

GDQR 法用于输流曲管的流致振动研究*

王琳 倪樵 黄玉盈

(华中科技大学力学系, 武汉 430074)

摘要 将广义微分求积法(GDQR)用于分析输流曲管的流致振动问题,这是一个新的尝试.基于输流曲管的面内振动微分方程,利用GDQR法使曲管系统在空间域上得以离散化,从而获得了输流曲管的动力学方程组.数值算例中,计算得到了输流曲管在几种典型边界条件下的固有频率以及曲管发生失稳的临界流速等,这些计算结果与前人的解析解结果吻合较好.此外,还给出了两端固定输流曲管典型的动力响应行为.研究表明,GDQR法极易处理输流曲管这一类动力学模型,精度令人满意,进一步的研究可望推广到输流管道的非线性振动分析中.

关键词 输流曲管,广义微分求积法,临界流速,固有频率,动力响应

引言

输流管的振动与稳定性问题,一直是结构动力学问题研究的热点之一.这不仅是因为它具有较高的学术研究价值,而且还有着广阔的工程应用背景.著名管道动力学专家 Paidoussis 曾经指出输流管将成为结构动力学模型的一个新典范^[1].有关这方面的研究动态与现状,文献[1,2]已经作了详尽的评述.输流曲管不同于输流直管,其分析难度较大,由此人们提出了很多分析方法来研究这一动力学模型. Chen^[3,4]用解析法对圆弧形输流曲管的稳定性进行了分析,给出了输流曲管的临界流速和固有频率,他还研究了曲管系统的某些参数对结构稳定性的影响. Misra 等人^[5]采用一种具有复杂形函数的有限元法对输流曲管的临界流速进行了计算.但是,他们在形成单元刚度矩阵时需要大量的数值积分运算,计算准备的时间也较长. Huang 等人^[6]提出一种新的传递矩阵法求解了输流曲管的稳定性问题,该法对于具有中间弹性支承曲管模型比较容易处理.最近几年,微分求积法(DQM)被推广应用到输流管的振动分析之中^[7,8],但这种方法需要在管道的边界处增添适当的邻接网点划分,用以施加边界条件.因此,这种边界条件的处理具有一定的近似性.不仅如此,DQM对于阶数较高的偏微分方程而言,其收敛性相对较差. GDQR法也是一种

用于求解边值/初值问题的有效的数值方法.但它不同于DQM,该方法无需在边界处添加邻接网点划分,模型的边界条件能精确的得以施加,理论上可以求解更高阶的偏微分方程,能以少量的计算工作量给出满足工程要求的解,目前该法已成功用于多种工程结构问题的求解^[9,10].本文首次将GDQR法推广到分析输流曲管这一类结构的流致振动问题中去.实例表明,该方法的计算结果与前人的解析解相比,精度较高,且计算效率非常高,极易处理输流曲管这一类力学模型.

1 输流曲管的控制方程和边界条件

考虑如图1所示的输流曲管模型,对于中心线不可伸缩的面内振动,曲管无量纲形式的控制方程为^[3]

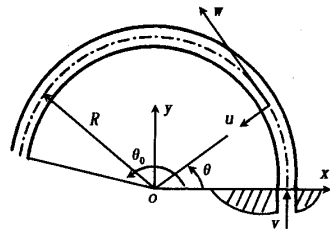


图1 输流曲管示意图

Fig. 1 A curved pipe conveying fluid

2004-12-01 收到第1稿,2005-01-12 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10272051)

$$\frac{\partial^6 \xi}{\partial \theta^6} + (2 + v^2) \frac{\partial^4 \xi}{\partial \theta^4} + (1 + 2v^2) \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + v^2 \xi + 2\beta^{\frac{1}{2}} v \frac{\partial^4 \xi}{\partial \tau \partial \theta^3} + 2\beta^{\frac{1}{2}} v \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial \theta} + \frac{\partial^4 \xi}{\partial \tau^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = 0 \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} \xi &= w/R, \beta = m_f/(m_f + m_p), \\ v &= (m_f/EI)^{1/2} RV, \\ \tau &= [EI/(m_f + m_p)]^{1/2} t/R^2 \end{aligned}$$

分别表示输流曲管的无量纲切向位移、质量比、无量纲流速和时间; w 为曲管中心线上任意一点的切向位移, R 为曲管半径, EI 为曲管的有效刚度系数, V 为曲管内部流速, m_p 和 m_f 分别为曲管和流体单位长度的质量, θ 为曲管中心线上任意一点的角坐标, t 为时间。

设 θ_0 为曲管的张角, 则对于两端简支的曲管, 其边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \xi(\theta, \tau) &= 0 \\ \text{在 } \theta = 0 \text{ 和 } \theta = \theta_0 \text{ 处, } \eta(\theta, \tau) &= 0 \\ \partial^3 \xi(\theta, \tau)/\partial \theta^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

对于两端固定的曲管, 其边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \xi(\theta, \tau) &= 0 \\ \text{在 } \theta = 0 \text{ 和 } \theta = \theta_0 \text{ 处, } \eta(\theta, \tau) &= 0 \\ \partial \eta(\theta, \tau)/\partial \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

对于一端固定且另一端简支的曲管, 其边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \xi(\theta, \tau) &= 0 \\ \text{在 } \theta = 0 \text{ 处, } \eta(\theta, \tau) &= 0 \\ \partial \eta(\theta, \tau)/\partial \theta &= 0 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} \xi(\theta, \tau) &= 0 \\ \text{在 } \theta = \theta_0 \text{ 处, } \eta(\theta, \tau) &= 0 \\ \partial^3 \xi(\theta, \tau)/\partial \theta^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2 GDQR 法的实施

为了求解给定边界条件的高阶微分方程, GDQR 法具有如下的形式^[11]

$$\frac{d^r \psi(x_i)}{dx^r} = \sum_{j=1}^N \sum_{l=0}^{n_j-1} E_{ijl}^{(r)} \psi_j^{(l)} = \sum_{k=1}^M E_{ik}^{(r)} U_k \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

其中 N 是网点数, $n_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 是所在网点处所需方程的数目; $\psi_i^{(0)} = \psi(x_i) = \psi_i$ 是函数值, $\psi_i^{(k)} = \psi^{(k)}(x_i) (k = 1, 2, \dots, n_i - 1)$ 表示其对应的导数值; $E_{ik}^{(r)} (E_{ijl}^{(r)}$ 的简化形式) 是在网点 x_i 处第 r 阶求导的权系数; $M = \sum_{i=1}^m n_i$ 为所有网点处方程数目的总和, 对于所有独立的位移变量可以写成如下形式

$$\begin{aligned} \{U\}^T &= \{U_1, U_2, \dots, U_k, \dots, U_M\} = \\ &\{\psi_1^{(0)}, \psi_1^{(1)}, \dots, \psi_1^{(n_1-1)}, \dots, \psi_N^{(0)}, \psi_N^{(1)}, \dots, \psi_N^{(n_N-1)}\} \end{aligned} \quad (6)$$

从上式可以看出 GDQR 法与 DQM 的区别所在, 即前者采用的独立变量不仅包含各网点处的函数值, 还含有函数的导数值; 后者所采用的独立变量只有各网点处的函数值。因此, 如果将 $n_i = 1 (i = 1, 2, \dots, N)$ 代入式(5), GDQR 法就变成了 DQM 的形式

$$\frac{d^r \psi(x_i)}{dx^r} = \sum_{j=1}^N E_{ij}^{(r)} \psi_j \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

为了对输流曲管进行网点划分, 引入无量纲参数 $\zeta = \theta/\theta_0$, 得到 $\zeta \in [0, 1]$ 。采用文献[12]的作法, 将这无量纲参数区域划分为 N 个网点。从方程(2)~(4)可以看出, 在边界点 ζ_1 处具有 3 个边界条件。对于两端固定的曲管, 在 GDQR 法中, 边界网点 ζ_1 处需采用 3 个独立变量 $\xi_1, \xi_1^{(1)}$ 和 $\xi_1^{(2)}$; 类似的在边界点 ζ_N 处, 同样需要 3 个独立的变量 $\xi_N, \xi_N^{(1)}$ 和 $\xi_N^{(2)}$ 。对于非边界网点处, 只需采用该网点处的函数值作为独立变量, 即 $\xi_i (i = 2, 3, \dots, N - 1)$ 。因此 $n_1 = n_N = 3, n_2 = n_3 = \dots = n_{N-1} = 1$ 。根据前述的理论, 曲管方程经 GDQR 法处理之后,

所含的独立变量总数为 $M = \sum_{i=1}^N n_i = N + 4$ 。

如此以来, 方程(5)可以写成

$$\xi^{(r)}(x_i) = \sum_{k=1}^{N+4} E_{ik}^{(r)} U_k \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \{U_1, U_2, \dots, U_k, \dots, U_{N+4}\} &= \\ \{\xi_1, \xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{N-1}, \xi_N, \xi_N^{(1)}, \xi_N^{(2)}\} \end{aligned} \quad (9)$$

必须指出的是, 方程(8)中的权系数矩阵 $E_{ik}^{(r)}$ 已经在文献[13]中给出, 本文将直接引用其具体形式。将 GDQR 法应用到曲管的控制方程(1)得到

$$\sum_{j=1}^{N+4} \left[\frac{1}{\theta_0^6} E_{ij}^{(6)} + \frac{1}{\theta_0^4} (2 + v^2) E_{ij}^{(4)} + \frac{1}{\theta_0^2} (1 + 2v^2) E_{ij}^{(2)} \right] \xi_j + v^2 \xi_i + 2\beta^{1/2} v \sum_{j=1}^{N+4} \left(\frac{1}{\theta_0^3} E_{ij}^{(3)} + \frac{1}{\theta_0} E_{ij}^{(1)} \right) \dot{\xi}_j + \sum_{j=1}^{N+4} \frac{1}{\theta_0^2} E_{ij}^{(2)} \ddot{\xi}_j - \ddot{\xi}_i = 0 \quad (10)$$

(i = 2, 3, \dots, N - 1)

类似的,在曲管两端的边界网点处,其边界条件对应于式(2)~(4),其GDQR形式分别为

两端固定

$$\xi_i = 0, \xi_i^{(1)} = 0, \xi_i^{(2)} = 0 \quad (i = 1 \text{ 或者 } N) \quad (11)$$

一端固定,另一端简支

$$\xi_i = 0, \xi_i^{(1)} = 0, \xi_i^{(2)} = 0 \quad (i = 1)$$

$$\xi_i = 0, \xi_i^{(1)} = 0, \sum_{j=1}^{N+4} E_{ij}^{(3)} \xi_j = 0 \quad (i = N) \quad (12)$$

两端简支

$$\xi_i = 0, \xi_i^{(1)} = 0, \sum_{j=1}^{N+4} E_{ij}^{(3)} \xi_j = 0 \quad (i = 1 \text{ 或者 } N) \quad (13)$$

将方程(10)及其对应的边界条件合并写成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} [K_{bb}] & [K_{bd}] \\ [K_{db}] & [K_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_b\} \\ \{U_d\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [G_{db}] & [G_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{U}_b\} \\ \{\dot{U}_d\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [M_{db}] & [M_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{U}_b\} \\ \{\ddot{U}_d\} \end{Bmatrix} = 0 \quad (14)$$

其中下标 b 表示和边界点相关的元素,下标 d 表示与边界点不相关的元素,即

$$\begin{aligned} \{U_b\} &= \{\xi_1, \xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \xi_N, \xi_N^{(1)}, \xi_N^{(2)}\}, \\ \{U_d\} &= \{\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{N-2}, \xi_{N-1}\} \end{aligned} \quad (15)$$

显然,方程(14)中各矩阵元素均可以在GDQR法的实施过程中求得.对于输流管的自激振动,方程(14)的解可以写成

$$\{U\} = \{\bar{U}\} \exp(\Omega \tau) \quad (16)$$

其中 $\{\bar{U}\} = (\{\bar{U}_b\}^T \{\bar{U}_d\}^T)^T$, $\{\bar{U}\}$ 表示待求的幅值函数, Ω 为与实际振动频率 ω 相关的无量纲频率参数,且满足

$$\text{Im}(\Omega) = R^2 \omega \sqrt{\frac{m_f + m_p}{EI}} \quad (17)$$

将式(16)代入式(14),同时消除 $\{\bar{U}_b\}$,可以得到一个关于曲管振动的特征方程

$$(\Omega^2 [M] + \Omega [G] + [K]) \{\bar{U}_d\} = \{0\} \quad (18)$$

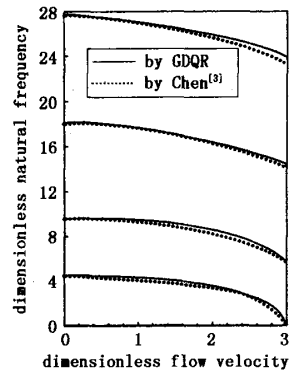
若要得到这一方程的非零解,需满足

$$\det(\Omega^2 [M] + \Omega [G] + [K]) = 0 \quad (19)$$

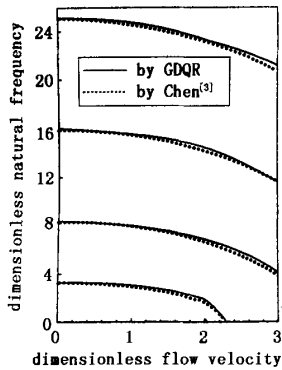
其中 $[M]$, $[G]$ 和 $[K]$ 分别表示管道结构的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵.方程(19)构成了一个广义特征值问题.

3 数值计算

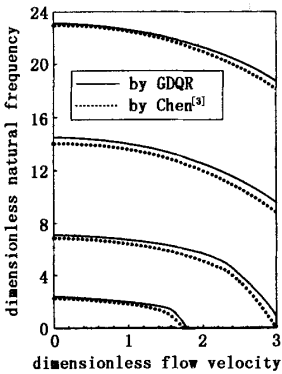
为了验证本文方法的有效性,考虑了几种典型边界条件输流曲管的面内振动,它已经被 Chen^[3,4] 采用解析法研究过.显然,输流曲管的振动频率与系统的各种参数相关,这些参数包括曲管张角、质量比、流速等.因此,如果固定某些参数取值,可以通过求解方程(19)得到曲管的各阶振动频率.针对前文所述的3种边界条件,数值计算得到的频率曲线如图2所示.从图中可以看出,输流曲管的前四阶振动频率值随着流速的变化而不同.当流速为0时,曲管可退化为半圆形的环;当流速逐渐增大时,各阶振动频率将逐渐减小.值得一提的是,若流速增加到某一取值时,第一阶振动频率变为0,此时管道将失稳.从图2还可以看到,GDQR法的计算结果与 Chen^[3] 的解析解相比,吻合较好.但是,GDQR法计算得到的振动频率大都略微高出解析解结果,这一点对于两端简支输流曲管更为显著.



(a)



(b)



(c)

图 2 半圆形曲管的无量纲振动频率与无量纲流速的关系变化曲线, $\beta=0$.

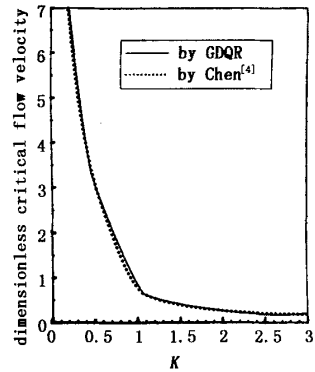
(a) 两端固定; (b) 固定-简支; (c) 两端简支.

Fig. 2 Natural frequencies of a semi-circular pipe as a function of dimensionless flow velocity, $\beta=0$.

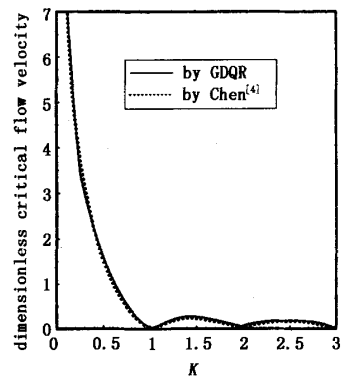
(a) clamped-clamped; (b) clamped-hinged; (c) hinged-hinged.

此外,数值计算还可以得到曲管失稳的临界流速.为此,方程(19)可以采用 Newmark 法加以求解.仅以曲管张角系数 K 为可变参数,其余系统参数保持恒定.当 K 在 0 到 3 之间作变化时,对于任意取值的 K ,都能通过计算求得曲管失稳的临界流速.图 3 给出了 3 种不同边界条件下曲管的临界流速曲线.从图中可以看出,GDQR 法所得到的失稳临界流速与 Chen^[4] 的研究结果相比,其精度较高.

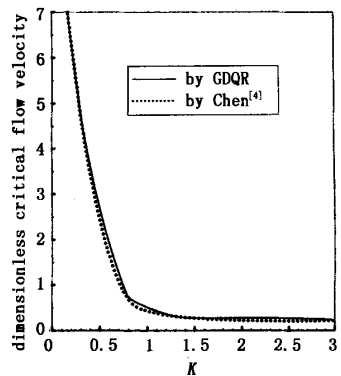
为了更清楚的认识曲管的动力响应情况,以两端固定输流曲管为例.我们首先固定质量比和曲管张角的取值,对于不同的流速取值,曲管将可能有不同的振动行为.研究过程中,考虑曲管轴线中点



(a)



(b)



(c)

图 3 输流曲管的无量纲临界流速与张角系数的关系变化曲线, $\beta=0.1$.

(a) 两端固定; (b) 两端简支; (c) 固定-简支.

Fig. 3 Critical flow velocities of a curved pipe as a function of opening angle, $\beta=0.1$.

(a) clamped-clamped; (b) hinged-hinged; (c) clamped-hinged.

处的响应(位移、速度等)情况.当流速较小时,曲管处于一种稳定状态,其时间历程图和对应的相图已

在图4中给出.当流速超过某一临界值时,曲管首先将以屈曲的方式发生失稳,其时间位移历程图如图5所示,这一结果与文献[4]是一致的.

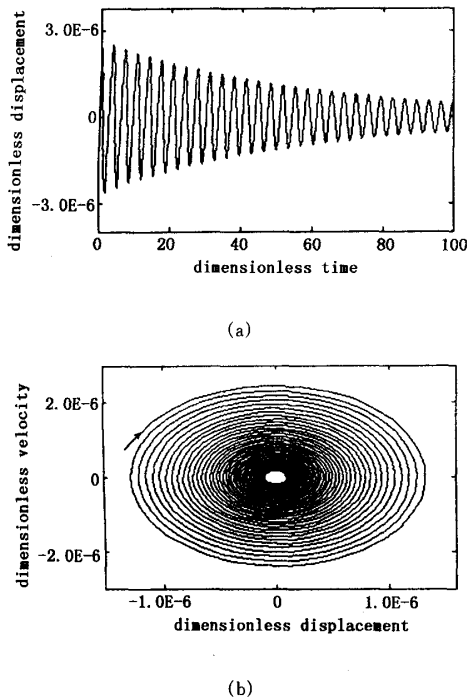


图4 两端固定半圆形曲管的动力响应

$$v = 2.5, \beta = 0.1.$$

(a) 时间位移历程图; (b) 相图.

Fig. 4 Dynamic response of a clamped-clamped semi-circular curved pipe for

$$v = 2.5, \beta = 0.1.$$

(a) time-displacement history; (b) phase portrait.

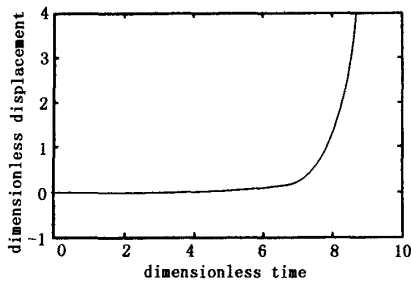


图5 两端固定半圆形曲管响应的的时间位移历程图

$$v = 3.2, \beta = 0.1.$$

Fig. 5 Time-displacement history of a clamped-clamped semi-circular curved pipe for

$$v = 3.2, \beta = 0.1.$$

4 讨论

本文采用GDQR法研究了输流曲管的流致振

动问题,数值计算了输流曲管模型在多种边界条件下的临界流速和振动频率,其计算结果与解析解相比,精度令人满意.对于输流曲管模型,尽管已有不少研究方法(如引言中列出的解析法、有限元法、传递矩阵法、DQM等),但和前人的这些研究方法相比,GDQR法显示出其独特的优点,此法在实施过程中,输流曲管的边界条件得以精确的施加;且计算效率高,能以少量的计算量给出满足工程要求的解.此外,基于GDQR法,文中还求解了两端固定输流曲管的几种典型的动力响应情况.

本文的研究表明,GDQR法在输流管道模型的研究中具有良好的应用前景.文中所分析的输流曲管属于线性模型,进一步的研究可望将此法推广用于输流管道的非线性动力响应计算.

参 考 文 献

- 1 Paidoussis MP, Li GX. Pipes conveying fluid: a model dynamical problem. *Journal of Fluids and Structures*, 1993, 7:137~204
- 2 黄玉盈. 输液管的非线性振动、分叉与混沌——现状与展望. *力学进展*, 1998, 28(1): 30~42 (Huang Yuying. Advances and trends of nonlinear dynamics of pipes conveying fluid. *Advances in Mechanics*, 1998, 28(1): 30~42(in Chinese))
- 3 Chen SS. Vibration and stability of a uniformly curved tube conveying fluid. *Journal of Acoustical Society America*, 1972, 51:223~232
- 4 Chen SS. Flow-induced in-plane instabilities of curved pipes. *Nuclear Engineering and Design*, 1972, 23:29~38
- 5 Misra AK, Paidoussis MP, Van KS. On the dynamics of curved pipes transporting fluid, part I: inextensible theory. *Journal of Fluids and Structures*, 1988, 2:245~261
- 6 Huang Y, Zeng G, Wei F. A new matrix method for solving vibration and stability of curved pipes conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 251:215~225
- 7 Ni Qiao, Huang Yuying. Differential quadrature method to stability analysis of pipes conveying fluid with spring support. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2000, 13: 320~327
- 8 Wang Lin, Ni Qiao. Hopf bifurcation of a nonlinear restrained curved pipe conveying fluid by differential quadrature method. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2003, 16: 345~352

- 9 Liu GR, Wu TY. Vibration analysis of beams using the generalized differential quadrature rule and domain decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 246: 461~481
- 10 Wu TY, Liu GR. Free vibration analysis of circular plates using the generalized differential quadrature rule. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, 191: 5365~5380
- 11 Wu TY, Liu GR. A generalized differential quadrature rule for initial-value differential equations. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 233(2): 195~213
- 12 Wu TY, Liu GR. The differential quadrature as a numerical method to solve the differential equation. *Computational Mechanics*, 1999, 24: 197~205
- 13 Wu TY, Liu GR. Application of the generalized differential quadrature rule to sixth-order differential equations. *Computations in Numerical Methods in Engineering*, 2000, 16(11): 777~784

GDQR FOR THE ANALYSES OF FLOW-INDUCED VIBRATIONS OF CURVED PIPES CONVEYING FLUID*

Wang Lin Ni Qiao Huang Yuying

(Department of Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract An attempt is made to extend the General Differential Quadrature Rule (GDQR) to the analysis for flow-induced vibration of curved pipes conveying. Based on the equation of in-plane vibration of curved pipes conveying fluid, the GDQR is applied to discretize the pipe modal, leading to a set of equations for the fluid-conveying pipes' dynamic behaviour. Calculations of natural frequencies and critical fluid velocities by GDQR show reasonably agreement with the analytical solutions. Further, this paper investigates the typical dynamic responses of a clamped-clamped curved pipe conveying fluid. As a result, the represented research shows that the GDQR can deal with these curved pipe models easily with satisfactory computation precision. Therefore, the application of GDQR for nonlinear vibrations of pipes conveying fluid will be the subject of further study.

Key words curved pipes conveying fluid, GDQR (general differential quadrature rule), critical fluid velocity, natural frequency, dynamic response