac{9a}{2\omega_0^2} \gamma^2 a_0^2 a_1 - \frac{3a}{\omega_0^2} \gamma^2 a_0^2 A + \frac{2\omega_1}{\omega_0^2} \gamma^2 a_1 + \frac{2\omega_2}{\omega_0^2} a_0 = 0 \quad (25)$$

其中 $A = \frac{aa_0^3}{32\omega_0^2}$. 求解(25)式, 可以得到 $\omega_2 =$

$$\frac{1}{2a_0} (9aa_0^2 a_1 + 3aa_0^2 A - 2\omega_1 a_1) \gamma^2.$$

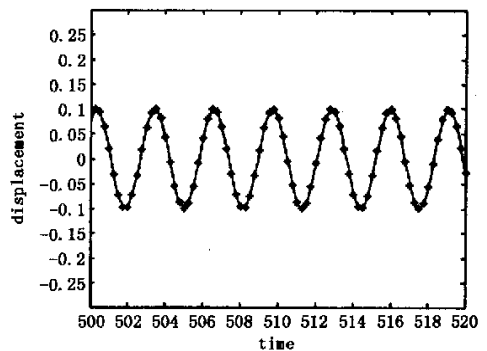
从而原系统(7)的一阶近似解

$$u(t) = a_0 \cos \left[t\omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{3aa_0^2}{4} \right)} \right] - \frac{aa_0^3}{32\omega_0^2} \cos \left[t\omega_0 \times \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{3aa_0^2}{4} + \frac{1}{2a_0} (9aa_0^2 a_1 + 3aa_0^2 A - 2\omega_1 a_1) \right)} \right] + \frac{aa_0^3}{32\omega_0^2} \cos \left[3t\omega_0 \times \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{3aa_0^2}{4} + \frac{1}{2a_0} (9aa_0^2 a_1 + 3aa_0^2 A - 2\omega_1 a_1) \right)} \right] \quad (26)$$

从理论上来说, 我们可以求出任意 m 阶的近似解, 而且随着 m 的增大近似解也越来越逼近系统的精确解. 但是随着 m 的增大, 计算的复杂度也将越来越大. 从第 3 部分数值模拟可以看到, 即便是零阶近似解也具有非常高的精度.

3 数值模拟

在两组参数值下, 我们将用本方法得到的近似解式(22)和式(26)进行了模拟, 并与原系统的四阶龙格-库塔数值解进行了比较. 为了说明非线性强度 α 的影响, 我们取两组初始值进行模拟. 第 1 组: $a_0 = 0.1$, $\omega_0 = 2$, $\alpha = 5$, 图 1 是零阶近似解和数值解模拟图, 图 2 是一阶近似解和数值解模拟图; 第 2 组: $a_0 = 0.1$, $\omega_0 = 2$, $\alpha = 10$, 图 3 是零阶近似解和数值解模拟图; 图 4 是一阶近似解和数值解的模拟图.



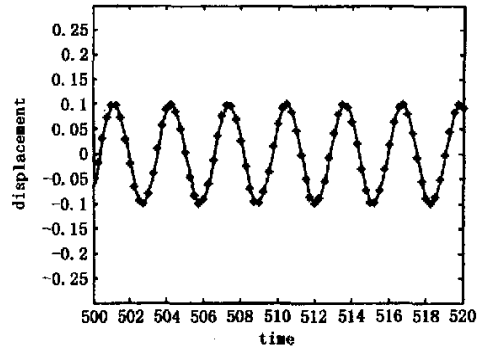
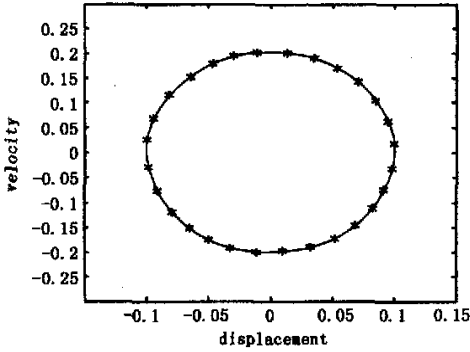


图 1 系统(7) 时间历程图和相轨图

**** 零阶近似解 —— 数值解
 Fig. 1 The time history and the phase plot of Eq. (7)
 **** The zero-th order approximate solution
 —— The numerical solution

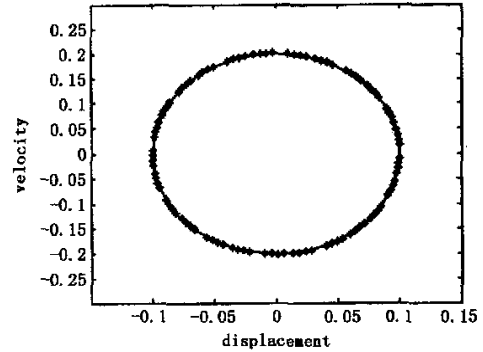
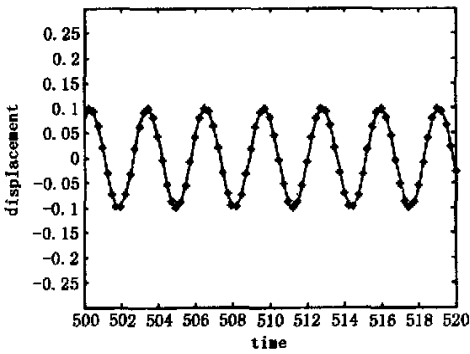


图 3 系统(7) 时间历程图和相轨图

**** 零阶近似解 —— 数值解
 Fig. 3 The time history and the phase plot of Eq. (7)
 **** The zero-th order approximate solution
 —— The numerical solution

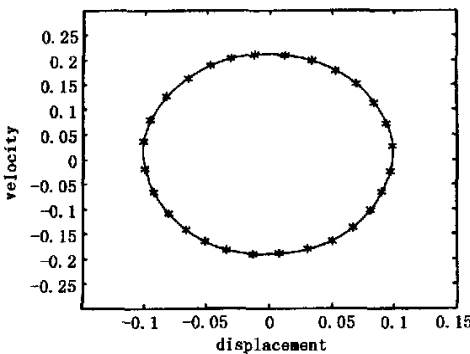
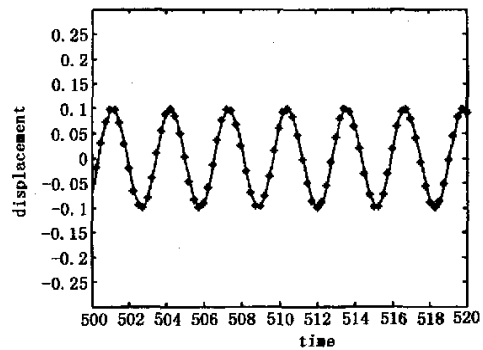


图 2 系统(7) 时间历程图和相轨图

**** 一阶近似解 —— 数值解
 Fig. 2 The time history and the phase plot of Eq. (7)
 **** The zero-th order approximate solution
 —— The numerical solution



为了清晰地显示近似解与数值解的吻合程度, 在上面的时间历程图和相轨图中, 我们只是截取了一段时间轴上的一段, 而在实际的计算中, 作者将 t 已经取到 $[0, 2000]$, 而且近似解与数值解一直吻合的非常好. 在理论推导中显示近似解对初始值和非线性强度具有较强的依赖性, 数值模拟中也显示出近似解对初始值和非线性强度非常敏感, 这与实际问题是相符的.

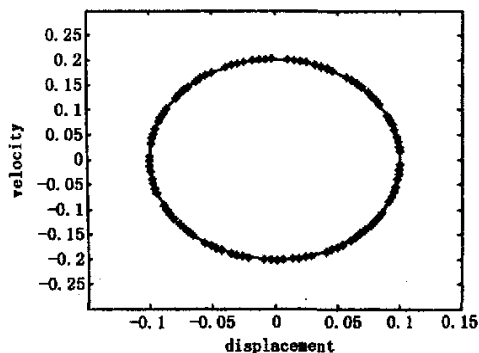


图4 系统(7)时间历程图和相轨图

**** 零阶近似解 —— 数值解

Fig.4 The time history and the phase plot of Eq. (7)

**** The zero-th order approximate solution

—— The numerical solution

4 结论

本文给出了一种基于参数展开的新的同伦分析技术——PE-HAM方法,它通过参数变换和同伦理论将一非线性动力系统(不要求系统内含有小参数)的求解问题转化为一组线性微分方程的求解问题,并将之运用到了强非线性振动领域。

与HAM比较,PE-HAM在3个方面进行了改进:

1)在HAM中需要事先估计初始解,而且初始解的形式对整个方法的精度具有关键性的影响.本文方法,克服了这一点,使得初始解在推导的过程中自然得到,避免了因为初始解估计不当而造成的误差甚至是方法失效.因此PE-HAM是一种自闭合方法;

2)无需将系统的解事先展开成幂级数或者三角级数的形式,本文所有解都是在推导过程中自然得到;

3)可以比较精确地得到系统周期解.适用于求解一大类动力系统的周期响应。

文中研究了保守的Duffing系统的响应问题,得到了零阶近似解和一阶近似解,在与精确周期的比较中,可以得出:在非线性强度 α 很大,甚至在 $\alpha \rightarrow \infty$ 时,零阶近似解的周期与原系统精确周期的误差也只有2.17%。数值模拟的结果,较好的说明了此方法的有效性和精确性.另外,作者用PE-HAM方法也研究了耗散和受迫系统的响应问题以及强非线性随机动力系统的响应问题,都得到了高

精度的解析近似解,限于篇幅,将在后面的文章中详细叙述。

致谢:

感谢方同教授、廖世俊教授富有建设性的意见和建议;感谢国家自然科学基金(编号:10472091、10332030)和陕西省自然科学基金对本文的资助。

参 考 文 献

- 1 Nayfeh AH. Perturbation Methods. New York: John Wiley & Sons Inc, 2000
- 2 Nayfeh AH. Problems in Perturbation Methods. New York: Wiley, 1985
- 3 Liao SJ. The homotopy analysis method and its applications in mechanics. [Ph D Thesis]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University, 1992
- 4 Liao SJ. An explicit, totally analytic approximation of Blasius' viscous flow problems. *Int J Non-Linear Mech*, 1999, 34: 759~778
- 5 Liao SJ. A kind of approximate solution technique which does not dependent upon small parameters(2): an applications in fluid mechanics. *Int J Non-linear Mech*, 1997, 32: 815~822
- 6 He JH. An approximate solution technique depending upon an artificial parameter. *Comm Nonlinear Sci Numer Simu*, 1998, 3(2): 92~97
- 7 He JH. Homotopy perturbation technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineer*, 1999, 178: 257~262
- 8 Liao SJ. A uniformly valid analytic solution of 2D viscous flow past a semi-infinite flat plate. *J Fluid Mech*, 1999, 385: 101~128
- 9 Verovis G. A note on the method of multiple scales. *Q Appl Mech*, 1980, 363
- 10 Burton TD. A perturbation method for certain non-linear oscillators. *Int J Non-linear Mech*, 1984, 397, (19): 70~78
- 11 Burton TD, Rahman Z. On the multi-scale analysis of strongly non-linear forced oscillators. *Int J Non-linear Mech*, 1986, 21(2): 135~146
- 12 Cheung YK, Chen SY, Lan SL. A modified Lindstedt-Poincare Method for certain strongly non-linear oscillators. *Int J Non-linear Mech*, 1991, 26(3): 367~378
- 13 Tang Jiashi. The MLP method for subharmonic and ultraharmonic resonance solutions of strongly nonlinear systems. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, 21(10): 1153~1160

A NEW ANALYTIC APPROXIMATE TECHNIQUE FOR STRONGLY NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS*

Sun Zhongkui Xu Wei Yang Xiaoli

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract A new homotopy technique based on the parameter expansion (PE-HAM) was proposed to strongly nonlinear oscillation. By means of the technique of parameter expansion and the theory of homotopy, we transformed the original non-linear dynamical system into a set of linear differential equations which can be solved easily. This method is a more general one in which the magnitude of the non-linear need not be a small parameter. A typical cubic system in the form of oscillator was employed to show its feature. Not only the zero-th and first-th approximation of the conservative Duffing oscillator but also the approximate period were obtained by the method. The results verify that when α is not a small parameter, even when $\alpha \rightarrow \infty$, the relative error between the exact period and the approximate period exceeds no more than 3%. The analytical results obtained by the method agreed well with the numerical result obtained by the fourth order Runge-Kutta method.

Key words PE-HAM method, strongly nonlinear dynamic system, homotopy theory, parameter expansion