第3卷第1期
2005年3月
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol.3 No.1
Mar. 2005

线弹性动力学中的最小势能原理(含最小余能原理)

唐松花[1,2]　罗迎社[1]　周筑宝[2]
(1.湘潭大学基础力学与材料工程研究所,湘潭 411105)(2.中南大学土木建筑学院,长沙 410075)

摘要　线弹性静力学中有最小势能原理和最小余能原理,但只适用于物体或结构在给定约束条件下处于稳定平衡状态的情况,而在一般情况下动力学问题不可能存在稳定平衡状态,因此在动力学领域中是否存在最小势能原理值得认真考虑.本文对动力学问题中存在最小势能原理的可能性进行了探讨,并以摆脱了“平衡态”和“稳定态”的限制的最小功耗原理为理论基础,导出了线弹性动力学中的最小势能原理和最小余能原理.给出了计算实例,结果正确.因此在线弹性动力学中存在瞬时意义下的最小势能原理和最小余能原理.但其含义与静力学中的最小势能原理和最小余能原理并不相同.其主要区别在于:动力学中的原理适用于不稳定过程之任一瞬时,其“最小”是指“当时(即该瞬时)所有可能值的最小”.而静力学中的最小势能原理则只适用于稳定平衡状态,其“最小”是指系统从不稳定最后达到稳定平衡的整个过程中所有“真实值中的最小”.即前者是“当时的最小”,后者则是“全过程中的最小”.这两类变分原理可成为线弹性动力学中各种变分直接解法的理论基础.

关键词　最小功耗原理,最小势能原理,最小余能原理

引言

现有热力学理论中的最小能量原理、最小耗能原理、最小熵产生原理等,都是在系统处于“平衡态”或“稳定态”时得到的结论,理论力学及弹性力学属于热力学理论的范畴,它们不能违反热力学的基本原理,所以它们中的最小势能原理也只适用于物体或结构在给定约束条件(例如给定体力及边界条件)下处于稳定平衡状态的情况.所谓稳定平衡情况,是指即使有一微小扰动,当扰动消失之后物体或结构还会恢复到原来的平衡状态的情况.例如在U形谷底或平面上的小球,就属于这种情况.众所周知,此时小球的重力势能都取与问题给定约束条件相适应的最小值.动力学问题由于既具有势能又具有动能,且约束条件(例如给定的体力及面力)随时间而变,所以在一般情况下动力学问题不可能存在稳定平衡状态,因此在动力学领域中是否存在最小势能原理,应该说还是一个值得认真考虑的问题.

1964年,Curtin[1]利用卷积理论,建立了一系列线弹性动力学的初值-边值混合问题的变分原理.1987年,罗恩[2]利用卷积恒等式,导出了一簇Curtin型变分原理.1994年,贺国京[3]采用Lagrange乘子法建立了各种Curtin型变分原理,其中包括最小势能原理.本文另辟蹊径,以文献[4]提出的最小功耗原理为理论基础,建立了线弹性动力学中的最小势能原理(含最小余能原理),并给出了计算实例,算例结果正确.

1　对动力学问题中存在最小势能原理可能性的探讨

为探讨动力学问题中是否可能存在最小势能原理,先来看一个理论力学中的简单问题:考查一个小球从一个由一光滑斜面和一个光滑平面组成的斜坡上滚下时,小球在各瞬时的重力势能的情况.

1)当小球在斜面上滚动时,小球处于加速运动之中是一个动力学问题.因为在此阶段小球不可能达到稳定平衡状态,所以在此阶段中的任意时刻,静力学中的最小势能原理都不成立.

2)设某瞬时小球滚到斜面上的任一点A,由于小球在该瞬时受到当时斜面上的支撑点A(边界条

2004-10-02收到第1稿,2004-12-20收到修改稿.

件)的约束,所以在该瞬时小球的总重力势能必然是取与当时约束条件(支撑点 A)相适应的当时所有可能重力势能中的最小值(因为受约束(支撑点 A)的限制,小球在该瞬时的位置就是小球在当时约束(支撑点 A)允许的所有可能位置中高度最低的位置).

3)当小球滚到平面上之后,由于已设平面光滑,小球处于匀速运动状态(即达到稳定平衡状态).显然,此时小球的总重力势能也就达到了整个滚动过程中的最小值.

综上可看出:

1)上述动力学过程中的任何一瞬时(即小球在斜面上滚动过程中的任一瞬时),虽然小球在该瞬时并不处于稳定平衡状态,而且还具有与时具增的动能,但它的总势能却取与当时约束条件允许的所有可能总势能的最小值.

2)上述"当时约束条件允许的所有可能总势能的最小值",显然不是小球滚动全过程中的"最小值".全过程中的"最小"只能在此动力学过程最终达到稳定平衡状态时才能实现.

3)对动力学问题,看来也存在着一个与系统动能大小并无直接联系的最小势能原理,它与静力学中的最小势能原理的区别在于,前者可用于不稳定的动力学过程中的任一瞬时,并且其系统(物体或结构)总势能是取与该瞬时约束条件相适应的,当时所有可能总势能值中的最小值;后者则只能用于当系统(物体或结构)达到稳定平衡状态时的情况,并且此时系统(物体或结构)的总势能,是在其从不稳定状态最终达到稳定平衡状态的全过程中所有真实总势能中的最小值.即前者是"当时所有可能值中的最小",后者则是"全过程所有真实值中的最小".

由于以上结论仅仅是通过考察一个简单的理论力学特例总结出来的,它是否具有普遍性还有待于看在热力学理论中,是否能够建立起适用于不稳定情况下的相应原理.文献[4]提出并证明了一个具有新内涵的最小耗能原理,这个新最小耗能原理突破了现有热力学理论中最小耗能原理要受到"平衡态"或"稳定态"限制的桎梏,可适用于不稳定过程的任意瞬时.从这个新最小耗能原理出发,文献[4]还提出并证明了一个适用于有"耗散"的、一般情形下的"最小功耗原理".即"任何作用于结构的外力功消耗过程,都将在与其相应的约束条件(包括边界条件在内的定解条件)下,以消耗外力功最小的方式进行".这里所谓的外力功消耗或消耗外力功,指的是外力功被转化为动能、势能及其他机械能形式之外的耗散能;这里所谓的以消耗外力功最小的方式进行的含意,则是指在外力功消耗过程中的任意时刻,其外力功的消耗率都取当时所有可能外力功消耗率的最小值.由于这个最小功耗原理是根据文献[4]的、能适用于不稳定热力学系统的新最小耗能原理建立的,因此对不稳定功耗过程的任意时刻都成立,这就在热力学的层次上彻底摆脱了"平衡态"和"稳定态"的限制,为研究包含耗散情况在内的各种动力学问题奠定了理论基础.下面就从这个具有一般性意义的原理出发,来导出线弹性动力学中的最小势能原理.

2　线弹性动力学中的最小势能原理(含最小余能原理)

对于在荷载作用下不能作整体运动的各类工程结构系统而言,可以认为作用于系统的外力功率全部转化为应变能(包括可逆的弹性应变能,也包括不可逆应变的耗散能)率,对这类系统的动力学过程而言 $\iiint\limits_V \sigma_{ij}(t)\dot{\varepsilon}_{ij}(t)\mathrm{d}V$ 与过程中任一 t 瞬时的外力功消耗率等价,所以根据最小功耗原理即有

$$\delta\Big[\iiint\limits_V \sigma_{ij}(t)\dot{\varepsilon}_{ij}(t)\mathrm{d}V\Big] = 0 \qquad (1)$$

其中 $\sigma_{ij}(t)$,$\dot{\varepsilon}_{ij}(t)$ 为所讨论问题在动力学过程中任意瞬时 t 的真实应力张量和真实应变率张量,因此它们应该满足该动力学问题所应满足的基本方程及其相应的定解条件(例如边界条件、初始条件以及体力荷载等).即上述基本方程及其定解条件都应该是式(1)取力学变分时必需满足的约束条件.式(1)中的 $\dot{\varepsilon}_{ij}(t)$ 当只存在"塑性耗散"而不存在"粘性耗散"时,可改写为增量形式;当讨论线弹性动力学问题时,由于不存在耗散,所以不受加载路径及持荷时间的影响,故在此情况下式(1)中的 $\dot{\varepsilon}_{ij}(t)$ 可用 $\varepsilon_{ij}(t)$ 替代.如此在按位移求解时,对线弹性动力学问题式(1)可改写为

$$\delta\Big[\iiint\limits_V \sigma_{ij}(t)\varepsilon_{ij}(t)\mathrm{d}V\Big] = \delta\Big[\iiint\limits_V 2U_0(u_i(t))\mathrm{d}V\Big] = 0$$

即
$$\delta\Big[\iiint\limits_V U_0(u_i(t))\mathrm{d}V\Big]=0 \tag{2}$$
其中 $U_0(u_i(t))$ 为以 t 瞬时位移 $u_i(x,y,z,t)$ 表示的线弹性动力学系统，在 t 瞬时的应变能密度. 设线弹性动力学系统受到随时间而变的体力 $F_i(t)$（包括惯性力）及面力 $T_i(t)$ 的作用，于是有

$$\Big[\iiint\limits_V F_i(t)u_i(t)\mathrm{d}V+\iint\limits_{S_T} T_i(t)u_i(t)\mathrm{d}S\Big]=2\iiint\limits_V U_0(u_i(t))\mathrm{d}V \tag{3}$$

其中 S_T 为作用有面力 $T_i(t)$ 的 V 的表面. 之所以有式(3) 成立，是因为在线弹性的情况下式(3) 左边表示的是作用于线弹性系统外力功的两倍. 由式(3) 有

$$\Big[\iiint\limits_V F_i(t)u_i(t)\mathrm{d}V+\iint\limits_{S_T} T_i(t)u_i(t)\mathrm{d}S-\iiint\limits_V U_0(u_i(t)\mathrm{d}V\Big]=\iiint\limits_V U_0(u_i(t))\mathrm{d}V \tag{4}$$

由式(4) 并注意到式(2) 则有

$$\delta\Big[\iiint\limits_V F_i(t)u_i(t)\mathrm{d}V+\iint\limits_{S_T} T_i(t)u_i(t)\mathrm{d}S-\iiint\limits_V U_0(u_i(t))\mathrm{d}V\Big]=0 \tag{5}$$

由于在 t 瞬时所有外力，即包括惯性力、阻尼力、摩擦阻力等在内的 $F_i(t)$，$T_i(t)$，都可视为大小和方向不变（此条件相当于体力、面力均为有势力），而 $u_i(t)$ 则为在大小及方向不变的 $F_i(t)$ 和 $T_i(t)$ 作用下的待求位移场，因此式(5) 只对 $u_i(t)$ 变分，并且 $u_i(t)$ 应满足线弹性动力学按位移求解的基本方程及 t 瞬时相应的定解条件. 如此式(5) 的物理意义为：对于在荷载作用下不能作整体运动的线弹性动力学系统而言，其动力学过程的任一瞬时 t 的真实位移场 $u_i(t)$，应使在 t 瞬时该线弹性动力学系统的总势能取驻值. 因为式(5) 是由最小功耗原理导出，所以无需考虑二阶变分即知其实际上是取 t 瞬时，该线弹性动力学系统的当时所有可能总势能中的最小值. 此即线弹性动力学系统中的最小势能原理. 这个原理不要求系统处于稳定平衡状态，它又可称为线弹性动力学中的势能驻值原理. 需要指出的是：正如本文开始所讨论的问题那样，该原理的成立与系统的动能大小并无直接联系. 鉴于式(5) 实际上只涉及到由惯性力引起的势能，所以式(5) 中的惯性力也就无需要像在推导 Hamilton 原理时那样，采用包含有动能变分项的形式来表示.

因为上述线弹性动力学中的最小势能原理，是由可用于包含粘、弹、塑性在内的动力学问题的最小功耗原理，在材料为线弹性的情况下导出的，所以它可以视为文献[4] 中的最小功耗原理的一个特例（有关粘、弹、塑性动力学的问题，将另有专文进行讨论）. 文献[4] 的 § 5.7 在按应力求解的情况下，由最小功耗原理还导出了以文献[4] 之(5.103) 式表示的，可用于包含各种耗散情况的“率型”广义余能原理. 对于不考虑粘性或塑性耗散的线弹性情况，由于其结果与加载路径和持荷时间无关，因此亦可按上述类似途径，导出线弹性动力学中的最小余能原理. 由于方法雷同，故不赘述.

3 算例

例 1 试求图 1 所示结构的运动方程（不考虑阻尼力）.

解 结构中存在外载荷 $P(t)$，惯性力 $M\cdot\dfrac{\ddot{y}}{2}$，$M\cdot\ddot{y}$. 应变能 $=\dfrac{k}{2}y^2$.

由式(5) 表示的线弹性动力学中的最小势能原理及图 2 有

$$\delta\Big[p(t)\cdot\frac{y}{2}-M\cdot\frac{\ddot{y}}{2}\cdot\frac{y}{2}-M\ddot{y}\cdot y-\frac{k}{2}y^2\Big]=0$$

因为式(5) 是“瞬态”形式的表示式，所以 t 瞬时的惯性力 $M\ddot{y}$ 和 $\frac{1}{2}M\ddot{y}$ 均可视为大小和方向都不变的力，因此 $\ddot{y}$ 不参加变分. 但位移 y 因为是运动方程的待求量，所以对它必须变分.

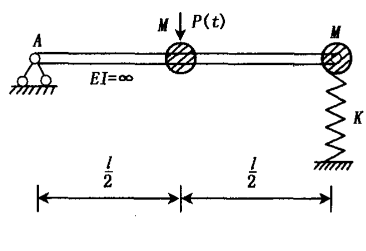

图 1 一端简支一端弹性支撑的梁承受动载

Fig. 1 A beam, with a pin support at one end and a spring support at the other, is acted by a dynamic loading.

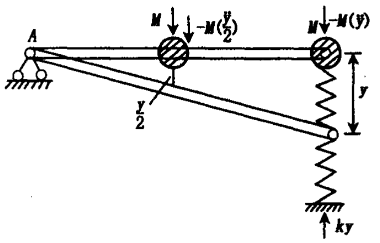

图 2　梁在动载作用下的运动情况

Fig. 2　The motion of the beam in the effect of the dynamic loading

所以有

$$2p(t)-5M\ddot{y}-4ky=0$$

即

$$\frac{5}{2}M\ddot{y}+2ky=p(t)$$

为所求结构的运动方程,与文献[5]中的结果完全一致.

例 2　如图3所示一线弹性三杆平面桁架,杆的横截面积 $S=1$,弹性模量为 E. 在铰接点 D 处作用有随时间而变的动载 $P(t)$. 求任意瞬时 t 各杆内的动应力.

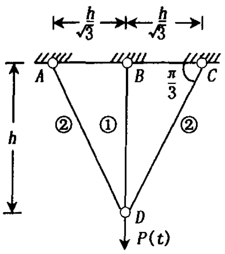

图 3　承受动载的三杆平面桁架

Fig. 3　A three-bar plane truss acted by a dynamic loading

解　设杆内轴力为 N_1, N_2 及 N_3(设全为拉力),

弹性结构中,余能 U = 变形能,则

$$U=\frac{N_1^2h}{2E\cdot 1}+\frac{N_2^2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}h}{2E\cdot 1}\times 2\quad(N_1=N_2)$$

又由 $\sum y=0$ 有 $N_1+2N_2\cos 30^\circ=P(t)$, 即 $N_1=P(t)-\sqrt{3}N_2$. 代入 U 式,由线弹性动力学中的最小余能原理,即 $\delta U=0$,可得 $N_2=\frac{3P(t)}{4+3\sqrt{3}}$,

进而可求出 $N_1=\frac{4P(t)}{4+3\sqrt{3}}$.

因为 $S=1$,则各杆应力分别为

$$\sigma_1(t)=\frac{4P(t)}{4+3\sqrt{3}},$$

$$\sigma_2(t)=\sigma_3(t)=\frac{3P(t)}{4+3\sqrt{3}},$$

与文献[4]中的结果完全一致.

4　结论

1) 在线弹性动力学中也存在瞬时意义下的最小势能原理和最小余能原理,但其含义与静力学中的最小势能原理和最小余能原理并不相同. 其主要区别在于:动力学中的原理适用于不稳定过程之任一瞬时,其"最小"是指"当时(即该瞬时)所有可能值的最小". 而静力学中的最小势能原理则只适用于稳定平衡状态,其"最小"是指系统从不稳定最后达到稳定平衡的整个过程中所有"真实值中的最小". 即前者是"当时的最小",后者则是"全过程中的最小". 正是因为区别了以上两种"最小",才使得"只有达到稳定平衡时才有系统总势能的最小,而在动力学过程中又不可能存在稳定平衡,所以也就没有系统总势能的最小,因而在动力学中没有最小势能原理"的矛盾得到解决.

2) 因为线弹性动力学中的最小势能原理,实际上表示的是在线弹性动力学过程中任一瞬时 t 的、包括惯性力在内的力的平衡关系,所以该原理与系统动能的大小没有关系. 这从本文第 4 节的例 1 即可清楚地看出. 需要指出的是:因为讨论的是动力学问题,所以在系统总势能中包含有由惯性力引起的弹性势能.

3) 本文基于最小功耗原理建立的线弹性动力学最小势能原理和最小余能原理具备变分原理的优点:数学形式单一紧凑,拥有自然界面条件和变域变分等独特工具等等,它可成为线弹性动力学中各种变分直接解法(Ritz 法、有限元法等)的理论基础.

参 考 文 献

1　Curtin ME. Variational principle for linear elastodynamics. *Arch Rat Moch Analysis*, 1964, 16:34～50

2　罗恩. 关于弹性动力学中的各种 Curtin 型变分原理. 中国科学(A 辑), 1987, 9387: 936～948 (Luo En. About various Curtin-type variational principles in linear elastodynamics. *Chinese Science* (*A compilation*), 1987, 9387: 936～948(in Chinese))

3 贺国京，陈大鹏.线弹性动力学的各种变分原理.西南交通大学学报，1994，29(5):460～467(He Guojing, Chen Dapeng. The various variational principles in linear elastodynamics. *Journal of Southwestern Traffic University*, 1994,29(5):460～467(in Chinese))

4 周筑宝.最小耗能原理及其应用.北京:科学出版社，2001(Zhou Zhubao. The Least Energy Dissipation Principle and Its Application. Beijing: Science Publication, 2001 (in Chinese))

5 张相庭，王志培，黄本才.结构振动力学.上海:同济大学出版社，1994.5:17～18(Zhang Xiangting ,Wang Zhipei, Huang bencai. Structure Vibration Mechanics. Shanghai: Tongji University Press, 1994.5:17～18(in Chinese))

THE LEAST POTENTIAL PRINCIPLE AND THE LEAST REMAINING PRINCIPLE IN LINEAR ELASTODYNAMICS

Tang Songhua[1,2] Luo Yingshe[1] Zhou Zhubao[2]

(1. *Institute of the Fundamental Mechanics and Material Engineering*, *Xiangtan University*, *Xiangtan* 411105, *China*)

(2. *Institute of Civil Engineering*, *Centralsouth University*, *Changsha* 410075, *China*)

Abstract In elastic-static mechanics there are the least potential principle and the least remaining principle, which is only applicable to the situation of the stable and equilibrium state. But generally speaking there are no stable and equilibrium state in dynamic problems, so it is worthwhile considering carefully whether there is the least potential principle in the dynamic field. This paper studied the possibility of the least potential principle existing in dynamic problems, and derived the least potential principle and the least remaining principle based on the least work consumption principle, which get rid of the limitations of "equilibrium" and "stable state". The practical calculating examples were proposed and the results were correct. So in linear elastodynamics there also exist the least potential principle and the least remaining principle in instantaneous sense, which have different physical meaning. The physical meaning of the former is to take "the minimum of all probable value meantime" at any moment in the dynamical process, and the latter is to take "the minimum" in the whole dynamical process. That is to say, the former is "the minimum at that time" and the latter is "the minimum in the whole process". These two variational principles may become the theoretical foundation for all sorts of variational direct solving methods in linear elastodynamics.

Key words the least work consumption principle, the least potential principle, the least remaining principle.

Received 02 October 2004, revised 20 December 2004.