

# van der Pol 系统极限环幅值的时滞控制\*

钱长照 彭 献

(湖南大学工程力学系,长沙 410082)

**摘要** 对含有时滞位移和时滞速度的 van der Pol 方程进行了研究,着重研究了时滞参数对 van der Pol 方程极限环幅值的影响.首先采用摄动法从理论上推导出极限环幅值与时滞参数之间的关系,分析时滞参数对幅值大小的影响,并着重讨论了不改变振动频率情况下对幅值的控制.最后用数值计算的方法验证了理论计算结果,结果表明数值计算结果与理论结果相当吻合.

**关键词** 摄动法,振动控制,时滞动力系统

## 引言

在工程中,许多动力系统可用状态变量随时间演化的微分方程来描述,这其中,有相当一部分动力系统的状态变量存在时间滞后现象,即系统的演化趋势不仅依赖于系统当前的状态,也依赖于系统过去某一时刻或若干时刻的状态.我们将这类动力系统称作时滞动力系统.近年来,时滞动力系统已成为许多研究领域的重要研究对象.在电路、光学、神经网络、生物环境与医学、建筑结构、机械等领域,人们对时滞系统作了大量的研究,取得了许多重要的成果,并巧妙的利用时滞来控制动力系统的行为,如时滞反馈控制已成为控制混沌的主要方法之<sup>[1]</sup>.文[2]从时滞动力系统的特点、研究方法、动力学热点问题出发,对非线性时滞动力系统的研究进展作了综述.

分叉与混沌一直都是非线性动力学研究的重要课题,许多科学工作者在这些方面做了大量的研究,对于混沌的控制研究也取得比较成熟的成果,当前,非线性系统的分叉控制在国际上也正在形成一个专门的、全新的研究方向.分叉控制的主要任务是研究分叉控制理论,提出分叉控制的方法,对具体的工程系统就是设计一个控制器来改变其非线性特性,从而获得需要的动力学行为,Chen G., Moiola J L & Wang H O 对分叉控制的理论、方法和应用前景已经作了详尽的叙述<sup>[3]</sup>.文[4,5]对几种典型的分叉控制进行了研究.文[6,7]对动力系

统的时滞反馈控制进行了研究.

本文研究非线性动力系统

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \epsilon(\mu - \beta x^2)\dot{x} = 0 \quad (1)$$

的时滞反馈控制.事实上,动力系统(1)含有丰富的非线性动力行为,许多科学工作者对其做了研究<sup>[8~10]</sup>.本文研究的目的是设计线性时滞参数,对其系统的主共振分叉响应进行控制.受控动力系统可以描述为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \epsilon(\mu - \beta x^2)\dot{x} = \epsilon[g_p x(t - \tau_1) + g_d \dot{x}(t - \tau_2)] \quad (2)$$

## 1 理论计算

对于系统(2),当  $\epsilon$  为小参数时,由摄动法可得方程(2)的一阶近似解形式

$$x = a \cos(\omega_0 t - \theta) \quad (3)$$

其中  $a$  和  $\theta$  为时间的函数,式(3)对时间求导则可得

$$\dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t - \theta) \quad (4)$$

$$\dot{a} \cos(\omega_0 t - \theta) + a\dot{\theta} \sin(\omega_0 t - \theta) = 0 \quad (5)$$

式(4)再对时间求导则可得

$$\ddot{x} = -\dot{a}\omega_0 \sin(\omega_0 t - \theta) + a\dot{\theta}\omega_0 \cos(\omega_0 t - \theta) - \omega_0^2 a \cos(\omega_0 t - \theta) \quad (6)$$

令  $\psi = \omega_0 t - \theta$ ,将式(3),式(4)和式(6)代入式(2)整理得

$$-\dot{a} \sin \psi + a\dot{\theta} \cos \psi = -\frac{\epsilon}{\omega_0} [(\mu\omega_0 - g_p \sin \omega_0 \tau_1 + g_d \omega_0 \cos \omega_0 \tau_2) a \sin \psi - (g_p \cos \omega_0 \tau_1 +$$

2005-03-08 收到第1稿,2005-04-20 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(10472029)

$$g_d \omega_0 \sin \omega_0 \tau_2) a \cos \psi - \beta a^3 \omega_0 \cos^2 \psi \sin \psi] \quad (7)$$

由式(5)和式(7)得

$$\begin{aligned} a \dot{\theta} = & \frac{\varepsilon}{\omega_0} [(\mu \omega_0 + g_p \sin \omega_0 \tau_1 - g_d \omega_0 \cos \omega_0 \tau_2) \times \\ & a \sin \psi \cos \psi + (g_p \cos \omega_0 \tau_1 + g_d \omega_0 \sin \omega_0 \tau_2) \times \\ & a \cos^2 \psi - \beta a^3 \omega_0 \cos^3 \psi \sin \psi] \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{a} = & -\frac{\varepsilon}{\omega_0} [(\mu \omega_0 - g_p \sin \omega_0 \tau_1 + g_d \omega_0 \cos \omega_0 \tau_2) \times \\ & a \sin^2 \psi - (g_p \cos \omega_0 \tau_1 + g_d \omega_0 \sin \omega_0 \tau_2) \times \\ & a \cos \psi \sin \psi - \beta a^3 \omega_0 \cos^2 \psi \sin^2 \psi] \quad (9) \end{aligned}$$

将方程(8),(9)中右边以 $\psi$ 的一个周期中的平均值近似地代替,则得到原方程的平均化方程

$$\begin{aligned} \dot{a} = & \frac{\varepsilon}{2\omega_0} [(\mu \omega_0 - g_p \sin \omega_0 \tau_1 + g_d \omega_0 \cos \omega_0 \tau_2) a - \\ & \frac{1}{4} \beta \omega_0 a^3] \quad (10) \end{aligned}$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\varepsilon}{2\omega_0} (g_p \cos \omega_0 \tau_1 + g_d \omega_0 \sin \omega_0 \tau_2) \quad (11)$$

因此,受控系统的极限环幅值可以写为

$$a = 2 \sqrt{\frac{\mu \omega_0 - g_p \sin \omega_0 \tau_1 + g_d \omega_0 \cos \omega_0 \tau_2}{\beta \omega_0}} \quad (12)$$

同时考虑式(11)可以发现受控系统稳态振动时频率也受到改变,为了满足只改变极限环幅值的要求,须令

$$g_p \cos \omega_0 \tau_1 + g_d \sin \omega_0 \tau_2 = 0 \quad (13)$$

令

$$g_p \sin \omega_0 \tau_1 - g_d \cos \omega_0 \tau_2 = C \quad (14)$$

则由式(13)和(14)可得

$$g_p^2 + g_d^2 \omega_0^2 + 2g_p g_d \sin \omega_0 (\tau_2 - \tau_1) = C^2 \quad (15)$$

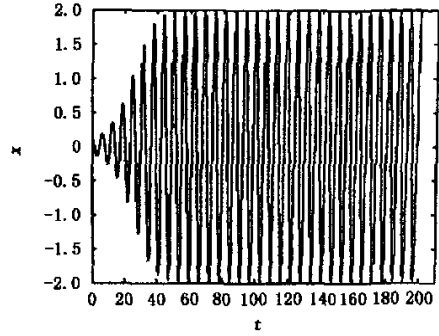
令 $\tau_2 - \tau_1 = \phi$ ,显然当满足不改变频率而只改变极限环幅值时,可得幅值表达式

$$a = 2 \sqrt{\frac{\mu \omega_0 \pm \sqrt{g_p^2 + g_d^2 \omega_0^2 + 2g_p g_d \sin \omega_0 \phi}}{\beta \omega_0}} \quad (16)$$

式中正负符号由式(14)左边符号决定, $\phi$ 值由式(13),(14)决定.可见,当不要求频率保持不变时,可以调节任一滞后参数来满足要求,但当要满足频率保持不变时,则须同时调节两个滞后参数来达到要求.

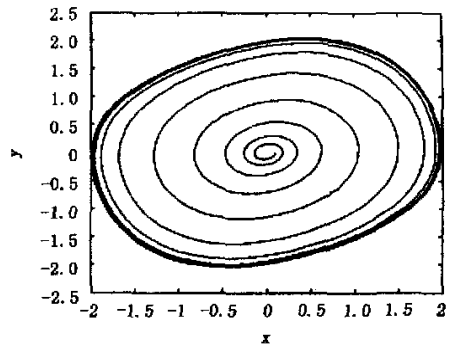
## 2 数值计算

取原系统参数 $\mu = \beta = 1, \omega_0 = 1, \varepsilon = 0.2$ ,则令式(12)中 $g_p = g_d = 0$ 可得原系统极限环幅值 $a = 2$ ,数值求解原系统可得时间历程图及相图如图1所示.



(a) 时间历程图

(a)  $t-x$  curve



(b) 相图

(b)  $x-z$  phase-space trajectories

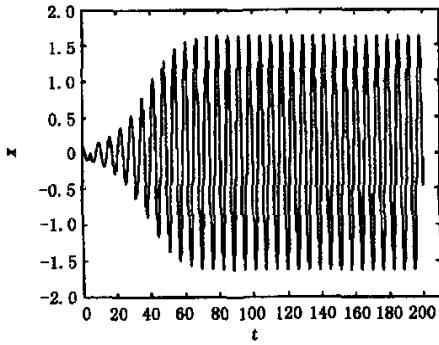
图1 原系统数值解

Fig. 1 Numerical solution of original system

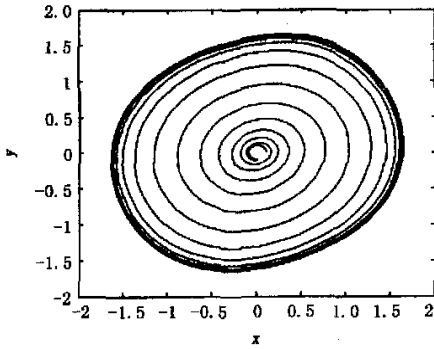
取 $g_p = 0.4, g_d = 0.2, \tau_1 = \frac{\pi}{3}$ ,则若要满足频率不变要求, $\tau_2$ 须满足式(13),即得 $\tau_2 = \frac{3\pi}{2}$ ,幅值 $a = 1.62$ ,数值求解受控系统可得时间历程图及相图如图2所示;取 $\tau_1 = \frac{3\pi}{2}, \tau_2 = 2\pi$ ,则也能满足频率不变要求,幅值 $a = 2.53$ ,数值求解受控系统可得时间历程图及相图如图3所示.

由图2和图3可以看出,通过调节滞后参数可以对幅值良好的控制,同时还可以控制振动频率,

本文只讨论使频率不变的控制,对于其他情况不做讨论.数值结果与理论所得幅值大小相当吻合.



(a) 时间历程图  
(a)  $t-x$  curve

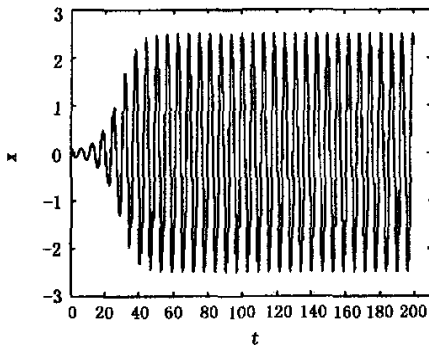


(b) 相图  
(b)  $x-\dot{x}$  phase-space trajectories

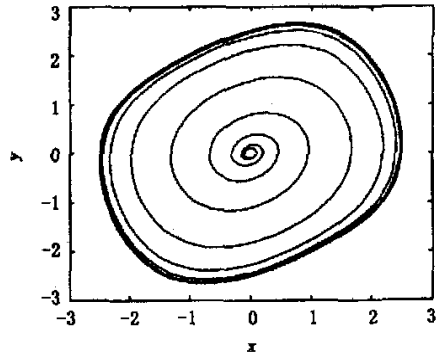
图 2  $\tau_1 = \frac{\pi}{3}, \tau_2 = \frac{3\pi}{2}$  时受控系统数值解

Fig. 2 Numerical solution of controlled system with

$$\tau_1 = \frac{\pi}{3}, \tau_2 = \frac{3\pi}{2}$$



(a) 时间历程图  
(a)  $t-x$  curve



(b) 相图

(b)  $x-\dot{x}$  phase-space trajectories

图 3  $\tau_1 = \frac{3\pi}{3}, \tau_2 = 2\pi$  时受控系统数值解

Fig. 3 Numerical solution of controlled system with

$$\tau_1 = \frac{3\pi}{3}, \tau_2 = 2\pi$$

### 3 结论

本文对含有时滞位移和时滞速度的 van der Pol 方程进行了研究,着重研究了时滞参数对 van der Pol 方程极限环幅值的影响.首先采用摄动法从理论上推导出极限环幅值与时滞参数之间的关系,分析时滞参数对幅值大小的影响,并着重讨论了不改变振动频率情况下对幅值的控制.最后用数值计算的方法验证了理论计算结果,结果表明数值计算结果与理论结果相当吻合.本文首次采用含有两个时滞参数的线性控制器对 van der Pol 方程极限环幅值控制进行了研究,得到了满意的结果,说明时滞系统在振动控制领域有广泛的应用前景.文中研究还表明,时滞控制不仅能控制极限环幅值的大小,同时还可对振动频率进行控制,本文着重讨论了保持频率不变条件下对幅值的控制,至于其他情况有待于进一步的研究.

### 参 考 文 献

- 1 Just W. Mechanism of time-delayed feedback control. *Physical Review Letters*, 1997, 78(2): 203~206
- 2 胡海岩,王在华.非线性时滞动力系统的研究进展.力学进展,1999,29(4): 501~512(Hu Haiyan, Wang Zaihua. Review on nonlinear dynamic systems involving time delays. *Advances in Mechanics*, 1999, 29(4): 501~512(in Chinese))

- 3 Chen G, Moiola JL, Wang HO. Bifurcation control: theories, methods, and application. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 2000, 10: 511~548
- 4 Moiola JL, Colantonio MC, Donate PD. Analysis of static and dynamic bifurcation from a feedback systems perspective. *Dyn Stab Syst*, 1997, 12: 293~317
- 5 Alvarez J, Curiel LE. Bifurcations and chaos in a linear control system with saturated input. *Int J Bifurcation and Chaos*, 1997, 7: 1811~1822
- 6 Hu HY, Wang ZH. Stability analysis of a damped s. d. o. f. system with two time-delays in state feedback. *J of Sound and Vibration*, 1998, 214: 213~225
- 7 Ji JC, Leung AYT. Resonances of a non-linear s. d. o. f. system with two time-delays in linear feedback control. *J of Sound and Vibration*, 2002, 253(5): 985~1000
- 8 徐鉴, 陆启韶. 非自治时滞反馈控制系统的周期解分叉和混沌. *力学学报*, 2003, 35(4): 443~451 (Xu Jian, Lu Qishao. Bifurcations and chaos due to time delay in a delayed control non-autonomous system. *ACTA MECHANICA SINICA*, 2003, 35(4): 443~451 (in Chinese))
- 9 Xu J, Chung KW. Effects of time delayed position feedback on a van der Pol-Duffing oscillator. *Physica D*, 2003, 180: 17~39
- 10 Maccari A. Vibration control for primary resonance of van der Pol oscillator by a time delay state feedback. *Int J Non-linear Mechanics*, 2003, 38: 128~131
- 11 Nayfeh AH, Mook DT. *Nonlinear Oscillations*. New York: John Wiley & Sons, 1978
- 12 Tang JS, Qian CZ. The asymptotic solution of the strongly non-linear Klei-Gordon equation. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 268(5): 1036
- 13 Tang JS, Fu WB, Li KA. Bifurcation of a parametrically excited oscillator with strong nonlinearity. *Chinese Physics*, 2002, 11(10): 1004
- 14 Tang JS. A method for parameter identification of strongly non-linear system. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 232(5): 993

## AMPLITUDE CONTROL OF LIMIT CYCLE IN VAN DER POL SYSTEM WITH TIME DELAYS\*

Qian Changzhao Peng Xian

(Department of Mechanics, Hunan University, Changsha 410082, China)

**Abstract** This paper studied the van der Pol equation with two time delays, particularly the amplitude control of limit cycle in van der Pol system with time delays. The perturbation method was used to obtain the relation equation between amplitude and time-delays. Based on the equation, the controlling of time delays to amplitude were discussed. Then numerical method was utilized to testify theoretic result.

**Key words** perturbation method, bifurcation controlling, dynamics of nonlinear systems involving time delays