

从摆的非线性振动方程的派生性质求它的运动

陈宜周

(江苏大学工程力学研究所, 镇江 212013)

摘要 探讨了摆的非线性振动方程的新解法. 由此方程和初始条件着手, 可推导出一系列派生性质, 它们包括: 最大位移, 最大速度, 初始加速度和相平面上的相轨线. 把近似运动表成 Fourier 级数的形式, 其中圆周频率也是待定的. 令近似运动满足这些派生性质, 便可以定出待定的 Fourier 系数和圆周频率. 文中提出了 4 参数法和 5 参数法, 即: 4 个或 5 个待定的 Fourier 系数和圆周频率. 分析计算表明, 4 参数法已有较高的精度, 5 参数法的结果已和精确解相差甚微.

关键词 非线性振动, 非线性常微分方程, 数值解法

引言

对于保守系统中非线性振动问题的解, 有关方程可见于著作^[1,2]. 在过去研究的一些情况中, 方程中常常带有一个小参数 ϵ . 此方程可用 Lindstedt-Poincare 方法、多尺度法或平均化方法求解^[1,2]. 几乎所有摄动方法, 或小参数法都依赖于小参数, 以便使近似解能表示为级数的形式. 在此法中, 要相继求解一系列常微分方程. 在摄动方法中, 这一系列常微分方程的求解, 例如说, 直到 ϵ^4 幂次为止, 是非常麻烦的. 其次, 在摄动方法中, 很难估计所得解的精确度. 很明显, 当参数 ϵ 为较大值时, 此法已不再有效. 对摄动方法的局限性, 曾有研究者指出^[3]. 近来, 对于非线性振动分析, 有研究者提出了目标函数法^[4].

在本文中, 探讨了摆非线性振动方程的新解法. 从此方程和初始条件着手, 可推导出一系列派生性质, 它们包括: 最大位移、最大速度、初始加速度和相平面上的相轨线. 把近似运动表成 Fourier 级数的形式, 其中圆周频率也是待定的. 令近似运动满足这些派生性质, 便可以导出一个非线性代数方程组. 此方程组求解后, 便可得出待定的 Fourier 系数和圆周频率. 文中提出了 4 参数法和 4 参数法 (即 4 个待定的 Fourier 系数和圆周频率). 分析计算表明, 4 参数法已有较高的精度. 5 参数法的结果已和精确解相差甚微, 例如 $A = 17\pi/18$ 时 (A 为最

大位移), 圆周频率的误差仅为 -0.02% .

1 分析

在以下分析中, 研究摆运动的常微分方程^[1,2]

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 \sin u = 0 \quad (1)$$

式中 ω_0 为圆周频率, 又给定的边界条件如下

$$u|_{t=0} = A, \quad (2a)$$

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad (2b)$$

式中“ A ”为一个正值. 此外, 令

$$v = \frac{du}{dt} \quad (3)$$

对式(1)等式两侧乘 $2du$, 再作积分, 在相平面上可得下列方程^[1,2]

$$v^2 + G(u) = H \quad (4)$$

其中

$$G(u) = 2\omega_0^2 \int_0^u \sin u du = 2\omega_0^2(1 - \cos u) \quad (5)$$

$$H = G(u)|_{u=A} = 2\omega_0^2(1 - \cos A) \quad (6)$$

由式(1)和(2a), 可得初始加速度如下

$$\left. \frac{d^2 u}{dt^2} \right|_{t=0} = -\omega_0^2 \sin A \quad (7)$$

当 $A < \pi$ 时, 摆的运动是周期的, 又它的运动周期为^[1,2]

$$T_p = 2 \int_{-A}^A (H - G(u))^{-1/2} du \quad (8)$$

为了寻求摆的近似运动,今提出此运动应满足下列条件

(a) 此近似运动精确地满足条件(2a,b)(即初始条件).

(b) 此近似运动精确地满足条件(7)(即初始加速度条件).

(c) 近似运动在相平面上的 $u \sim v$ 轨迹(后面称为相轨线)应尽量接近真实性运动的相轨线,后者如式(4)所示.

(d) 应该设定一个真实运动的圆周频率 ω_p . 因为 $\sin u/u < 1$ (当 $|u| < A < \pi$), 则必有 $\omega_p < \omega_0$.

显然,近似运动不一定精确地满足微分方程(1). 本研究的中心思想是,试图用派生出来的诸性质(即条件(b),(c)和(d))来代替微分方程(1).

首先讨论 4 参数法. 根据相轨线方程(4), 此运动可设为

$$u_a(t) = c_1 \cos(\omega_p t) + c_3 \cos(3\omega_p t) + c_5 \cos(5\omega_p t), (0 \leq \omega_p t \leq 2\pi) \quad (9)$$

其中下标 a 表示近似的意思,又 ω_p, c_1, c_3, c_5 是待定的 4 个参数. 根据式(9),很容易得到速度和加速度的表示式

$$v_a(t) = \frac{du_a(t)}{dt} = -\omega_p [c_1 \sin(\omega_p t) + 3c_3 \sin(3\omega_p t) + 5c_5 \sin(5\omega_p t)], (0 \leq \omega_p t \leq 2\pi) \quad (10)$$

$$\frac{d^2 u_a(t)}{dt^2} = -\omega_p^2 [c_1 \cos(\omega_p t) + 9c_3 \cos(3\omega_p t) + 25c_5 \cos(5\omega_p t)], (0 \leq \omega_p t \leq 2\pi) \quad (11)$$

为了推导的方便,以下令

$$\alpha = \omega_p / \omega_0, h_1 = \frac{c_1}{A}, h_3 = \frac{c_3}{A}, h_5 = \frac{c_5}{A} \quad (12)$$

令近似运动满足条件式(2a),即条件(a)中的一个,可得

$$h_1 + h_3 + h_5 = 1$$

或

$$h_1 = 1 - h_3 - h_5 \quad (13)$$

式(13)的物理意义为,真实运动和近似运动的相轨线通过同一点 p_0 (图 1). 此外,显然条件式(2b)

已恒得到满足.

令近似运动满足条件式(7),即条件(b),可得

$$a^2(1 + 8h_3 + 24h_5) = \frac{\sin A}{A} \quad (14)$$

显然当 $\omega_p t$ 从 0 增加到 2π 时,相平面上的点 (u, v) 沿着 $p_0 p_1 p_2 p_3 p_0$ 连接成的闭轨道运动(图 1). 在 p_3 点,由式(4),真实运动达到最大速度 $v_{\max} = \sqrt{H}$. 与此同时,近似运动在时刻 $\omega_p t = 3\pi/2$ 达到最大速度,即

$$v_{a,\max} = v_a(\omega_p t) \Big|_{\omega_p t = 3\pi/2} \quad (15)$$

若令条件 $v_{\max} = v_{a,\max}$ 得到满足,利用式(4)和(10)后,可得

$$a^2(1 - 4h_3 + 4h_5)^2 = \frac{2(1 - \cos A)}{A^2} \quad (16)$$

式(15)的物理意义为,真实运动和近似运动的相轨线通过同一点 p_3 .

今在近似运动在 $p_3 p_0$ 弧上设定一个中间点 B(图 1),相当于时刻 $\omega_p t = 7\pi/4$. 此时不难得到点 B 处的位移和速度(已利用式(13))

$$u_{a,B} = \frac{A}{\sqrt{2}}(1 - 2h_3 - 2h_5) \quad (17)$$

$$v_{a,B} = \frac{\omega_p A}{\sqrt{2}}(1 + 2h_3 - 6h_5) \quad (18)$$

显然,这一组 $(u_{a,B}, v_{a,B})$ 不一定落在真实运动的相轨线上. 现在再提出一个条件,即令 $(u_{a,B}, v_{a,B})$ 落在真实运动的相轨线上,由式(4)此条件可写为

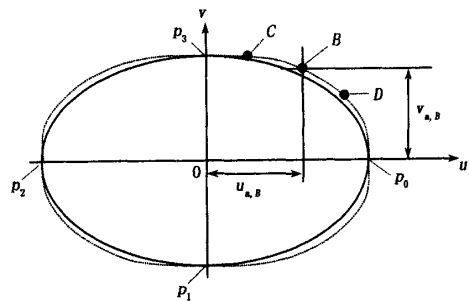


图 1 摆的非线性振动方程的相轨线

- 真实运动的相轨线
 - 近似运动的相轨线
- Fig. 1 Trajectory on phase plane for the non-linear vibration of pendulum
- trajectory on phase plane of real motion
 - trajectory on phase plane of approximate motion

$$v_{a,B}^2 + G(u_{a,B}) = H \quad (19)$$

从式(17)和(18)代入到式(19)中可得

$$\alpha^2(1 + 2h_3 - 6h_5)^2 = \frac{4}{A^2}(\cos u_{a,B} - \cos A) \quad (20)$$

总而言之,式(13),(14),(16)和(20)构成了对 α, h_1, h_3, h_5 (即 ω_p, c_1, c_3, c_5) 的非线性代数方程组. 具体做法是,先由式(14),(16)和(20)解出 α, h_3, h_5 ,再由式(13)解出 h_1 . 这些非线性方程是要迭代求解的,限于篇幅,具体求解过程没有写出.

对于 A 从 $\pi/18, 3\pi/18, \dots, 17\pi/18$, 关于 α, c_1, c_3, c_5 的计算结果如表 1 所示.

其中

α 为本文数值法得到的圆周频率的减缩系数;

β 为由下式 $\beta = (\alpha_{ex} - \alpha)/\alpha_{ex}$ 定义的相对误差;

c_1, c_3, c_5 为本文数值法得到的 Fourier 系数.

在表 1 中也列出了精确解的圆周频率减缩系数

$\alpha_{ex}(\alpha_{ex} = \omega_{p,ex}/\omega_0)$, 其中 $\omega_{p,ex} = 2\pi/T_p$, 又 T_p 由式(8)得出. 从表 1 可见,当 $A \leq 11\pi/18$ 时,4 参数法近似解的圆周频率减缩系数 α 和精确解的毫无差别,直到第 4 位数字. 此外,当 $A = 17\pi/18$ 时此值有 1.73% 的误差.

为了更进一步提高计算精度,又提出 5 参数法 ($\omega_p, c_1, c_3, c_5, c_7$). 此时把近似运动设成 5 参数的形式

$$u_a(t) = c_1 \cos(\omega_p t) + c_3 \cos(3\omega_p t) + c_5 \cos(5\omega_p t) + c_7 \cos(7\omega_p t), \quad (0 \leq \omega_p t \leq 2\pi) \quad (21)$$

此时,决定 5 参数法的前 3 个条件,类同于上面的式(13),(14),(16),应为

$$u|_{t=0} = u_a|_{t=0} = A \quad (22)$$

$$\left. \frac{d^2 u}{dt^2} \right|_{t=0} = \left. \frac{d^2 u_a}{dt^2} \right|_{t=0} = -\omega_0^2 \sin A \quad (23)$$

$$v_{\max} = v_{a,\max} = v_a(\omega_p t)|_{\omega_p t = 3\pi/2} = \sqrt{H} \quad (24)$$

表 1 对于方程(1)和条件(2a,b)下,4 参数法算得的圆周频率减缩系数 α 和 Fourier 系数

Table 1 The reduced factor α for the circular frequency and the coefficients of Fourier series in the four-parameter method for the equation (1) with the condition 2(a,b)

A	$\pi/18$	$3\pi/18$	$5\pi/18$	$7\pi/18$	$9\pi/18$	$11\pi/18$	$13\pi/18$	$15\pi/18$	$17\pi/18$
α_{ex}	0.9981	0.9829	0.9526	0.9073	0.8472	0.7720	0.6804	0.5675	0.4099
α	0.9981	0.9829	0.9526	0.9073	0.8472	0.7720	0.6803	0.5670	0.4028
β	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0009	0.0173
c_1	0.1746	0.5244	0.8763	1.2321	1.5942	1.9666	2.3567	2.7831	3.3330
c_2	0.0000	-0.0008	-0.0036	-0.0105	-0.0240	-0.0487	-0.0934	-0.1812	-0.4303
c_5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0006	0.0019	0.0056	0.0161	0.0644

表 2 对于方程(1)和条件(2a,b)下,5 参数法算得的圆周频率减缩系数 α 和 Fourier 系数

Table 2 The reduced factor α for the circular frequency and the coefficients of Fourier series in the five-parameter method for the equation (1) with the condition (2a,b)

A	$\pi/18$	$3\pi/18$	$5\pi/18$	$7\pi/18$	$9\pi/18$	$11\pi/18$	$13\pi/18$	$15\pi/18$	$17\pi/18$
α_{ex}	0.9981	0.9829	0.9526	0.9073	0.8472	0.7720	0.6804	0.5675	0.4099
α	0.9981	0.9829	0.9526	0.9073	0.8472	0.7720	0.6804	0.5675	0.4100
β	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0002
c_1	0.1746	0.5244	0.8763	1.2321	1.5941	1.9663	2.3555	2.7774	3.2910
c_3	0.0000	-0.0008	-0.0036	-0.0105	-0.0240	-0.0484	-0.0921	-0.1753	-0.3817
c_5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0006	0.0020	0.0059	0.0177	0.0690
c_7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0001	-0.0004	-0.0018	-0.0112

与此同时,可在相平面的 $u \sim v$ 轨迹上设立 C 点,相应于 $\omega_p t = 10\pi/6$, 此时由式(21)可得出 $(u_{a,C}, v_{a,C})$ 与上类同,令 $(u_{a,C}, v_{a,C})$ 落在真实运动的相轨线上,由式(4)同样可得

$$v_{a,C}^2 + G(u_{a,C}) = H \quad (25)$$

与上类同,可在相平面的 $u \sim v$ 轨迹上设立 D 点,相应于 $\omega_p t = 11\pi/6$. 设相应的位移和速度记成 $(u_{a,D}, v_{a,D})$, 和式(25)类同可得

$$v_{a,D}^2 + G(u_{a,D}) = H \quad (26)$$

与上类同,可由式(22)~(26)算得 5 个参数 $(\omega_p, c_1, c_3, c_5, c_7)$. 有关计算结果列出在表 2 中. 其中 $\alpha_{ex}, \alpha, \beta$ 同表 1 注释. c_1, c_3, c_5, c_7 为本文数值法得到的 Fourier 系数. 从表 2 可看出, 5 参数法的结果已和精确解相差甚微, 例如 $A = 17\pi/18$ 时, 圆周频率的误差仅为 -0.02% .

2 结论

用方程的派生性质来代替微分方程和初始条

件, 是一个一般性的方法. 在此法中, 不仅可以求得圆周频率的减缩系数, 还可以得到相应的运动. 显然, 此法不受小参数或弱非线性的限制, 它可用于保守系统非线性振动的多种情况.

参 考 文 献

- 1 Nayfeh AH, Mook DT. *Nonlinear Oscillations*. New York: John Wiley, 1978
- 2 Nayfeh AH. *Introduction to Perturbation Techniques*. New York: John Wiley, 1978
- 3 He JH. A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems. *Inter J of Non-linear Mech*, 2000, 35:37~43
- 4 Chen YZ, Lee KY. Numerical solution of Rayleigh equation in non-linear vibration. *Com in Numer Meth in Eng*, 2001, 17:253~258

EVALUATION OF THE NONLINEAR VIBRATION MOTION FOR A PENDULUM FROM ITS DERIVATIVE PROPERTIES

Chen Yizhou

(Division of Engineering Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

Abstract This paper suggested a novel solution for the non-linear vibration equation of a pendulum. From the relevant differential equation and the initial condition for the problem, there are some derivative properties, which include the maximum displacement, the maximum velocity, the initial acceleration and the trajectory on the phase plane. The studied approximation motion for a pendulum was expressed in the form of Fourier series, in which the circular frequency was also an undetermined value. Let the approximate motion to be close to those derivative properties, the involved Fourier coefficients as well as the circular frequency can be evaluated, in which the four-parameter method and five-parameter method are used. It is found that the results obtained from the four-parameter method have a high accuracy, and that the results obtained from five-parameter method has a very high accuracy.

Key words nonlinear vibration, nonlinear ordinary differential equation, numerical solution procedure