

三类保辛摄动及其数值比较*

钟万勰^{1,2} 孙雁²

(1. 大连理工大学工程力学系, 大连 116023)(2. 上海交通大学工程力学系, 上海 200030)

摘要 摄动法近似应当保辛. 本文指出, 有限元位移法自动保辛, 有限元混合能表示也保辛. 摄动法的刚度阵 Taylor 级数展开能证明保辛; 混合能的 Taylor 级数展开摄动也证明了保辛. 但传递辛矩阵的 Taylor 级数展开摄动却不能保辛. 辛矩阵只能在乘法群下保辛, 故传递辛矩阵的保辛摄动必须采用正则变换的乘法. 虽然刚度阵加法摄动、混合能矩阵加法摄动与传递辛矩阵正则变换乘法摄动都保辛, 但这 3 种摄动近似并不相同. 最后通过数值例题给出了对比.

关键词 摄动法, 保辛摄动, 有限元刚度阵摄动法, 混合能矩阵摄动, 传递辛矩阵保辛摄动

1 保辛引论

小参数摄动法是应用数学与力学最常用的近似方法之一^[1-4]. 如所熟知, 保守体系可用 Hamilton 体系描述, 其特点是保辛. 保辛就保持了体系的最重要特性. 冯康指出, 保守体系的差分格式应保辛^[5], 效果甚好. 应指出, 任何保守体系的近似分析皆应保辛. 应用需要求解变系数或非线性问题, 而经常采用的小参数摄动法是 Taylor 级数的加法展开.

如所熟知, 辛矩阵的乘积仍给出辛矩阵, 辛矩阵在其乘法下构成一个群^[6]. 但辛矩阵的加法却不能保证给出辛矩阵. 这简单的事实对于近似分析有指导意义. 要保辛, 就不宜对辛矩阵采用加法. 可是最常用的 Taylor 级数小参数摄动法, 用的就是加法, 辛矩阵加法不能保辛, 但通过正则变换可保辛. 在著作^[4]中曾提过正则摄动理论(Canonical perturbation theory). 正则变换理论的保辛性能是清楚的. 正则变换可通过辛矩阵的乘法来实现, 而且对于初值问题的计算很有效. 但辛矩阵乘法的解, 对于椭圆型方程的两端边值问题可能发生严重的数值病态, 采用初参数法(打靶法^[7] Shooting method)求解时必须注意, 尤其在边界效应区. 如在摄动前(零次近似)的数值计算就有病态, 则在此基础上的摄动就不能成立.

能量代数与分析结构力学的理论指出, 势能原

理、混合能原理及辛矩阵正则变换是同一事物在不同表象中的不同表现形式^[8,9]. 其实结构力学还有余能变分原理等不同形式, 不再讨论. 根据能量代数理论, 3 种形式本来给出相同结果(数值病态除外). 小参数摄动法对这 3 种表象有不同的表现形式. 因摄动是近似法, 即使都采用了保辛摄动, 在不同表象中仍是不同的. 前文^[10]给出了保辛的刚度阵摄动与不保辛的辛矩阵摄动之间的对比, 验证了保辛的重要性. 但辛矩阵也有保辛的摄动法, 即运用正则变换的方法. 本文先证明刚度阵与混合能矩阵的 Taylor 级数展开摄动法是保辛的, 再给出传递辛矩阵的保辛摄动法. 然后对这 3 种保辛摄动做出的数例进行比较.

2 有限元与保辛

单元刚度阵应保持对称性是有限元的常规, 这就是保辛. 单连续坐标弹性体系有限元分析的保辛可表明其关系^[8], 即有限元位移法是自动保辛的. 有限元法解的稳定性、有效性莫基于此基本性质.

辛矩阵的定义是

$$S^T J S = J \tag{1}$$

1) 容易验证 J 与 J_{2n} 皆为辛矩阵.

2) 辛矩阵的转置阵也为辛矩阵. 其证明为将(1)式取逆阵, 有 $S^{-1} J S^{-T} = J$, 左乘 S , 右乘 S^T , 即得 $J = S J S^T$, 证毕.

3) 辛矩阵的逆阵也是辛矩阵.

2005-01-20 收到第 1 稿.

* 国家自然科学基金(10372019)和教育部博士点基金资助项目(20010141024)

4) 二个辛矩阵之乘积仍是辛矩阵. \mathbf{I}_{2n} 是其单位元素.

5) 辛矩阵的乘法就是普通矩阵的乘法, 当然适用结合律

$$(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2) \mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_1 (\mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3) = \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3$$

因此辛矩阵构成一个群.

顺次两个正则变换的作用就是两个辛矩阵的相乘, 依然是辛矩阵, 仍然是正则变换.

这个规则有重要意义, 两个辛矩阵之和不能保辛, 加法不能保辛; 但两个辛矩阵的乘积仍是辛矩阵. 回顾常用的小参数法, 展开为 Taylor 级数之和, 是加法, 故其保辛问题需要认真考虑. 从保辛的角度观察, 传递辛矩阵要用正则变换才好^[8-10].

小参数摄动法常用于非线性系统的分析. 以往一大批差分格式脱离了变分原理, 而是根据微分算子凭经验凑合的, 五花八门而缺乏一般规则. 有限元法则在变分原理的控制下生成单元而保持了保守体系的基本规则, 故自动保辛. 根据分析结构力学的理论, 区段两端状态的关系就是正则变换. 而最小势能原理、混合能变分原理与正则变换辛矩阵的乘法合成是一致的, 见文^[6,8,9]. 然而, 通常有限元常针对线性体系生成; 而非线性有限元就不能用常值刚度阵表示, 其位移法有限元则可采用单元变形能为两端位移的函数这一点来保辛. 本文先对线性系统的摄动法做出分析比较.

3 能量代数

分析动力学要求解初值问题, 是发展型方程, 沿时间坐标的积分是正则变换. 结构力学有限元要求解椭圆型方程, 表现在单连续坐标中是两端边值问题. 最常用的是基于势能原理的位移法有限元; 但采用状态空间法、混合能变分原理积分也有很大优点. 所以分析结构力学的求解有: 势能变分原理、混合能变分原理、和状态空间传递辛矩阵等的方法. 能量代数表明, 这 3 种积分方法是相容的、一致的. 也就是说, 设有相邻区段 (z_a, z_b) , (z_b, z_c) , 分别用下标 1, 2 表示, 它们分别有势能的刚度阵、混合能矩阵和传递辛矩阵

$$\mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa}^{(k)} & \mathbf{K}_{ab}^{(k)} \\ \mathbf{K}_{ba}^{(k)} & \mathbf{K}_{bb}^{(k)} \end{bmatrix}, k = 1, 2,$$

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_k & \mathbf{G}_k \\ -\mathbf{Q}_k & \mathbf{F}_k^T \end{bmatrix}, k = 1, 2,$$

$$\mathbf{S}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11}^{(k)} & \mathbf{S}_{12}^{(k)} \\ \mathbf{S}_{21}^{(k)} & \mathbf{S}_{22}^{(k)} \end{bmatrix}, k = 1, 2 \quad (2)$$

$$\mathbf{S}_{11}^{(k)} = -(\mathbf{K}_{ab}^{(k)})^{-1} \mathbf{K}_{aa}^{(k)},$$

$$\mathbf{S}_{12}^{(k)} = -(\mathbf{K}_{ab}^{(k)})^{-1}$$

$$\mathbf{S}_{21}^{(k)} = \mathbf{K}_{ba}^{(k)} - \mathbf{K}_{bb}^{(k)} (\mathbf{K}_{ab}^{(k)})^{-1} \mathbf{K}_{aa}^{(k)},$$

$$\mathbf{S}_{22}^{(k)} = -\mathbf{K}_{bb}^{(k)} (\mathbf{K}_{ab}^{(k)})^{-1} \quad (3)$$

这些矩阵相互间是可转换的^[6,8-10]. 但还需要考虑区段合并的操作, 也就是积分. 两个区段合并就成为区段 (z_a, z_c) , 表示为

$$(z_a, z_c) = (z_a, z_b) \cup (z_b, z_c) \quad (4)$$

对传递辛矩阵来说

$$\mathbf{S}_c = \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_1 \quad (4')$$

而对于刚度阵、混合能矩阵, 则其区段合并公式可在文^[6]找到. 我们说势能、混合能与传递辛矩阵的积分方法是一致的, 意味着几种积分方法:

1) 区段刚度阵合并而给出的合并区段刚度阵 \mathbf{K}_c , 这是势能原理的表象;

2) 混合能矩阵合并, 给出合并区段混合能矩阵;

3) 传递辛矩阵的乘法, 即将 $\mathbf{K}_k, k = 1, 2$ 转换为 $\mathbf{S}_k, k = 1, 2$; 然后做乘法的区段合并(4'); 再从 \mathbf{S}_c 转换回刚度阵, 得到的仍是 \mathbf{K}_c .

即不同途径的积分方法给出相同的结果, 所以说一致. 混合能表象与势能表象是一致的, 所以也与传递辛矩阵的表象一致. 这个结论是对于精确解而言的. 能量代数表明, 如果 3 种方法都不做任何近似, 则它们给出的结果相同.

分析力学是在质点动力学的架构中发展的, 单连续坐标是时间 t , 沿时间 t 积分时未知数的数目是不变的. 传递辛矩阵的表象也要求未知数不变. 然而势能、混合能表象皆可适应未知数的维数变化的情况, 这在结构力学有限元中是常见的^[6,8]. 故势能、混合能表象积分的涵义更广泛些.

其实即使维数相同, 时间域与空间域还有重要区别. 通常分析动力学时域离散认为是在同一时间离散的. 但结构力学的空间域离散比较随意, 并不必须在同一长度坐标处离散. 只要维数相同, 辛矩阵方法仍然可用.

小参数 ϵ 的摄动只保留 Taylor 级数 ϵ 项本身, 而将 ϵ 的高次项略去, 故是近似解法. 3 种表象的精确解一致并不能保证小参数摄动近似也一致. 回顾

数学分析中的渐近展开^[3]存在的 Stokes 现象. 表明近似法并不唯一. 所以, 分析不同表象的小参数摄动法, 进行比较, 就呈现了其必要性.

4 Hamilton 体系的保辛摄动

摄动法是广泛运用的近似. 保守体系的特点就是保辛, 现在状态空间内讨论. 状态向量为

$$v(z) \stackrel{\text{def}}{=} \{q^T \quad p^T\}^T \quad (5)$$

其中 z 是单连续坐标, q, p 为 n 维对偶向量. 说一个近似解 $\tilde{v}(z)$ 保辛, 意味着存在一个 Hamilton 函数 $\tilde{H}(\tilde{v}, z)$, 使 $\dot{\tilde{v}}(z) = [\tilde{v}, \tilde{H}]$ 满足, 其中方括号是 Poisson 括号. 线性保守体系的方程为

$$\dot{q} = [q, H], \dot{p} = [p, H], \quad (6a)$$

$$\text{或 } \dot{v}(z) = [v, H] \quad (6b)$$

其中 Hamilton 函数可表示为基本部分 $H_0(z)$ 与小量部分 $\epsilon H_1(z)$ 之和

$$H(z) = H_0(z) + \epsilon H_1(z) \quad (7)$$

摄动求解通常是先对一个简单的 $H_0(z)$ 找到全部精确解 q_0, p_0 , 或 v_0 , 即

$$\dot{q}_0 = [q_0, H_0], \dot{p}_0 = [p_0, H_0], \quad (8a)$$

$$\text{或 } \dot{v}_0(z) = [v_0, H_0] \quad (8b)$$

$2n$ 维线性 Hamilton 体系有 $2n$ 个基本解 $v_{0,i}(z)$, $i = 1, \dots, 2n$. 顺次以 $v_{0,i}(z)$ 为列组成矩阵 $S_0(z)$, 初始条件为 $S_0(0) = I_{2n}$. 可证对任意 z , $S_0^T(z)JS_0(z) = J$, 故 $S_0(z)$ 是辛矩阵, $\dot{S}_0(z) = [S_0, H_0]$. 任意初始条件 $v_0(0)$ 的解为

$$v_0(z) = S_0(z)v_0(0) \quad (9)$$

初始条件的 $v_0(0)$ 是常值. 上式运用了线性叠加原理, 所以只适用于线性系统.

Poisson 括号不便于数值计算. 线性 Hamilton 体系的对偶微分方程为^[6]

$$\dot{q}(z) = A(z)q + D(z)p, \quad (10a)$$

$$\dot{p}(z) = B(z)q - A^T(z)p \quad (10b)$$

其中 A, D, B 为 $n \times n$ 矩阵, D, B 对称. 相应的 Hamilton 函数为

$$H(q, p) = p^T D p / 2 + p^T A q - q^T B q / 2 \quad (11)$$

其相应的变分原理为

$$U = \int_{z_0}^{z_1} [p^T \dot{q} - H(q, p)] dz, \delta U = 0 \quad (12)$$

将(10a, b) 写成综合形式

$$\dot{v}(z) = H(z)v(z),$$

$$H(z) = \begin{bmatrix} A & D \\ B & -A^T \end{bmatrix},$$

$$v = \{q^T, p^T\}^T \quad (13)$$

其中 $H(z)$ 是 Hamilton 矩阵, 可是坐标 z 的函数, 即变系数问题. 对应于(7)的划分

$$H(z) = H_0(z) + \epsilon H_1(z) \quad (14)$$

注意 Hamilton 矩阵是可加的. 摄动法认为对于 $H_0(z)$, 系统能精细地求解, 即 $S_0(z)$ 已经求出, 它就是线性体系的完全解. 往往 $H_0(z)$ 是常值矩阵, 可分析求解或精细积分求解, 此时 $S_0(0) = I_{2n}$, $S_0(z) = \exp[H_0 z]$. 如果问题的初始条件是 $v_0(0) =$ 给定, (在发展型方程的范畴内讲述求解, z 为时间), 则有(9)式.

因 $\epsilon H_1(z)$ 是远比 $H_0(z)$ 小的 Hamilton 矩阵, (13~14) 式的 Hamilton 矩阵的方程可用摄动法求解. 注意辛矩阵在乘积下保辛, 故方程(13) 可利用正则变换求解为

$$v(z) = S_0(z) \cdot v_1(z) \quad (15)$$

相当于常数变易法. 代入(13) 有 $\dot{v}(z) = \dot{S}_0(z) \cdot v_1(z) + S_0(z) \cdot \dot{v}_1(z) = [H_0(z) + \epsilon H_1(z)] \cdot S_0(z)v_1(z)$. 因 $\dot{S}_0(z) = H_0(z) \cdot S_0(z)$ 故有 $S_0(z) \cdot \dot{v}_1(z) = \epsilon H_1(z) \cdot S_0(z)v_1(z)$, 再因 $S_0^T(z)JS_0(z) = J$, 故导出

$$\dot{v}_1(z) = \epsilon H'_1(z) \cdot v_1(z),$$

$$H'_1(z) = -JS_0^T(z)JH_1(z) \cdot S_0(z) \quad (16)$$

保辛就是要证明 $H'_1(z)$ 仍是 Hamilton 矩阵, 即 $JH'_1(z)$ 是对称阵. 验证为

$$[JH'_1(z)]^T = [S_0^T(z)JH_1(z) \cdot S_0(z)]^T =$$

$$S_0^T(z)[JH_1(z)]^T \cdot S_0(z) =$$

$$S_0^T(z)JH_1(z) \cdot S_0(z) = JH'_1(z)$$

至此尚未引入近似, 但因 $\epsilon H_1(z)$ 远比 $H_0(z)$ 小, 所以 $\epsilon H'_1(z)$ 也远比 $H_0(z)$ 小. 但 $\epsilon H'_1(z)$ 仍是变系数, 方程难于分析求解. 如果 $H'_1(z)$ 能按(14) 继续分解, 则还可继续再次乘法摄动. $v_1(z)$ 的初始条件为 $v_1(z) = v(0)$.

如果认为 $\epsilon H'_1(z)$ 已经比较小, 则可以寻求(16) 的保辛近似解. 因位移有限元法是自动保辛的, 故可以推荐(其实混合法可能更好). 根据能量代数, 可转换到位移法表象求解. 其手续为

$$a) \text{ 将 } H'_1(z) \text{ 分块为 } H'_1(z) = \begin{bmatrix} A & D \\ B & -A^T \end{bmatrix}.$$

b) 从 A', B', D' 阵计算 Lagrange 函数(势能密度) $L'(q, \dot{q}) = \dot{q}^T K'_{22} \dot{q} / 2 + \dot{q}^T K'_{21} q + q^T K'_{11} q / 2$ 的矩阵, 公式为

$$\begin{aligned} K'_{22} &= D'^{-1}, K'_{21} = -D'^{-1} A', \\ K'_{11} &= B + A'^T K'_{21} \end{aligned} \quad (17)$$

c) 根据变分原理

$$U'(q, \dot{q}) = \int_0^{z_f} L'(q, \dot{q}) dz, \delta U' = 0 \quad (18)$$

此变分原理可用有限元法离散求解, 因有限元离散是自动保辛的^[8]. 边界条件是 $v_1(z) = v(0)$.

保辛近似方法并不唯一. 位移法有限元与混合能法的 Taylor 展开摄动都保辛, 运用传递辛矩阵乘法摄动也保辛. 但它们是不同的, 理论上就有不同. 故相互间的数值比较, 以及进一步的理论分析就很有趣了. 又, 求解非线性系统是时代的要求, 求解微弱非线性系统常用摄动法近似, 以后也需要探讨. 数值探讨要有限元离散, 故下面在离散系统下比较.

5 辛矩阵法的保辛摄动

小参数 ϵ 的摄动法意味着将其高次项忽略. 但从位移法刚度阵到辛矩阵的变换是非线性的. 刚度阵的线性摄动 $K_k = K_{0k} + \epsilon K'_k$, 按式(3)转换到辛矩阵 S_k 就不是 ϵ 的线性变化了. 其逆变换

$$\begin{aligned} K'_{aa} &= -(S_{12}^{(k)})^{-1} S_{11}^{(k)}, \\ K'_{ab} &= -(S_{12}^{(k)})^{-1}, \\ K'_{ba} &= (S_{12}^{(k)})^{-1} S_{22}^{(k)} S_{11}^{(k)} - S_{21}^{(k)}, \\ K'_{bb} &= -S_{12}^{(k)} (S_{22}^{(k)})^{-1} \end{aligned} \quad (19)$$

表明, 如果辛矩阵 S_k 对 ϵ 是线性变化的, 则刚度阵 K_k 就不是线性变化. 混合能与刚度阵或辛矩阵的变换也是非线性的, 其正向与逆向变换分别为

$$\begin{aligned} K_{bb} &= G^{-1}, K_{ba} = -G^{-1} F, \\ K_{aa} &= Q + F^T G^{-1} F, G = K_{bb}^{-1}, \\ F &= -K_{bb}^{-1} K_{ba}, \\ Q &= K_{aa} - K_{ab} K_{bb}^{-1} K_{ba} \end{aligned} \quad (20)$$

结构尺寸优化设计时, 常见刚度阵对 ϵ 的线性变化. 但也有非线性的, 例如梁厚度发生变化等. 总之, 采用小参数 ϵ 的摄动是一种近似.

文[10]给出了一个简单例题, 说明了保辛摄动的重要性. 其中因辛矩阵的摄动未曾保辛, 因采用了传统的 Taylor 级数加法摄动, 故相差很大. 说

明辛矩阵摄动不保辛的效果不好. 但传递辛矩阵方法也可作保辛摄动, 见文[15, 16]. 这是对连续坐标体系讲的, 应将它改造为离散坐标体系的保辛摄动, 该项推导已在文[8] §3.2 给出. 小参数摄动应先求解 $\epsilon = 0$ 的情况, 并用下标 0 标记. $(k-1, k)$ 的区段 k 单元区段刚度阵 K_{0k} 变换为辛矩阵 S_{0k} . 这里直接运用文[8]的符号接着讲. $K_{g0} q_{g0} = f$ 的零次近似是保辛的. 在零次近似基础上的保辛小参数摄动可用正则变换的方法. 将未知状态向量 v_k 表达为

$$v_k = S_{0,0-k} \cdot v_{1k}, k = 0, \dots, m \quad (21)$$

其中 v_{1k} 用代替 v_k 待求. 状态向量用辛矩阵 $S_{0,0-k}$ 前乘, 就是正则变换. 可推导出 v_k 的传递方程

$$v_{1k} = S_{1k} \cdot v_{1,k-1},$$

其中

$$S_{1k} \stackrel{\text{def}}{=} -JS_{0,0-k-1}^T (S_{0k}^T JS_k) S_{0,0-k-1} \quad (22)$$

因 $S_k, S_{0,0-k-1}$ 皆为辛矩阵, 故 S_{1k} 仍为辛矩阵. 再因 S_k 与零次近似的 S_{0k} 之差 $\epsilon S_{k+} = S_k - S_{0k}$ 是小量, 从而

$$\begin{aligned} S_{1k} &= -JS_{0,0-k-1}^T (S_{0k}^T JS_k) S_{0,0-k-1} = \\ &I - \epsilon JS_{0,0-k-1}^T (S_{0k}^T JS_{k+}) S_{0,0-k-1} \end{aligned} \quad (23)$$

故 S_{1k} 与单位阵相差也是一个少量矩阵. 对方程(22) 积分求出 $v_{1k}, k = 1, \dots, m$. 它与单位向量相差一个小量, 就完成了—次保辛的摄动, 这种摄动实际就是正则变换, 并未忽略掉什么.

势能原理对应于刚度阵法, 其 Taylor 展开摄动是保辛的, 公式已在文[10] 给出.

6 串联式结构混合能法分析的总体表示

要比较 3 种摄动分析, 还要先给出混合能结构分析的列式.

小参数 ϵ 的摄动法意味着将其 Taylor 展开的高次项忽略. 注意混合能与刚度阵之间的变换是非线性的, 其正向与逆向变换见式(20). 在结构尺寸优化设计时, 常见刚度阵对 ϵ 的线性变化. 但也有非线性的, 例如梁厚度发生变化等. 即使刚度阵对 ϵ 是线性变化的, 通过变换式(20) 后其混合能矩阵 F, G, Q 也不会对 ϵ 线性变化. 故在一阶线性摄动的范围内, 不同表象之间已经因摄动近似而不全相同.

以下, 对比在刚度阵对 ϵ 为线性变化的条件下

进行。

分析串联式的条形结构,设整个长度由节点 $k = 0, 1, \dots, k_f = m$ 划分为 m 个区段。区段 $\#k$ 的两端为 (z_{k-1}, z_k) , z 为长度坐标。因区段可合并,合并后其长度可由若干段组成,表达为 (z_a, z_b) 。区段 $\#k$ 的势能可表达为

$$U_k(q_a, q_b) = q_a^T K_{aa}^{(k)} q_a / 2 + q_b^T K_{bb}^{(k)} q_b / 2 + q_b^T K_{ba}^{(k)} q_a - f_{a,k}^T q_a - f_{b,k}^T q_b \quad (24)$$

其中下标 a, b 分别代表左,右端 $k-1, k$ 站。结构的最小总势能原理为

$$\min_q \left[\sum_{k=1}^{k_f} U_k(q_{k-1}, q_k) + (q_0 - \hat{q}_0)^T P_0^{-1} (q_0 - \hat{q}_0) / 2 + q_f^T S_f q_f / 2 \right] \quad (25)$$

其中 S_f 与 P_0 分别是右端刚度阵与左端的柔度阵,而 \hat{q}_0 是给定位移值。 \hat{q}_0 代表 0 号站弹性支承的沉陷,弹性支承的刚度阵是 P_0^{-1} 。完成变分运算可导出以下平衡方程

$$K_{ba}^{(k)} q_{k-1} + (K_{bb}^{(k)} + K_{ba}^{(k+1)}) q_k + K_{ab}^{(k+1)} q_{k+1} = f_{b,k} + f_{a,k+1} \quad (26)$$

以上方程是用位移法推出的。变换到混合能($a = k-1, b = k$)

$$V_k(q_{k-1}, p_k) = p_k^T G_k p_k / 2 + p_k^T F_k q_{k-1} - q_{k-1}^T Q_k q_{k-1} / 2 + p_k^T r_{b,k} + q_{k-1}^T r_{a,k} \quad (27)$$

其中 η 是区段长, $F_k(\eta), G_k(\eta), Q_k(\eta)$ 是混合能子矩阵,下标 K 表示这些子矩阵可与区段有关;而 r_{ak} 与 r_{bk} 分别为 $\#k$ 子结构混合能左端的与右端的非齐次项。混合能与势能之间可互相变换,它们的互相关系是勒让德变换^[6]

$$p_b = \partial U_k / \partial q_b = K_{ba}^{(k)} q_a + K_{bb}^{(k)} q_b - f_{b,k}, \\ q_b = F_k q_a + G_k p_b + G_k f_{b,k} \quad (28)$$

其中有变换(20),以及

$$r_{a,k} = f_{a,k} + F_k f_{b,k}, \quad r_{b,k} = G_k f_{b,k} \quad (29)$$

即势能的非齐次项 $f_{a,k}, f_{b,k}$ 与混合能的非齐次项 $r_{a,k}, r_{b,k}$ 是可以互相变换的。若区段 (z_a, z_b) 为 $(k-1, k)$, 则其中 r_{ak} 是 a 端的外力,而 r_{bk} 是 b 端的位移。

$$V_k(q_a, p_b) = \max_{q_b} [p_b^T q_b - U_k(q_a, q_b)],$$

反之

$$\max_{p_k} [p_k^T q_k - V_k(q_{k-1}, p_k)] = U_k(q_{k-1}, q_k), \quad (30)$$

故变换来再变换回去,又回到出发点。这是从理论

方面讲的。

串联式结构的混合能变分原理为

$$\min_q \max_p \left[\sum_{k=1}^{k_f} [p_k^T q_k - V_k(q_{k-1}, p_k)] + q_f^T S_f q_f / 2 + p_0^T (q_0 - \hat{q}_0) - p_0^T P_0 p_0 / 2 \right] \quad (31)$$

其中下标 f 代表 k_f , 执行变分给出对偶方程

$$\delta q_{k-1} : p_{k-1} = \partial V / \partial q_{k-1} = -Q_k q_{k-1} + F_k^T p_k + r_{ak} \\ \delta p_k : q_k = \partial V_k / \partial p_k = F_k q_{k-1} + G_k p_k + r_{bk}, \\ k = 1, \dots, k_f \quad (32)$$

边界方程

$$\delta p_0 : q_0 = P_0 p_0 + \hat{q}_0, \quad \delta q_f : p_f = -S_f q_f \quad (33)$$

混合能变分原理是两类变量 q, p 的变分原理。完成对向量 p_k 的取极大,则又退化到最小总势能原理。用总状态向量,它由维数各为 $(k_f + 1) \cdot m$ 的总位移向量与总对偶向量组成

$$q_g = \{q_0^T \quad q_1^T \quad \dots \quad q_f^T\}^T, \\ p_g = \{p_0^T \quad p_1^T \quad \dots \quad p_f^T\}^T, \\ v_g = \{q_g^T \quad p_g^T\}^T \quad (34)$$

则其总混合能矩阵为, (常截面时 $Q_1, \dots, Q_{k_f} = Q, G_{11} = \dots = G_f = G, F_{11} = \dots = F_f = F$)

$$M_g = \begin{bmatrix} -Q_g & F_g^T \\ F_g & G_g \end{bmatrix}, \\ Q_g = \text{diag}(Q_1, \dots, Q_{k_f}, S_f) \\ G_g = \text{diag}(P_0, G_1, \dots, G_{k_f-1}, G_f), \\ F_g = \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 & 0 \\ F_1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & -I & 0 \\ 0 & 0 & F_f & -I \end{bmatrix} \quad (35)$$

对偶方程组合为

$$M_g v_g = f_g \quad (36)$$

其中

$$f_g^T = \{f_p^T \quad f_q^T\}, \\ -f_p^T = \{r_{a1}^T \quad \dots \quad r_{af}^T \quad 0\}, \\ -f_q^T = \{\hat{q}_0^T \quad r_{b1}^T \quad \dots \quad r_{bf}^T\} \quad (37)$$

按能量代数,混合能表象的结构分析与势能表象的结构分析给出相同结果,故是保守系统的分析。总体混合能矩阵 M_g 是对称的,这是混合能结构分析的特点。即按式(36),有

$$\mathbf{M}_g = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{Q}_f & \\ & & & \mathbf{S}_f \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{F}_1^\top \\ & -\mathbf{I} & \ddots \\ & & \ddots & \mathbf{F}_f^\top \\ & & & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ \mathbf{F}_1 & -\mathbf{I} \\ & \ddots & \ddots \\ & & \mathbf{F}_f & -\mathbf{I} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{G}_1 & \\ & \ddots \\ & & \mathbf{G}_f \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$\mathbf{v}_g = \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_g = \begin{Bmatrix} r_{a1} \\ \vdots \\ r_{af} \\ 0 \\ \hat{q}_0 \\ r_{b1} \\ \vdots \\ r_{bf} \end{Bmatrix}$$

式(36)代表总体的对偶方程。以往此类串联式结构的分析都采用逐级子结构消元之法^[6]。在理论上分析小参数摄动并给出其列式时,仍以总体表达更为清楚。

7 混合能法的小参数摄动

小参数 ϵ 的一次摄动只保留 ϵ 项本身而将 ϵ 的高次项略去, 故是近似解法。不同表象的精确解一致并不能保证小参数摄动近似也一致。回顾数学分析中的渐近展开存在的 Stokes 现象^[3], 已表明近似法并不唯一。所以分析不同表象的小参数摄动法进行比较, 就有其必要性。

在分析混合能小参数一次摄动时, 其总体矩阵与总体向量应表达为:

$$\mathbf{M}_g = \mathbf{M}_{g0} + \epsilon \mathbf{M}_{g1}, \quad \mathbf{v}_g = \mathbf{v}_{g0} + \epsilon \mathbf{v}_{g1} \quad (38)$$

其中总体矩阵 \mathbf{M}_g 是 \mathbf{M}_{g0} 与 $\epsilon \mathbf{M}_{g1}$, 它们具有相同的构造。代入式(36), 并将 ϵ^2 项略去, 给出

$$\epsilon^0: \mathbf{M}_{g0} \mathbf{v}_{g0} = \mathbf{f}_g, \text{ 即}$$

$$\mathbf{v}_{g0} = \mathbf{M}_{g0}^{-1} \mathbf{f}_g \quad (39)$$

$$\epsilon^1: \mathbf{M}_{g0} \mathbf{v}_{g1} = -\mathbf{M}_{g1} \mathbf{v}_{g0} \quad (40)$$

将式(38)代入式(39)有 $\mathbf{v}_{g1} = -\mathbf{M}_{g0}^{-1} \mathbf{M}_{g1} \mathbf{M}_{g0}^{-1} \mathbf{f}_g$, 从而

$$\mathbf{v}_g = (\mathbf{M}_{g0}^{-1} - \epsilon \mathbf{M}_{g0}^{-1} \mathbf{M}_{g1} \mathbf{M}_{g0}^{-1}) \mathbf{f}_g \quad (41)$$

($\mathbf{M}_{g0}^{-1} - \epsilon \mathbf{M}_{g0}^{-1} \mathbf{M}_{g1} \mathbf{M}_{g0}^{-1}$) 为对称阵, 对称阵之逆仍为对称阵。因零次近似的逆矩阵 \mathbf{M}_{g0}^{-1} 与一次近似的逆

矩阵($\mathbf{M}_{g0}^{-1} - \epsilon \mathbf{M}_{g0}^{-1} \mathbf{M}_{g1} \mathbf{M}_{g0}^{-1}$) 皆为对称, 故混合能结构分析的小参数摄动法也保辛。根据恒等式($\mathbf{I} + \mathbf{X}$)⁻¹ = $\mathbf{I} - \mathbf{X} + \mathbf{X}^2(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1}$, 用于 $\mathbf{M}_g^{-1} = (\mathbf{M}_{g0} + \epsilon \mathbf{M}_{g1})^{-1} = \mathbf{M}_{g0}^{-1}(\mathbf{I} + \epsilon \mathbf{M}_{g1} \mathbf{M}_{g0}^{-1})^{-1}$ 。但 \mathbf{M}_g^{-1} 毕竟不等于($\mathbf{M}_{g0}^{-1} - \epsilon \mathbf{M}_{g0}^{-1} \mathbf{M}_{g1} \mathbf{M}_{g0}^{-1}$), 由此可观察到其误差项。

7.1 逐步递推求解

逐级子结构消元之法可见文[6] § 5.9 节, 这是一种递推算法。当然先求解 $\epsilon = 0$ 的情况。根据左端 0 站的边界条件, 边界站提供的变形能为

$$\prod_0(q_0) = (q_0 - \hat{q})^\top \mathbf{P}_0^{-1} (q_0 - \hat{q}_0) / 2 \quad (42)$$

设子结构已经逐步拼装好区段 #($k-1$), 其变形能已经算出为

$$\prod_{k-1}(q_{k-1}) = (q_{k-1} - \hat{q}_{k-1})^\top \mathbf{P}_{k-1}^{-1} (q_{k-1} - \hat{q}_{k-1}) / 2 \quad (43)$$

显然, 其结构右端平衡位移为 \hat{q}_{k-1} , 而其柔度阵为 \mathbf{P}_{k-1} 。下一步要拼装子结构 # k 。拼装完成后, 子结构链的右端就伸展到 k 站, 此时应求出子结构链右端的 \hat{q}_k 以及柔度阵 \mathbf{P}_k 。

理论上可以用最小总势能原理来推导。子结构 # k 的势能表达式为式(24)的 $U_k(q_a, q_b)$, 其中下标 a, b 分别代表左, 右端 $k-1, k$ 站。子结构链直至 # k 的最小总势能原理为

$$\min_{q_{k-1}, q_k} [\prod_{k-1}(q_{k-1}) + U_k(q_{k-1}, q_k)] \quad (44)$$

计算中可以采用混合能(27)的 $V_k(q_a, q_b)$ 。混合能与势能之间的互相关系是勒让德变换(30)。

混合能与势能有关系(30)。将该式并入势能原理(44), 就可转换为

$$\min_{q_{k-1}, q_k} \max_{p_k} [\prod_{k-1}(q_{k-1}) + p_k^\top q_k - V_k(q_{k-1}, p_k)] \quad (45)$$

变分运算给出

$$\delta q_{k-1}: q_{k-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{Q})^{-1} \hat{q}_{k-1} + (\mathbf{P}_{k-1}^{-1} + \mathbf{Q})^{-1} (r_{k-1} + \mathbf{F}^\top p_k)$$

$$\delta p_k: q_k = \mathbf{G} p_k + \mathbf{F} q_{k-1} + r_k$$

$$(\delta q_k: p_k = 0)$$

其中 $r_{k-1} = r_{a,k}$, $r_k = r_{b,k}$ 。将 q_{k-1} 消去, 有

$$q_k = \mathbf{P}_k p_k + \hat{q}_k \quad (46)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{G} + \mathbf{F}(\mathbf{P}_{k-1}^{-1} + \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{F}^\top \quad (47)$$

$$\hat{q}_k = \mathbf{F}(\mathbf{I} + \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{Q})^{-1} \hat{q}_{k-1} + \mathbf{F}(\mathbf{P}_{k-1}^{-1} + \mathbf{Q})^{-1} r_{k-1} + r_k \quad (48)$$

至此,求得了结构右端的 \hat{q}_k 以及柔度阵 P_k . 然后又可以从 k 站向前拼装 $\#(k+1)$ 子结构了. 求得的还不止是 \hat{q}_k, P_k , 它们位于最前端. 还可以求解内部点 $k-1$ 站的位移与柔度阵.

$$\tilde{q}_{k-1} = (I + P_{k-1}Q)^{-1}\hat{q}_{k-1} + P_{k-1}r_{k-1} \quad (49)$$

现在结构的前端已经在 k 站处,所以 $k-1$ 是只落后一个站的内部点.

当然,代替式(43),此时又有

$$\prod_k(q_k) = (q_k - \hat{q}_k)^T P_k^{-1}(q_k - \hat{q}_k)/2$$

这是保留位移变量 q_k 而变分得到的右端势能

$$\prod_k(q_k) = \min_{q_{k-1}} \max_{p_k} [\prod_{k-1}(q_{k-1}) + p_k^T q_k - V_k(q_{k-1}, p_k)]$$

递归的情势很清楚. 到 k_f 站时,运用 $q_f = 0$ 的边界条件(相当于 $S_f = \infty$). 再反过来计算各站的 q_k .

以上可运用于 $\epsilon = 0$ 的计算. 当然在不用摄动法时的直接计算也可以运用.

7.2 逐步递推的摄动

就是要求解方程(40), 设边界条件的 P_0, \hat{q}_0, S_f 的摄动为零. 方程(40)的右端项 $-M_{g1}v_{g0}$ 是已知的,但总体矩阵的数值乘法不方便. 按(36)执行乘法,有

$$\begin{aligned} r_{a,k}^{(1)} &= -Q_k^{(1)}q_k^{(0)} + (F_k^{(1)})^T p_{k+1}^{(0)}, \\ r_{a,f+1}^{(1)} &= -S_f^{(1)}q_f^{(0)} = 0 \\ r_{b,0}^{(1)} &= -P_0^{(1)}p_f^{(0)} = 0, \\ r_{b,k}^{(1)} &= F_k^{(1)}p_{k-1}^{(0)} + G_k^{(1)}q_k^{(0)} \end{aligned}$$

这些都是已知值,可用于组成 $f_g^{(1)}$, 或组成混合能的非齐次项. 所以上一节的递推算法仍然适用. 从而可算出 v_{g1} .

8 混合能矩阵、刚度矩阵摄动与传递辛矩阵保辛摄动的数值比较

虽然势能、混合能的摄动与传递辛矩阵乘法

摄动近似都保辛,但仍有差别,故需数值比较. 现将文[10]的例 2 略作修改,进行 3 种保辛摄动的计算.

算例 设结构由 10 段相同子结构串联组成,区段的刚度矩阵为

$$K_k = \begin{bmatrix} 1 + \epsilon & -1 \\ -1 & 1.5 + \epsilon \end{bmatrix},$$

即

$$K_{0,k} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1.5 \end{bmatrix}, K_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$k = 1, \dots, 10$$

给定两端位移 $q_0 = 3, q_{10} = 0$ 的边界条件,而取外力为零.

对应的混合能法子矩阵为

$$G = (1.5 + \epsilon)^{-1}, F = (1.5 + \epsilon)^{-1},$$

$$Q = 1 + \epsilon - (1.5 + \epsilon)^{-1}, r_{ak} = 0, r_{bk} = 0$$

再按一次摄动转变为

$$G \approx G_0 + \epsilon G_1, F \approx F_0 + \epsilon F_1,$$

$$Q \approx Q_0 + \epsilon Q_1$$

$$F_0 = 2/3, G_0 = 2/3, Q_0 = 1/3;$$

$$G_1 = -4/9, F_1 = -4/9, Q_1 = 13/9$$

对应地传递辛矩阵有

$$S_k = \begin{bmatrix} 1 + \epsilon & 1 \\ 0.5 + 2.5\epsilon + \epsilon^2 & 1.5 + \epsilon \end{bmatrix},$$

$$S_{0k} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}, S_{k+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2.5 + \epsilon & 1 \end{bmatrix},$$

$$k = 1, \dots, 10$$

注意,势能矩阵是基准;传递辛矩阵并未略去 ϵ 的高次项;而混合能矩阵则已略去了 ϵ 的高次项. 选择小参数 $\epsilon = 0.1, \epsilon = 0.2$, 等不同数值,分别用位移刚度阵、混合能矩阵摄动法和传递辛矩阵摄动法计算节点位移,数值结果列于表 1, 2, 3, 比较见图 1 和图 2.

表 1 混合能摄动法、位移摄动法与传递辛矩阵保辛摄动法的数值计算结果(位移) $\epsilon = 0.1, 10$ 段

Table 1 Numerical results(displacement) of mixed energy matrix perturbation, FEM perturbation and transfer matrix symplectic conserved perturbation method, $\epsilon = 0.1, 10$ segments

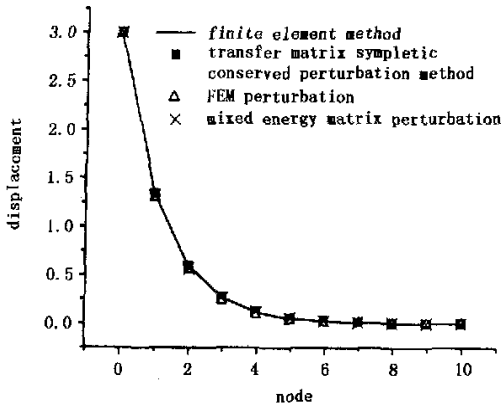
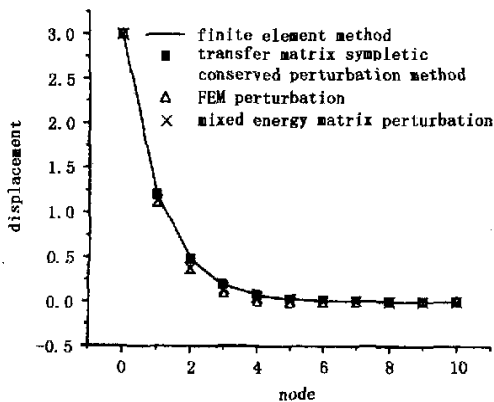
node	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
mixed energy	3.0	1.3194	0.56529	0.26043	0.11912	0.054030	0.024268	0.010769	0.004662	0.001777	0
potential energy	3.0	1.3000	0.55001	0.22503	0.08755	0.031341	0.009534	0.001831	-0.00034	-0.00049	0
symplectic matrix	3.0	1.3292	0.58896	0.26096	0.11562	0.051215	0.022662	0.009972	0.004264	0.001540	0
exact solution	3.0	1.3292	0.58896	0.26096	0.11562	0.051217	0.022666	0.009982	0.004285	0.001587	0

表2 混合能摄动法、位移摄动法与传递辛矩阵保辛摄动法的数值计算结果(位移) $\epsilon = 0.2, 10$ 段Table 2 Numerical results(displacement) of mixed energy matrix perturbation, FEM perturbation and transfer matrix symplectic conserved perturbation method, $\epsilon = 0.2, 10$ segments

node	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
mixed energy	3.0	1.1389	0.38058	0.14589	0.05079	0.014402	0.001844	-0.00153	-0.00166	-0.00084	0
potential energy	3.0	1.1000	0.35004	0.07508	-0.01235	-0.03098	-0.0276	-0.0194	-0.01167	-0.0054	0
symplectic matrix	3.0	1.2000	0.48000	0.19200	0.07680	0.030728	0.012308	0.004965	0.002092	0.00108	0
exact solution	3.0	1.2000	0.48000	0.19200	0.07680	0.030717	0.012280	0.004895	0.001916	0.00061	0

表3 混合能摄动法、位移摄动法与传递辛矩阵保辛摄动法数值计算结果($\epsilon = 0.2, 7$ 段)Table 3 Numerical results(displacement) of mixed energy matrix perturbation, FEM perturbation and transfer matrix symplectic conserved perturbation method, $\epsilon = 0.2, 7$ segments

node	0	1	2	3	4	5	6	7
mixed energy	3.0	1.139312826	0.381493320	0.147497443	0.053318774	0.017930360	0.005765808	0
potential energy	3.0	1.100628763	0.351462038	0.077751656	-0.007659715	-0.023068311	-0.014852668	0
symplectic matrix	3.0	1.199983088	0.479950957	0.191874686	0.076485631	0.029933646	0.010321940	0
exact solution	3.0	1.199983088	0.479950957	0.191874686	0.076485633	0.029933648	0.010321948	0

图1 $\epsilon = 0.1$ 时混合能摄动法、位移摄动法和传递辛矩阵摄动法计算结果比较Fig. 1 Comparison of mixed energy matrix perturbation, FEM perturbation and transfer matrix symplectic conserved perturbation method when $\epsilon = 0.1$ 图2 $\epsilon = 0.2$ 时混合能摄动法、位移摄动法和传递辛矩阵摄动法计算结果比较Fig. 2 Comparison of mixed energy matrix perturbation, FEM perturbation and transfer matrix symplectic conserved perturbation method, when $\epsilon = 0.2$

保辛的辛矩阵摄动给出的数值结果出奇地好,因为它并未忽略掉什么.与精确解的差别是数值问题引起的.应注意,当段数增加到例如15段,则传递辛矩阵摄动就完全失败了.传递辛矩阵本身有数值病态问题.势能摄动与混合能摄动则总能给出总体合理的结果,其中混合能摄动的效果更好些.尤其势能与混合能法可用于维数变化的课题.

当计算段数选择为7时,传递辛矩阵给出的结果几乎与精确解相同.其原因是,传递辛矩阵的摄动无非是进行了一次正则变换而已,并未忽略掉什么.而当段数为7时,数值病态问题并未显示出来.如果有20段子结构做摄动分析,则完全失败了,数值病态摧垮了一切.必须加以注意.传递辛矩阵的摄动法也有其优点,但应小心数值病态问题.将各种方法结合运用方好.

9 结束语

辛是保守体系的特性.有限元单元刚度阵保持对称性,就达到了保辛.本文证明了混合能矩阵也保持对称性,也保辛.传递辛矩阵则在乘法下保辛.摄动是近似,凡保守体系近似方法都应保辛.有限元位移法的常规小参数摄动法是保辛的,混合能的Taylor级数展开摄动也保辛.但传递辛矩阵Taylor级数展开的摄动法却不能保辛.因辛矩阵只在乘法下保辛,而其加法不保辛.然而,传递辛矩阵通过正则变换来摄动也可保辛.从数值结果看,传递辛矩阵的保辛乘法摄动给出了非常好的数值结果,使超

过了位移法摄动与混合能摄动的数值效果.但传递辛矩阵摄动必须注意数值病态问题,况且只能用于等维数的体系.

本文数值例题的选择是带有边界效应性质的,在4号节点之外位移已经接近于零了.传递辛矩阵的保辛摄动是有效的近似.对比前文[10]的不保辛摄动,差别是明显的.凸显出了摄动保辛效果的重要性.

本文由自然科学基金(10372019),教育部博士点基金(20010141024)支持,特此表示感谢.本文也是与科学院自动化所复杂系统与智能科学重点实验室的合作课题.

参 考 文 献

- Morse PM, Feshbach H. *Methods of Theoretical Physics* chapter 9. NY: McGraw-Hill, 1953
- Tsien HS. The Poincare-Lighthill-Kuo method. *Advances in Applied Mechanics*, 1956, 4: 281-349
- Hinch G. *Perturbation method*. London: Cambridge University Press, 1991
- Goldstein H. *Classical mechanics*, 2nd ed., California: Addison-Wesley, 1980
- 冯康, 秦孟兆. Hamilton 体系的辛计算格式. 杭州: 浙江科技出版社, 2004 (Feng K, Qing MZ. *Symplectic geometric algorithm for Hamiltonian systems*. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Press, 2004 (in Chinese))
- 钟万勰. 应用力学对偶体系. 北京: 科学出版社, 2002 (Zhong WX. *Duality system in applied mechanics*. Beijing: Science Press, 2002 (in Chinese))
- Press WH, Teukolsky SA, Vetterling WT, Flannery BP. *Numerical Recipes in C*. London: Cambridge Univ Press, 1992
- 钟万勰. 分析结构力学与有限元. 动力学与控制学报, 2004, 2(3): 1~8 (Zhong WX. *Analytical structural mechanics and finite element*. *J of Dynamics and Control*, 2004, 2(3): 1~8 (in Chinese))
- 钟万勰. 子结构链及 LQ 控制的能量代数. 大连理工大学学报, 1992, 31(6): 635~638 (Zhong WX. *Energy Algebra of substructure chain and LQ control*. *J of Dalian Univ Tech*, 1992, 31(6): 635~638 (in Chinese))
- 钟万勰, 孙雁. 小参数摄动法与保辛. 动力学与控制学报, 2005, 3(1): 1~6 (Zhong WX, Sun Yan. *Small parameter perturbation method and symplectic conservation*. *J of Dynamics and Control*, 2005, 3(1): 1~6 (in Chinese))

NUMERICAL COMPARISON FOR THREE DIFFERENT SYMPLECTIC PERTURBATION METHODS*

Zhong Wanxie^{1,2} Sun Yan²

(1. Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

(2. Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract The perturbation approximation should be symplectic conservative. The FEM displacement method is naturally symplectic conservative, the mixed energy representation is also shown symplectic conservative. The stiffness matrix, as well as the mixed energy matrix, perturbations based on the Taylor series expansion are all proved symplectic conservative. However, the Taylor series expansion perturbation for the symplectic transfer matrix is not able to reach symplectic conservative. The symplectic conservative perturbation for a transfer symplectic matrix should be based on the canonical transformation method. Although, the perturbation methods of the stiffness matrix, of the mixed energy matrix and of the transfer symplectic matrix multiplicative perturbation are all symplectic conservative, however, they are not identical. Therefore, numerical comparison is given for an example.

Key words perturbation method, symplectic conserved perturbation, FEM perturbation, mixed energy matrix perturbation, transfer matrix symplectic conserved perturbation method

Received 20 January 2005.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10372019) and the Doctoral Discipline of the Ministry of Education, China(20010141024)