

# 求解双曲守恒律及其对流扩散方程的中心迎风方法

刘彩侠<sup>1</sup> 封建湖<sup>2</sup>

(1. 河南工业大学数理系, 郑州 450052)(2. 长安大学理学院, 西安 710064)

**摘要** 提出了一种新的求解双曲守恒律方程(组)的四阶半离散中心迎风差分方法. 空间导数项的离散采用四阶 CWENO(central weighted essentially non-oscillatory)的构造方法, 使所得到的新方法在提高精度的同时, 具有更高的分辨率. 使用该方法产生的数值粘性要比交错的中心格式小, 而且由于数值粘性 with 时间步长无关, 从而时间步长可根据稳定性需要尽可能的小.

**关键词** 双曲守恒律, 中心半离散, 对流扩散方程

## 引言

考虑一维双曲守恒律方程(组)以及对流扩散方程

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad x \in R \quad (1)$$

$$u_t + f(u)_x = Q(u, u_x)_x \quad x \in R \quad (2)$$

其中  $u = u(x, t)$  是空间  $(x, t)$  中的二维守恒型变量,  $f(u(x, t))$  是数值通量, 耗散数值通量  $Q(u, u_x)$  满足:  $\nabla_s Q(u, s) \geq 0, \forall u, s$ .

众所周知式(1)和式(2)在实际应用中非常重要, 因为它是许多物理现象的控制方程, 因此求解好式(1)和式(2)尤为重要. 对于上述方程的求解, 人们做了大量的研究工作, 其求解方法大致可分两大类: 迎风差分格式、中心差分格式. 本文只对应用较广、求解过程较为简单、易于实现的中心差分格式进行讨论. 一阶中心差分格式是在1954年由Lax和Friedrichs提出的, 在此基础上又出现了许多高阶精度的交错中心差分格式. D. Levy, G. Rupp 和 G. Russo 在文[1]中给出四阶精度的CWENO交错中心格式求解双曲守恒律方程. 但通过分析截断误差可知, 交错中心格式产生的数值粘性 with  $O(\Delta x^{2r}/\Delta t)$  同阶, 当  $\Delta t$  较小时, 在间断或梯度较大的地方会形成一个较大的过渡区域. 为克服此缺点, 高分辨率中心半离散差分方法应运而生, 为了在一个与时间步长有关的非光滑区域上进行积分

近似, 引入了左、右局部波速. A. Kurganov 与 E. Tadmor 在文[2]中首次提出用高分辨率中心迎风格式来求解守恒律方程及对流扩散方程, 该格式所产生的数值粘性 with  $O(\Delta x^{2r-1})$  同阶; 随后 A. Kurganov 与 E. Tadmor 在文[3]中给出了三阶中心半离散求解方法. 本文正是基于文[3]结合文[1], 构造了一种新的四阶半离散中心迎风格式求解双曲守恒律方程. 最后给出一些典型算例, 以说明该方法具有高精度、高分辨率等优点.

## 1 全离散格式

方便起见考虑均匀网格, 记空间步长为  $\Delta x, x_j = j\Delta x$ . 为得到半离散格式, 首先回顾全离散格式(仅对与半离散格式有关的细节)的推导过程. 为了在一个与时间步长有关的空间区域上对 Riemann 扇进行积分近似, 引入了左、右局部波速, 假设在每个单元  $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$  上由  $\{\bar{u}_j^n\}$  得到的四阶 CWENO 分片插值多项式  $P_j(x, t^n)$  为<sup>[1]</sup>

$$P_j(x, t^n) = A_j + B_j(x - x_j) + \frac{1}{2} C_j(x - x_j)^2 \quad (3)$$

单元边界处可能间断的最大传播速度为

$$a_{j+1/2}^n := \min \left\{ \rho \left( \frac{\partial f}{\partial u}(u_{j+1/2}^-) \right), \rho \left( \frac{\partial f}{\partial u}(u_{j+1/2}^+) \right) \right\},$$

其中

$$u_{j+1/2}^+ = P_{j+1}(x_{j+1/2}, t^n),$$

$$u_{j+1/2}^- = P_j(x_{j+1/2}, t^n)$$

记  $x_{j+1/2,l}^n = x_{j+1/2} - a_{j+1/2}^n \Delta t$ ,  $x_{j+1/2,r}^n = x_{j+1/2} + a_{j+1/2}^n \Delta t$ , 则在  $[x_{j+1/2,l}^n, x_{j+1/2,r}^n] \times [t^n, t^{n+1}]$  和  $[x_{j-1/2,r}^n, x_{j+1/2,l}^n] \times [t^n, t^{n+1}]$  上分别对(1)积分得

$$\begin{aligned} \bar{w}_{j+1/2}^{n+1} = & \frac{1}{x_{j+1/2,r}^n - x_{j+1/2,l}^n} \left[ \int_{x_{j+1/2,l}^n}^{x_{j+1/2,r}^n} P_{j+1}^n(x) dx + \right. \\ & \left. \int_{x_{j+1/2,l}^n}^{x_{j+1/2,r}^n} P_{j+1}^n(x) dx \right] - \\ & \frac{1}{x_{j+1/2,r}^n - x_{j+1/2,l}^n} \times \\ & \int_{t^n}^{t^{n+1}} [f(u(x_{j+1/2,r}^n, t)) - \\ & f(u(x_{j+1/2,l}^n, t))] dt \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_j^{n+1} = & \frac{1}{x_{j+1/2,r}^n - x_{j-1/2,r}^n} \left[ \int_{x_{j-1/2,r}^n}^{x_{j+1/2,r}^n} P_j^n(x) dx - \right. \\ & \left. \int_{t^n}^{t^{n+1}} (f(u(x_{j+1/2,l}^n, t)) - \right. \\ & \left. f(u(x_{j+1/2,r}^n, t))) dt \right] \end{aligned} \quad (5)$$

至此得到了两组非均匀网格上的单元均值  $\{w_{j+1/2}^{n+1}, w_j^{n+1}\}$ , 为了得到原来均匀网格上的单元均值  $\{\bar{u}_j^{n+1}\}$ , 可按如下方法进行. 首先对于给定的单元均值  $\bar{w}_{j+1/2}^{n+1}, \bar{w}_j^{n+1}$ , 由速度的有限性知, 方程(1)的解在  $\{x_j\}$  附近连续, 从而间断只可能出现在  $\{x_{j+1/2}\}$  附近. 进而假设在非光滑区域  $\tilde{I}_{j+1/2} = [x_{j+1/2,l}^n, x_{j+1/2,r}^n]$  和光滑区域  $\tilde{I}_j = [x_{j-1/2,r}^n, x_{j+1/2,l}^n]$  上的四阶 CWENO<sup>[1]</sup> 分片插值多项式为(光滑区域  $\tilde{I}_j$  上不用进行数据重构因最终还是要达到某一平均数)

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{j+1/2}^n(x) = & \tilde{A}_{j+1/2} + \tilde{B}_{j+1/2}(x - x_{j+1/2}) + \\ & \frac{1}{2} \tilde{C}_{j+1/2}(x - x_{j+1/2})^2, \\ \tilde{w}_j^{n+1}(x) = & \bar{w}_j^{n+1} \end{aligned}$$

则  $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$  上的单元均值为

$$\begin{aligned} \bar{u}_j^{n+1} = & \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{w}_{j-1/2}^{n+1} dx + \right. \\ & \left. \int_{x_{j-1/2,r}}^{x_{j+1/2,l}} \tilde{w}_j^{n+1} dx + \right. \\ & \left. \int_{x_{j+1/2,l}}^{x_{j+1/2,r}} \tilde{w}_{j+1/2}^{n+1} dx \right] \end{aligned} \quad (6)$$

## 2 半离散格式

利用上节中的结果得到中心半离散格式为

$$\frac{d}{dt} \bar{u}_j(t) = \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t} \quad (7)$$

把式(6)代入式(7)得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{u}_j(t) = & \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\Delta x} a_{j-1/2}^n \tilde{A}_{j-1/2} - \right. \\ & \frac{1}{\Delta x} (a_{j-1/2}^n + a_{j+1/2}^n) \bar{w}_j^{n+1} + \\ & \left. \frac{1}{\Delta x} a_{j+1/2}^n \tilde{A}_{j+1/2} + \frac{1}{\Delta t} (\bar{w}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n) \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时所有的黎曼扇宽度趋于零, 所以

$$\tilde{A}_{j+1/2} = \bar{w}_{j+1/2}^{n+1}, \tilde{A}_{j-1/2} = \bar{w}_{j-1/2}^{n+1} \quad (9)$$

利用式(3)可得到

$$\begin{aligned} u(x_{j+1/2,r}^n, t) & \rightarrow R_{j+1}(x_{j+1/2}, t) = \\ & A_{j+1} - \frac{\Delta x}{2} B_{j+1} + \frac{\Delta x^2}{8} C_{j+1}, \\ u(x_{j+1/2,l}^n, t) & \rightarrow R_j(x_{j+1/2}, t) = \\ & A_j + \frac{\Delta x}{2} B_j + \frac{\Delta x^2}{8} C_j \end{aligned} \quad (10)$$

把式(4), (5), (9)代入式(7)得所要的求解(1)的守恒型四阶中心半离散格式为

$$\frac{d\bar{u}_j}{dt} = \frac{H_{j+1/2}(t) - H_{j-1/2}(t)}{\Delta x} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} H_{j+1/2}(t) = & \frac{f(u_{j+1/2}^+(t)) + f(u_{j+1/2}^-(t))}{2} - \\ & \frac{a_{j+1/2}(t)}{2} [u_{j+1/2}^+(t) - u_{j+1/2}^-(t)] \end{aligned} \quad (12)$$

注 对一维情况下的问题(2), 右端项的四阶中心近似为

$$\begin{aligned} Q_j(t) = & \frac{1}{12\Delta x} [-Q(u_{j+2}(t), (u_x)_{j+2}) + \\ & 8Q(u_{j+1}(t), (u_x)_{j+1}) - \\ & 8Q(u_{j-1}(t), (u_x)_{j-1}) + \\ & Q(u_{j-2}(t), (u_x)_{j-2})] \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} (u_x)_{j+2} = & \frac{1}{12\Delta x} [25u_{j+2}(t) - 48u_{j+1}(t) + \\ & 36u_j(t) - 16u_{j-1}(t) + 3u_{j-2}(t)] \\ (u_x)_{j+1} = & \frac{1}{12\Delta x} [3u_{j+2}(t) + 10u_{j+1}(t) - \\ & 18u_j(t) + 6u_{j-1}(t) - u_{j-2}(t)] \\ (u_x)_{j-1} = & \frac{1}{12\Delta x} [u_{j+2}(t) - 6u_{j+1}(t) + \\ & 18u_j(t) - 10u_{j-1}(t) - 3u_{j-2}(t)] \end{aligned}$$

$$(u_x)_{j-2l} = \frac{1}{12\Delta x}[-3u_{j+2}(t) + 16u_{j+1}(t) - 36u_j(t) + 48u_{j-1}(t) - 25u_{j-2}(t)]$$

$u_j(t)$  是上一层所求的  $u(x, t)$  在  $I_j$  单元均值.

### 3 数值算例

为在时间方向实现四阶近似, 采用四阶 SSP Runge-Kutta<sup>[4]</sup> 方法求解常微分方程. 以下各图中, 圆圈代表四阶精度求解格式所得结果, 实线是精确解.

#### 算例 1 一维线性对流方程

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & x \in [0, 2\pi] \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (14)$$

周期性初值  $u_0(x)$  以  $2\pi$  为周期, 采用周期性边界条件. 此算例用来检验算法的精度, 由结果可以看

出本文所构造的求解方法给出了较为满意的结果.

初值:  $u_0(x) = \sin^4(x)$ , 表 1 分别给出了  $N = 40, 80, 160, 320$  时  $t = 1.0$  的  $L^1, L^\infty$  范数误差, 及计算精度.  $L^1, L^\infty$  范数意义下的误差定义为

$$L^1 \text{ error: } \|\text{error}\|_{L^1} =$$

$$\Delta x \cdot \sum_{j=1}^N |u(x_j, t^n) - \bar{v}_j^n|$$

$$L^\infty \text{ error: } \|\text{error}\|_{L^\infty} =$$

$$\max_{j=1, N} |u(x_j, t^n) - \bar{v}_j^n|$$

其中  $u(x_j, t^n)$  是方程(14) 在  $t^n$  时刻的精确解,  $\bar{v}_j^n$  是  $t^n$  时刻的数值解. 表中 accuracy 称为计算阶或计算精度,  $\text{accuracy} = \log_2 \frac{e_{\Delta x}}{e_{2 \cdot \Delta x}}$ ,  $e_{\Delta x}$  表示网格步长为  $\Delta x$  时的误差, 这种定义只有在  $\Delta x$  足够小时才有意义.

表 1 对流方程  $u_t + u_x = 0, u_0(x) = \sin^4(x), t = 1.0, \lambda = 0.2$  的范数误差和计算精度

Table 1 Error and accuracy of equation  $u_t + u_x = 0, u_0(x) = \sin^4(x), t = 1.0, \lambda = 0.2$

N	R = 3		R = 4	
	$L^1$ error	$L^1$ accuracy	$L^1$ error	$L^1$ accuracy
40	1.7384E - 01	--	1.6585E - 02	--
80	4.12208E - 02	2.08	1.44813E - 03	3.52
160	6.82054E - 03	2.60	9.50801E - 05	3.93
320	8.96809E - 04	2.93	1.03548E - 05	3.20

N	R = 3		R = 4	
	$L^\infty$ error	$L^\infty$ accuracy	$L^\infty$ error	$L^\infty$ accuracy
40	6.48360E - 02	--	6.40626E - 03	--
80	2.45672E - 02	1.40	1.01501E - 03	2.66
160	5.76874E - 03	2.09	5.55322E - 05	4.19
320	3.86469E - 04	3.90	3.13155E - 06	4.15

#### 算例 2 考虑 Burgers 方程

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(2\pi x)), & x \in (1/3, 2/3) \\ \frac{1}{2} + \sin(2\pi x), & x \in [0, 1/3] \cup [2/3, 1] \end{cases}$$

显然初始值具有两个间断点, 采用周期性边界条件,  $T = 0.2$  时的解见图 1.

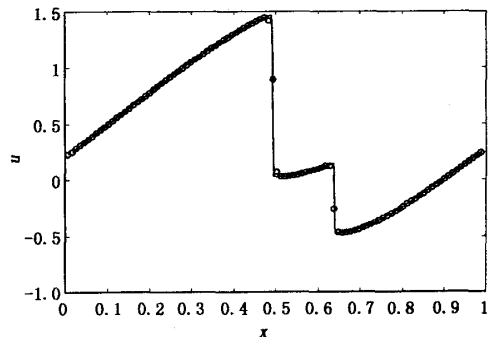


图 1 Burgers 方程  $T = 0.2, N = 100$

Fig. 1 Burgers equation  $T = 0.2, N = 100$

#### 算例 3 此算例考虑数值通量非凸的情况, 问

题如下

$$u_t + \left[ \frac{4u^2}{4u^2 + (1-u^2)} \right]_x = 0,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

采用穿透性边界条件,  $t = 0.4$  时的解见图 2.

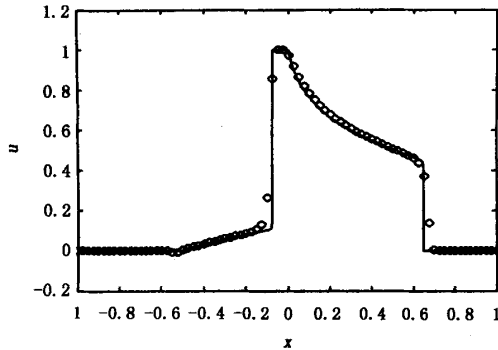


图 2 Buckley-leverett 问题  $T = 1.2, N = 100$

Fig.2 Buckley-leverett problem  $T = 1.2, N = 100$

**算例 4** 考虑方程(Burgers-type equation with saturating dissipation)

$$u_t + (u^2)_x = \left[ \frac{u_x}{(1.0 + u_x^2)^2} \right],$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1.2, & x < 0 \\ -1.2, & x > 0 \end{cases}$$

该问题在  $x = 0$  处形成一个子激波, 因此求解该问题十分具有挑战性,  $t = 1.5$  时的解如图 3.

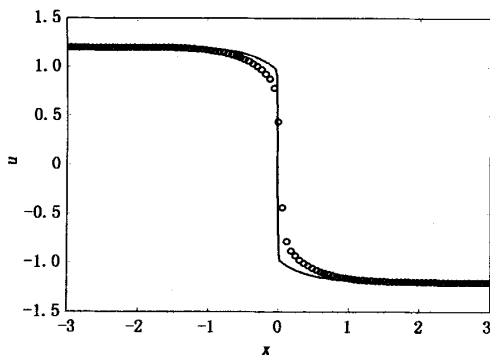


图 3 Burgers-type 方程  $T = 1.5, N = 100$

Fig.3 Burgers-type equation  $T = 1.5, N = 100$

**算例 5** 考虑欧拉方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} m \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix} = 0,$$

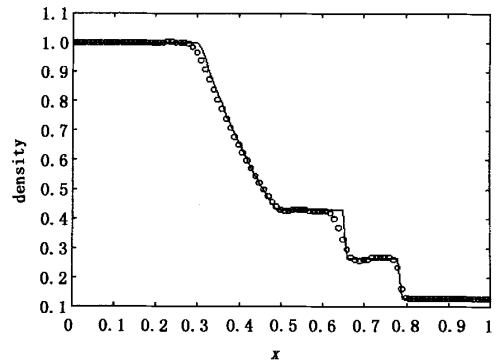
$$p = (\gamma - 1)(E - \frac{\rho}{2} u^2)$$

其中  $\rho, u, m, p, E$  分别是密度、速度、动量、压强、总内能,  $n = \rho u$  考虑 Sod 问题:

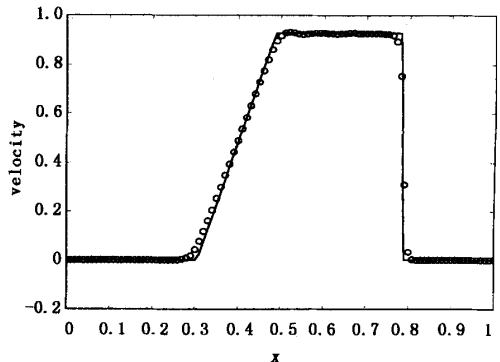
初值条件为

$$u(x,0) = \begin{cases} u_L = (1, 0, 2.5)^T, & x < 0.5 \\ u_R = (0.125, 0, 0.25)^T, & x > 0.5 \end{cases}$$

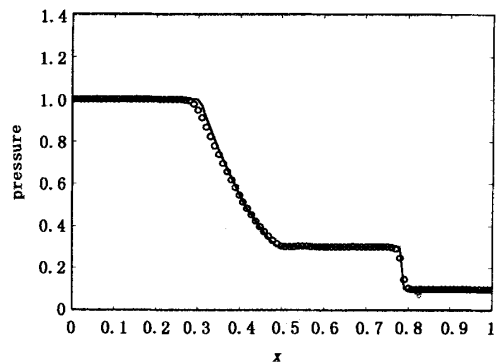
$T = 0.1644$  时的结果见图 4.



(a)



(b)



(c)

图 4 Sod 问题,  $N = 100$

Fig.4 Sod Problem,  $N = 100$

#### 4 结论

本文构造了一种新的高阶精度的、高分辨率的中心半离散格式,与迎风格式相比不用求解 Riemann 问题、不用进行特征分解、便于推广到复杂方程的求解.该方法在提高精度的同时为了进一步减小数值耗散,在数值重构的过程中引入了局部波速,而且对常微分方程的求解采用了具有强收敛性的 SSP Runge-Kutta 方法.从数值算例可以看出该求解方法给出了较为满意的结果.

#### 参 考 文 献

1 Levy D, Puppo G, Russo G. Central WENO schemes for

hyperbolic systems of conservation laws. *Appl Numer Math Anal*, 1999, 33: 547~571

2 Kurganov A, Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations. *J Comput Phys*, 2000, 160: 241~282

3 Kurganov A, Levy D. A third-order semi-discrete central scheme for conservation laws and convection-diffusion equations. *SIAM J Sci Comput*, 2000, 22: 1461~1488

4 Gottlieb S, Shu CW, Tadmor E. Strong stability-preserving high order time discretization methods. *SIAM Review*, 2001, 43: 89~112

## A NEW SEMIDISCRETE CENTRAL SCHEME FOR HYPERBOLIC CONSERVATION LAWS AND CONVECTION-DIFFUSION EQUATIONS

Liu Caixia<sup>1</sup> Feng Jianhu<sup>2</sup>

(1. Department of Mathematics and Physics, Henan University of Technology, Zhengzhou 450052, China)

(2. School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

**Abstract** This paper presented a new semi-discrete central scheme for hyperbolic system of conservation laws. By using the fourth-order CWENO reconstruction, the new scheme has properties of higher order accuracy and high resolution for discontinuities. Because the new scheme has less dissipation, which is independent of timesteps, than the staggered central scheme, it can be efficiently used with timesteps as small as the requirement of the numerical stability.

**Key words** hyperbolic conservation, semi-discrete central, convection diffusion equation