Fokker-Planck 方程的守恒量*

秦茂昌[1] 梅凤翔[1] 许学军[2]
(1. 北京理工大学理学院力学系, 北京 100081)(2. 浙江师范大学物理系, 金华 321004)

摘要 利用系统运动方程的线性化方程及其伴随方程的相互关系，以及散度表达式在全 Euler 算子作用下为零这一特性，通过引进守恒量乘子来求得运动系统的守恒量. 该方法不需要运动系统的 Lagrange 函数. 以 Fokker-Planck 方程为例，利用该方法可以很容易给出它的无穷多守恒量.

关键词 Fokker-Planck 方程, 守恒量, 伴随系统

引言

寻找守恒量在物理力学系统研究中是非常重要的. 特别是在系统运动方程的解难以找到的情况下，守恒量的求得有助于我们认识系统的运动规律. 用对称性理论来研究力学系统的守恒量是数学物理科学中的一个近代发展方向，主要有 Noether 对称性、Lie 对称性及形式不变性等[1~6]. 利用 Lie 对称性寻求系统的守恒量，往往需要通过 Noether 对称性. 最近 Anco. 等人提出了由系统运动方程求守恒量的新方法[7~9]. 该方法表明当不能求得运动系统的 Lagrange 函数的时候，可以通过引入守恒量乘子，然后利用散度表达式在全欧拉算子作用下为零这一特性以及系统运动方程的线性化方程与伴随方程之间的相互关系求出守恒量乘子，再利用之来构造相应的守恒流及守恒密度从而得到系统守恒量. 在此方法的基础上，将对 Fokker-Planck 方程的守恒量进行讨论. 首先简要叙述方法原理，然后再以 Fokker-Planck 方程为例进行说明.

1 原理

为了叙述方便，首先给出几个定义. 设系统的运动方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g(t,x,u,\partial_x u,\cdots,\partial_x^m u)=0 \qquad (1)$$

若对于方程(1)的任何解 $u(t,x)$ 存在 $\Phi^t(t,x,u,\partial_x u,\cdots,\partial_x^m u)$, $\Phi^x(t,x,u,\partial_x u,\cdots,\partial_x^m u)$, 满足

$$D_t\Phi^t(t,x,u,\partial_x u,\cdots,\partial_x^m u)+ D_x\Phi^x(t,x,u,\partial_x u,\cdots,\partial_x^m u)=0 \qquad (2)$$

其中 D 为全微分算子，则称散度表达式(2)给出了方程(1)的守恒量，Φ^t 和 Φ^x 分别称为守恒流及守恒密度，对于偏微分方程而言求其守恒量就是要求出相应守恒流及守恒密度. 对于方程(1)的任何解 $u(t,x)$，若存在 $\Theta^i(t,x,\partial u,\cdots,\partial_x^k)$, $\Psi^{ij}(t,x,\partial u,\cdots,\partial_x^k)$, $\Psi^{ij}=-\Psi^{ji}$ 以及如此选取

$$\Phi^t=D_t\Theta^i,\ \Phi^x=-D_t\Theta^i+D_j\Psi^{ij} \qquad (3)$$

都能使得等式(2)成立. 则将这样的守恒量称为平凡的，我们只对非平凡的守恒量感兴趣. 由式(2)给出的守恒量是非平凡的当且仅当守恒流及守恒密度不满足关系表达式(3). 若存在守恒流 $\Phi^t(t,x,\partial u,\cdots,\partial_x^k u)$ 及守恒密度 $\Phi^x(t,x,\partial u,\cdots,\partial_x^k u)$ 使得对任意函数 $u(t,x)$ 都有

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}+g(t,x,u,\partial_x u,\cdots,\partial_x^m u)\right]\Lambda= D_t\Phi^t+D_x\Phi^x \qquad (4)$$

则将 Λ 称为方程(1)的守恒量乘子. 为了消除平凡守恒量及简化计算我们需要进一步假设守恒量乘子的形式为 $\Lambda(x,t,\partial_x u,\partial_x^2 u,\cdots,\partial_x^k u)$，并以乘子中出现的最高阶导数项次数标记乘子的阶数. 利用散度表达式在全 Euler 算子作用下为零这一特点，由等式(4)得到

$$0=E_u\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}+g(t,x,\partial_x u,\cdots,\partial_x^m u)\right)\Lambda\right] \qquad (5)$$

其中 $E_u=\partial_u-D_t\partial_{u_t}-D_x\partial_{u_x}+D_tD_x\partial_{u_{xt}}+\cdots$ 是 Euler 算子. 由(5)式进一步展开得到

$$0=E_u\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}+g(t,x,\partial_x u,\cdots,\partial_x^m u)\right)\Lambda\right]=$$

2004-10-29 收到第 1 稿.
* 国家自然科学基金资助项目(10272021)

$$- D_t\Lambda + \Gamma_g^*\Lambda + \Gamma_\Lambda^*(\frac{\partial u}{\partial t} + g(t,x,\partial_x u,\cdots,\partial_x^m u)) \tag{6}$$

其中算子 Γ_g^* 是函数 $g(x,t,\partial_x u,\partial_x^2 u,\cdots,\partial_x^k u)$ 的线性化算子 Γ_g 的伴随算子，Γ_Λ^* 是守恒量乘子 $\Lambda(x,t,\partial_x u,\partial_x^2 u,\cdots,\partial_x^k u)$ 的线性化算子 Γ_Λ 的伴随算子，其具体表达式分别给出如下

$$\begin{aligned}
\Gamma_g\Delta &= \frac{\partial g}{\partial u}\Delta + \frac{\partial g}{\partial u_x}D_x\Delta + \frac{\partial g}{\partial u_{xx}}D_x^2\Delta + \cdots + \frac{\partial g}{\partial u_{i_1 i_2\cdots i_m}}D_{i_1 i_2\cdots i_m}\Delta,\\
\Gamma_g^*\Xi &= \frac{\partial g}{\partial u}\Xi - D_x(\frac{\partial g}{\partial u_x}\Xi) + D_x^2(\frac{\partial g}{\partial u_{xx}}\Xi) + \cdots + (-1)^m D_{i_1 i_2\cdots i_m}(\frac{\partial g}{\partial u_{i_1 i_2\cdots i_m}}\Xi),\\
\Gamma_\Lambda\Delta &= \frac{\partial \Lambda}{\partial u}\Delta + \frac{\partial \Lambda}{\partial u_x}D_x\Delta + \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{xx}}D_x^2\Delta + \cdots + \frac{\partial \Lambda}{\partial u_{i_1 i_2\cdots i_m}}D_{i_1 i_2\cdots i_m}\Delta,\\
\Gamma_\Lambda^*\Xi &= \frac{\partial \Lambda}{\partial u}\Xi - D_x(\frac{\partial \Lambda}{\partial u_x}\Xi) + D_x^2(\frac{\partial \Lambda}{\partial u_{xx}}\Xi) + \cdots + (-1)^m D_{i_1 i_2\cdots i_m}(\frac{\partial \Lambda}{\partial u_{i_1 i_2\cdots i_m}}\Xi).
\end{aligned} \tag{7}$$

具体求解过程，首先利用(6)，(7)两式解出守恒量乘子 Λ，再进一步由守恒量乘子构造出方程(1)的守恒流及守恒密度. 具体构造守恒流及守恒密度时利用下面等式[1]

$$\begin{aligned}
\Phi^t &= \int_0^1 \mathrm{d}\lambda(u-u_0)\Lambda[u_{(\lambda)}] + t\int_0^1 \mathrm{d}\lambda K(\lambda t,\lambda x),\\
\Phi^x &= x\int_0^1 \mathrm{d}\lambda\lambda K(\lambda t,\lambda x) + \int_0^1 \mathrm{d}\lambda(S[u-u_0,\Lambda[u_{(\lambda)}];g[u_{(\lambda)}]] + S[u-u_0,g[u_{(\lambda)}]-\lambda g[u]+(1-\lambda)u_{0t};\Lambda[u_{(\lambda)}]]).
\end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}
W\Gamma_g V - V\Gamma_g^* W &= D_x S[V,W;g],\\
W\Gamma_\Lambda V - V\Gamma_\Lambda^* W &= D_x S[V,W;\Lambda],\\
K(x,t) &= ((\frac{\partial u_{(\lambda)}}{\partial t} + g[u_{(\lambda)}])\Lambda[u_{(\lambda)}])\Big|_{\lambda=0}
\end{aligned} \tag{9}$$

$u_{(\lambda)} = \lambda u + (1-\lambda)u_0$. 利用式(8)，式(9)来构造守恒流及守恒密度时，若 $u=0$ 时守恒量乘子 Λ 及函数 g 都是非退化的则可以选取 $u_0=0$，反之就适当选取 u_0 保证乘子 Λ 及函数 g 都是非退化的，u_0 取值不同对应的守恒量仅仅相差一个平凡守恒量(若两个守恒量相差一个平凡的守恒量则将它们视为一样的). 更进一步，若 $u=u_0=0$ 是运动方程的解时，则可令积分核 $K(x,t)=0$ 以简化运算降低求解难度.

2 应用

以下，我们用前面的原理来求 Fokker-Planck 方程的守恒量

$$u_t - u_{xx} - xu_x - u = 0 \tag{10}$$

首先考虑二阶乘子：即设守恒量乘子为 $\Lambda(x,t,u,u_x,u_{xx})$. 由式(6)得到

$$\begin{aligned}
0 = E_u[(u_t-(u_{xx}+xu_x+u))\Lambda(x,t,u_x,u_{xx})] = &- D_t\Lambda - D_x^2\Lambda + xD_x\Lambda + (u_t-(u_{xx}+xu_x+u))\Lambda_u -\\
&D_x[(u_t-(u_{xx}+xu_x+u))\Lambda_{u_x}] + D_x^2[(u_t-(u_{xx}+xu_x+u))\Lambda_{u_{xx}}]
\end{aligned} \tag{11}$$

将式(11)进一步展开得到

$$\begin{aligned}
0 = &- \tilde{D}_t\Lambda - D_x^2\Lambda + xD_x\Lambda + 2D_x(u_t - (u_{xx}+xu_x+u))[D_x(\Lambda_{u_{xx}}) - \Lambda_{u_x}] +\\
&(u_t-(u_{xx}+xu_x+u))[D_x^2(\Lambda_{u_{xx}}) - D_x(\Lambda_{u_x})]
\end{aligned} \tag{12}$$

其中算子 $\tilde{D}_t$ 是将全微分算子 D_t 中 u_t,u_{xt},u_{xxt} 利用方程(10)的关系替代后得到算子，在此给出具体表达式

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_t\Lambda = \Lambda_t &+ (u_{xx}+xu_x+u)\Lambda_u + D_x(u_{xx}+xu_x+u)\Lambda_{u_x} +\\
&D_x^2(u_{xx}+xu_x+u)\Lambda_{u_{xx}}
\end{aligned}$$

利用函数 $u(t,x)$ 的任意性，令式(12)等号右边3项分别为零，则很容易得到守恒量乘子 $\Lambda(x,t,u_x,u_{xx}) = f(x,t)$ 仅为自变量 x,t 的函数但需满足方程 $f_t + f_{xx} - xf_x = 0$. 将 $\Lambda(x,t,u_x,u_{xx}) = f(x,t)$ 代入式(9)并选取 $u_0=0$ 可以求得

$$\begin{aligned}
D_x S[V,W;g] &= -f(u_{xx}-xu_x-u) - u(-f_{xx}+xf_x) =\\
&D_x(uf_x - fu_x - xfu)
\end{aligned} \tag{13}$$

更进一步由(8)构造出 Fokker-Planck 方程的守恒流及守恒密度的具体形式

$$\Phi^t = \int_0^1 d\lambda(uf) = fu$$

$$\Phi^x = \int_0^1 d\lambda(uf_x - fu_x - xfu) = uf_x - fu_x - xfu \qquad (14)$$

由式(14)可以看出当选取函数 $f = 1$ 时就得到Fokker-Planck方程本身,从前面的推理过程可以看出,将求方程(10)的守恒量转化为求解偏微分方程

$$f_t + f_{xx} - xf_x = 0 \qquad (15)$$

方程(15)的任何一个解通过(14)对应给出方程(10)的守恒量. 利用递推法容易证明对于Fokker-Planck方程无论假设几阶守恒量乘子最后得到乘子都只能是自变量 x, t 的函数且满足方程(15). 而方程(15)刚好就是方程(10)的线性化方程的伴随方程. 这恰好反映了系统的守恒量与系统运动方程的线性化方程及伴随方程之间有着比较密切的关系.

参　考　文　献

1 Olver PJ. Applications of Lie Groups to Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1996

2 Bluman GW, et al. Symmetries and Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1989

3 Mei fengxiang. Form invariance of Appell equations. *Chinese Physics*, 2001, 10(3):177～180

4 赵跃宇,梅凤翔. 力学系统的对称性与不变量. 北京:科学出版社,1999(Zhao Yueyu, Mei Fengxiang. Symmetries and Invariants of Mechanical Systems. Beijing: Science Press, 1999(in Chinese))

5 梅凤翔. 李群李代数对力学系统的应用. 北京:科学出版社,1999(Mei Fengxiang. Application of Lie Group and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems. Beijing: Science Press, 1999(in Chinese))

6 Anco SC, Bluman G. Direct construction of conservation laws from field equations. *Eur J Appl Math*, 2002, 13:567～585

7 Anco SC. Conservation laws of scaling-invariant field equations. *J Phys A: Math Gen*, 2003, 36: 8623～8638

8 Anco SC, Bluman G. Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. Part I: Examples of conservation law classifications. *Eur J Appl Math*, 2002, 13: 545～566

THE CONSERVED QUANTITIES OF FOKKER-PLANCK EQUATION*

Qin Maochang[1]　Mei Fengxiang[1]　Xu Xuejun[2]

(1. *Department of Mechanics, School of Science, Beijing Instioute Technology, Beijing* 100081, *China*)

(2. *Department of Physics, Zhejiang Normal University, Jinghua* 321004, *China*)

Abstract By using the relationship between the adjoint equation and the linearized equation of the motion system, and by using the well-known result that divergence expressions are characterized by annihilation under the full Euler operator, a multiplier method was adopted to construct the conserved quantities of the motion equations. The Lagrange function of the motion system is not necessary for this method. The Fokker-Planck equation was given to illustrate the application of this method, and its infinite conserved quantities can be obtained easily by using this method.

Key words Fokker-Planck equation, conserved quantity, adjoint system

Received 29 October 2004.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10272021)