

基于 Karhunen-Loève 展开的柔性 梁撞击系统的降阶方法*

邓子辰^{1,2} 范小弄¹ 赵玉立¹

(1. 西北工业大学工程力学系, 西安 710072)(2. 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘要 首先基于 Euler-Bernoulli 原理, 建立了一柔性悬臂梁撞击系统的动力学方程, 并给出了模态分析方法; 然后在若干基本假定和定义的基础上, 利用 Karhunen-Loève 展开这一正交分解手段, 给出了体现动力系统主要特征的降阶模型, 可将系统的本征值进行新的表述; 最后将所提方法应用于柔性悬臂梁撞击系统的降阶分析过程中, 并给出了相应数值例题. 结果表明: 本方法可以用少量的模态准确模拟可控系统的动力学特性, 可为系统控制研究提供基础.

关键词 Karhunen-Loève 展开, 柔性撞击系统, 降阶

引言

随着现代高科技结构对位置精度要求的提高和运行环境的日益复杂, 研究由于撞击而引起的结构的非线性特性, 已成为柔性多体系统动力学需要解决的一个重要课题. 如卫星的太阳能帆板展开过程中的锁定撞击、柔性机械臂抓取物体时的撞击、土方机械在施工过程中遇到的障碍、机械系统内部产生的有害撞击振动等都是关于柔性体撞击的工程实际问题. 这些撞击会引起柔性体系统的动力学特性产生巨大的变化, 激起柔性体的高阶模态的弹性振动, 影响系统的运行稳定性和运行精度, 甚至会造成重大的损失. 因此, 深入分析撞击强度的各个因素以及撞击对系统整体动力学行为的影响, 进而建立合理的柔性体撞击动力学建模理论、数值计算方法及控制理论, 对柔性多体动力学理论的发展和复杂工程实际问题的解决具有重要意义.

但含撞击的柔性多体动力学本身是强非线性的、非常复杂的, 对该系统的控制研究具有极大的难度. 柔性撞击系统动力学的离散化模型大多为复杂的、具有很多自由度的动力学方程, 或者说是有很高维数的动力学方程, 这在求解系统的动力响应时会产生很大的困难, 至于作为控制系统设计用的

模型, 高维的动力学模型更是难用, 即使是所谓的多变量控制设计技术, 所能处理的变量数目仍是非常有限的. 因此, 柔性撞击系统动力学模型的降阶问题是一个非常重要而又有实际意义的问题, 需要我们从多方面寻求解决途径^[1].

模型阶数高往往是由于离散化策略本身引起的, 因而, 能够实现以低阶模型来代替原有的高阶模型. 动力学模型的降阶研究包含两方面的内容: 一是模态的离散化, 即选择一组合适的模态向量, 对原系统的变形进行模态展开, 从而得到一组降阶动力学方程. 为了能用较少的模态表示变形, 选择合适的模态集十分重要, 可用的模态集包括: 假设模态集, 常用满足边界条件的容许函数集; 柔性部件的弹性主模态集; 柔性多体系统模态集. 二是保留模态的截取, 为了能实现对柔性系统的控制, 必须在动力学模型中略去一些模态.

Karhunen-Loève 展开(简记为 KL 展开)实际上是一种正交分解, 它是系统模型降阶的一种有力的工具^[2], 已被广泛应用于流体领域中的湍流问题的研究, 只是最近才被用在结构动力学系统中. KL 展开方法要求解一套 KL 正交模态, 从最优化角度来看, 这套模态最大限度地减少了模拟误差, 也就是说在使用相同模态数量的情况下, 其它降阶方法

2004-10-10 收到第 1 稿, 2004-11-08 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(10372084)、高校博士点基金(20010699016)、陕西省自然科学基金(2002A17)、工业装备结构分析国家重点实验室开放基金及西北工业大学博士创新基金资助项目.

一般都不如 KL 展开法得到的结果准确. Steindl 和 Troger 推导出:利用 Galerkin 方法建立的动力学方程系统中, KL 展开法为其最好的降阶方法^[3]; Azeez 等首先利用 KL 展开法研究了振动撞击系统问题的分析^[4].

虽然系统中的撞击现象常常与磨损、疲劳和噪声等随机现象联系在一起,例如齿轮箱这种情况,但是大多数的撞击系统的动力学响应还是可由单自由度系统的动力学响应组合而成^[5].所以本文拟将 KL 展开法应用于柔性撞击系统中,针对一柔性悬臂梁撞击系统,寻求以较少数量模态准确模拟系统动力学特性的方法,为下一步对系统实施控制作好前期准备.

1 柔性撞击系统模型的建立

考虑如图 1 所示的柔性悬臂梁系统,其自由端的横向变形 $w(x, t)$ 受到长度为 50 mm 的两个弹性块的约束.

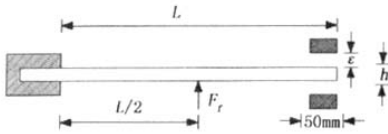


图1 柔性悬臂梁撞击系统
Fig.1 Flexible cantilever impact system

将弹性块离散为线弹性弹簧模型进行模拟(如图 2),忽略波动效应的影响,根据 Euler-Bernoulli 原理,系统动力学方程为

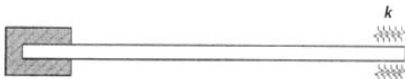


图2 弹簧离散化示意图
Fig.2 Diagram for discreted springs

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = F_f \sin(\omega_f t) \delta(x - x_f) + \sum_{i=1}^N F_{\text{impact}}(t) \delta(x - x_k) \quad (1)$$

此处 F_f 为柔性梁在 $x_f = L/2$ 处受到的正弦简谐力的幅值; ω_f 为其频率; $\delta(\cdot)$ 为 delta 函数; x_k 为离散化弹簧的位置向量; F_{impact} 为撞击力,且可由下式确定

$$\begin{cases} 0, & |w(x_k, t)| \leq \epsilon \\ -k[w(x_k, t) - \epsilon \text{sign}(w(x_k, t))], & |w(x_k, t)| > \epsilon \end{cases} \quad (2)$$

其中 k 为弹簧的刚度,本文取 10^9 N/m, ϵ 为梁端距离弹性约束块的距离.

在发生撞击的时刻,离散化弹簧对柔性梁梁端的约束条件为

$$\epsilon = w(x_k, t) \quad (3)$$

偏微分方程(1)可用模态方法进行数值求解. 近似解的模态展开形式为 $\hat{w}(x, t) = \sum_i q_i(t) \phi_i(x)$. 此时系统的模态可取为

$$\begin{aligned} \phi_i(x) = & \cosh \beta_i x - \cos \beta_i x - \\ & \frac{\sin \beta_i L - \sin \beta_i L}{\cosh \beta_i L + \cos \beta_i L} \times \\ & (\sinh \beta_i x - \sin \beta_i x) \end{aligned} \quad (4)$$

其中 β_i 为超越方程 $\cos \beta L \cosh \beta L = 1$ 的近似解. 数值求解表明此处取前 10 阶模态即可准确描述系统的动力学特性.

2 Karhunen-Loève 展开

对于系统的动力学方程,设方程的解流 $u(x, t)$ 是时间和空间的函数,且 $x \in \Pi, \Pi$ 为 Hilbert 空间,时间 $t \in [0, \infty)$.

为了定义流的相关张量,需将系统建模为二阶随机过程. 在计算过程中,我们总是想避免与流相关的样本空间、 σ -代数和概率度量等数学运算, KL 方法就可以达到这个目的. 此处需要两个附加假设条件:

- 1) 流为紧的、时不变的和各态历经的.

设 $v(x, t)$ 是平均流偏差

$$v(x, t) = u(x, t) - E[u(x, t)] \quad (5)$$

因此 $v(x, t)$ 是具有零平均值的随机过程,其相关张量等于其协方差张量. 如 $v(x, t)$ 为实数,则可通过下面的并矢乘积来得到其空间相关函数

$$R(x, x') = E[v(x, t) \otimes v(x', t)] \quad (6)$$

- 2) 假定流 $u(x, t)$ 和 $v(x, t)$ 是连续的,即 $R(x, x')$ 在空间 Π 上连续.

为了找到体现系统主要特征的降阶模型,我们可以采用下面的展开方式

$$v(x, t) = \sum_k a_k(t) \varphi_k(x) \quad (7)$$

和

$$E[a_k(t)a_l(t)] = \lambda_k \delta_{kl} \quad (8)$$

如模态是不相关的,则

$$\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \int_{\Pi} \sum_{j=1}^n \varphi_{kj}(x) \varphi_{lj}(x) dx = \delta_{kl} \quad (9)$$

即集 $\{\varphi_k\} \in \mathfrak{R}_2^n$ 为标准正交的. 将方程(7)代入(6),并利用关系式(8),可得

$$R(x, x') = \sum_k \lambda_k \varphi_k(x) \otimes \varphi_k(x') \quad (10)$$

根据定义和假设条件,可知 $R(x, x')$ 为半正定的、连续的赫尔米特算子. Mercer 定理保证了方程(10)中 $R(x, x')$ 表达式的存在及其唯一性. 其中 $\{\varphi_k\}$ 为算子 $R(x, x')$ 的本征函数, $\{\lambda_k\}$ 为相应的非负的实数本征值,所以

$$\int_{\Pi} R(x, x') \varphi_k(x') dx' = \lambda_k \varphi_k(x) \quad (11)$$

Karhunen-Loève 原理表明:一个带有协方差张量 $R(x, x')$ 的连续的二阶随机过程可用与方程(7)相似的形式对其进行展开.

因此流 $u(x, t)$ 可通过方程(7)的截断及平均流相加进行重新构建

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^K a_k(t) \varphi_k(x) + E[u(x, t)] \quad (12)$$

此时系数 $a_k(t)$ 可通过下式得到

$$a_k(t) = \langle v(x, t), \varphi_k(x) \rangle \quad (13)$$

根据前面的假设,本征值也可重新表达为

$$\lambda_k = \langle \varphi_k, R \varphi_k \rangle = E[|\langle \varphi_k, v \rangle|^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\langle \varphi_k, v \rangle|^2 dt \quad (14)$$

3 KL 正交模态的组成

在动态系统的 N 个地方测量或计算系统的位移,记为 $u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)$. 对这些位移进行 M 次取样,我们就可组成下面的 $N \times M$ 的矩阵

$$U = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_N] = \begin{bmatrix} u_1(t_1) & u_2(t_1) & \dots & u_N(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1(t_M) & u_2(t_M) & \dots & u_N(t_M) \end{bmatrix} \quad (15)$$

利用统计原理和上面的假设,系统的平均流偏差矩阵为

$$V = U -$$

$$\frac{1}{M} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M u_1(t_i) & \sum_{i=1}^M u_2(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^M u_N(t_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^M u_1(t_i) & \sum_{i=1}^M u_2(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^M u_N(t_i) \end{bmatrix} \quad (16)$$

此时 $N \times N$ 的空间相关矩阵为

$$R = \frac{1}{M} V^T V \quad (17)$$

于是 KL 正交模态就可由矩阵 R 的本征向量给出. KL 正交本征值也可由矩阵 R 的本征值给出. 很明显,矩阵的维数由取样点的数目 N 确定.

4 数值模拟

系统具体参数如下:钢梁长度 $L = 510$ mm,厚度 $h = 5.25$ mm,宽度 $b = 24.85$ mm. 在本算例中, $x_k = \{460; 460.1; 460.2; \dots; 510\}$ mm. 假设柔性梁受到幅值为 $F_f = 140$ N, 频率为 $\omega_f = 100$ rad/s 的简谐力.

降阶方法的具体实施步骤为:

1) 利用方程(3)提供的模态在 30 s 内对梁进行模拟. 在梁上每隔 1 mm 的点上,每隔 0.03 s 对位移进行取样,因此每个点有 1000 个取样数据. 组成方程(15)中的矩阵 U .

2) 按方程(16)与(17)分别求得矩阵 V, R .

3) 求解矩阵 R 的本征向量,即得到要利用的 KL 模态.

4) 利用方程(13)求解系数 $a_k(t)$.

5) 利用方程(12)就可得到系统降阶后的动力学响应.

数值模拟结果见图 3 和图 4.

从图中可以发现:在初始时刻,系统几乎以其一阶模态振动,由于系统的柔性,在经历第一次撞击后,高阶模态被激活,在很短的时间内产生了多次碰撞. 比较梁端的实际变形(由方程(4)给出的前 10 阶模态得到)与低阶 KL 模态模拟变形,可以看出,利用 Karhunen-Loève 展开方法,取前三阶,甚至前二阶 KL 正交模态即可较为准确的描述柔性梁自由端的位移,说明 Karhunen-Loève 展开方法应用于此是可行的,而且效率非常高.

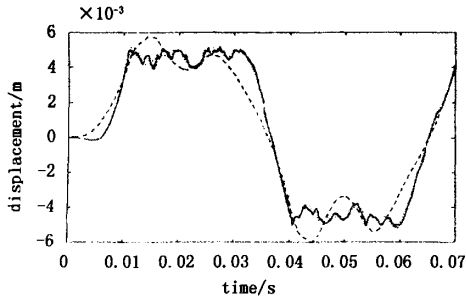


图 3 柔性梁自由端位移

—— 实际梁端变形 - - - - 一阶模态模拟变形
 - - - - 二阶模态模拟变形 - - - - 三阶模态模拟变形

Fig. 3 Displacements for free point of flexible beam

—— Tip deformation of real beam
 - - - Simulation deformation of the first order mode
 - - - Simulation deformation of the second order mode
 - - - Simulation deformation of the third order mode

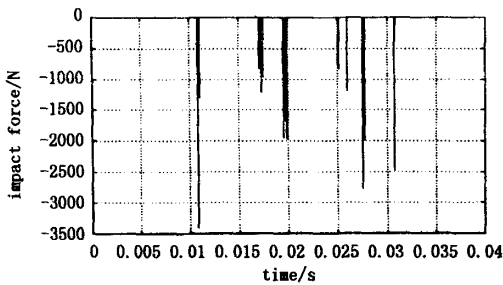


图 4 撞击力示意图

Fig. 4 Diagram of impact force

5 结论

本文分别对柔性悬臂梁撞击系统的建模及 Karhunen-Loève 展开作了描述,然后将 KL 展开成功地应用于撞击系统的降阶过程中.数值结果表明,本文中的方法是可行的,并具有很高的效率,为系统实施控制研究打下了基础.

参 考 文 献

- 1 陈滨. 柔性多体系统(FMS)动力学研究的若干问题. 一般力学(动力学、振动与控制)最新进展. 北京: 科学出版社, 1993 (Chen Bin. Some issues on dynamics of flexible multibody systems. Recent developments in dynamics, vibration and control. Beijing: Science Press, 1993 (in Chinese))
- 2 Sirovich L. Turbulence and the dynamics of coherent structures, part I: coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1987, 45(3): 561~571
- 3 Steindl A, Troger H. Methods for dimension reduction and their application in nonlinear dynamics. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38 (10~13): 2131~2147
- 4 Azeez MFA, Vakakis AF. Proper orthogonal decomposition (POD) of a class of vibroimpact oscillations. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 240(5): 859~889
- 5 Cusumano JP, Bai BY. Period-infinity periodic motions, chaos, and spatial coherence in a 10 degree of freedom impact oscillator. *Chaos Solit Frac*, 1993, 3(5): 515~535

REDUCED-ORDER METHOD FOR FLEXIBLE IMPACT SYSTEM BASED ON KARHUNNEN-LOËVE EXPANSION*

Deng Zichen^{1,2} Fan Xiaolong¹ Zhao Yuli¹

(1. Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(2. State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment,

Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract First this paper established the dynamic equation for a typical flexible cantilever impact system by the Euler-Bernoulli principle, and gave the corresponding model analytical method. Then, based on some assumptions and definitions, the reduced-order model was given, which can embody the main characteristics, and the eigen-value of the system can be expressed deeply. Finally, the presented method was applied to the reduced-order process of the flexible cantilever impact system, and the method was illustrated by a corresponding numerical example. The results showed that the dynamic characteristics of the system can be exactly simulated by few modes, which provides a foundation for studying the control problem of the flexible impact system.

Key words Karhunen-Loève expansion, flexible impact system, reduced-order

Received 10 October 2004, revised 08 November 2004.

* The project supported by National Natural Science Foundation of China (10372084); Doctoral Program Foundation of Education Ministry of China (20010699016); Natural Science Foundation of Shanxi Province of China(2002A17); Open Foundation of State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment and Doctorate Foundation of Northwestern Polytechnical University.