

小参数摄动法与保辛*

钟万勰^{1,2} 孙雁²

(1. 大连理工大学工程力学系, 大连 116023)(2. 上海交通大学工程力学系, 上海 200030)

摘要 应用数学与力学经常使用小参数摄动近似. 在物理与力学中有大量保守体系的分析. 保守体系的特点是保辛. 本文指出小参数摄动法保辛的问题应予考虑. 位移法摄动是保辛的, 而辛矩阵的加法摄动则未能保辛. 数值例题给出了对比.

关键词 结构力学, 摄动方法, 辛矩阵, 保辛

1 保辛

结构力学与动力学一样, 经常采用近似的小参数摄动法. 这是应用数学与力学最常用的近似之一. 在物理与力学中有大量保守体系的分析. 保守体系可用 Hamilton 体系的方法描述^[1], 其特点是保辛. 保辛就是保持保守体系结构的特性. 冯康提出, 保守体系的差分格式应当保辛^[2], 数值效果很好. 这表明保守体系的数学近似也应保辛. 应当指出, 通常五花八门的差分格式不保辛并非错误, 而是逼近真实解不够好. 保辛的优点是更好的逼近.

然而, 常用的小参数摄动法保辛了吗?

如所熟知, 辛矩阵的乘积仍给出辛矩阵, 辛矩阵在其乘法下构成一个群^[3]. 但辛矩阵的加法却不能保证给出辛矩阵. 这简单的事实对于近似分析有指导意义. 如果要保辛, 就不宜对辛矩阵采用加法. 然而小参数摄动法用的就是加法, 因此不能保证保辛. 但正则变换是保辛的. 根据结构力学与最优控制的模拟理论^[3], 分析力学对空间长度坐标 z 也可运用. 将分析动力学的方法论推广到结构力学是很重要的理论问题. 有限元就是将长度坐标离散, 每个单元两端状态的关系就是正则变换. 如采用初参数法(打靶法^[4] Shooting method)求解, 则其小参数摄动就不能保辛. 打靶法在控制理论求解两端边值问题时常用, 应予注意. 还要注意积分时的数值病态问题. 好在结构力学问题通常用有限元位移法求解, 下文验证其摄动法是保辛的. 但动力学积分是初值问题, 状态向量的积分就是正则变换, 应注

意保辛. 结构力学有限元法成功可供参考.

2 有限元与保辛

辛, 给初学者玄的感觉. 其实只是一个名词而已, 必须破除这种神秘感. 有限元法是从结构力学发展的, 有限元工作者都知道, 单元刚度阵应保持对称性, 其实这就是保辛^[5]. 现通过单纵向坐标弹性体系有限元来加以阐明. 有限元就是将连续坐标转化为离散坐标问题. 例如 Timoshenko 梁问题, 设长度区段为 $0 < z < L$, 沿长度划分 m 个单元. 第 k 号单元有左、右两端 a, b , 即 $k-1, k$ 站, 其位移分别为 n 维的向量 q_a, q_b . 设边界条件是给定在 $z=0$ 与 $z=L$ 端的位移. 有限元分析需要建立每个单元的刚度阵, 其单元变形能为

$$U_k(q_a, q_b; z_a, z_b) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \end{Bmatrix}^T \mathbf{K}_k \begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \end{Bmatrix} = (q_a^T \mathbf{K}_{aa}^{(k)} q_a + q_b^T \mathbf{K}_{bb}^{(k)} q_b) / 2 + q_b^T \mathbf{K}_{ba}^{(k)} q_a, \quad \mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa}^{(k)} & \mathbf{K}_{ab}^{(k)} \\ \mathbf{K}_{ba}^{(k)} & \mathbf{K}_{bb}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中 \mathbf{K}_k 是对称矩阵. 最小总势能原理与平衡方程为

$$\min(\sum_{k=1}^m U_k), \quad \mathbf{K}_{ba}^{(k-1)} q_{k-1} + [\mathbf{K}_{bb}^{(k-1)} + \mathbf{K}_{aa}^{(k)}] q_k + \mathbf{K}_{ab}^{(k)} q_{k+1} = 0 \quad (2)$$

2004-11-10 收到第1稿, 2004-12-06 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(10372019)和教育部博士点基金资助项目(20010141024)

单元变形能就是作用量函数.引入对偶向量

$$p_k^{(k)} = \partial U_k / \partial q_k = K_{bb}^{(k)} q_k + K_{ba}^{(k)} q_{k-1} \quad (3a)$$

$$p_{k-1}^{(k)} = -\partial U_k / \partial q_{k-1} = -(K_{aa}^{(k)} q_{k-1} + K_{ab}^{(k)} q_k) \quad (3b)$$

则平衡方程成为 $p_k^{(k)} = p_k^{(k+1)}$. 引入各站的状态向量

$$v_k = \{q_k^T \quad p_k^T\}^T \quad (4)$$

于是从(3)可导出

$$v_k = S_k v_{k-1},$$

$$S_k = \begin{bmatrix} S_{11}^{(k)} & S_{12}^{(k)} \\ S_{21}^{(k)} & S_{22}^{(k)} \end{bmatrix},$$

$$S_{11}^{(k)} = -(K_{ab}^{(k)})^{-1} K_{aa}^{(k)},$$

$$S_{12}^{(k)} = -(K_{ab}^{(k)})^{-1},$$

$$S_{21}^{(k)} = K_{ba}^{(k)} - K_{bb}^{(k)} (K_{ab}^{(k)})^{-1} K_{aa}^{(k)},$$

$$S_{22}^{(k)} = -K_{bb}^{(k)} (K_{ab}^{(k)})^{-1} \quad (5)$$

可验证 $S_k^T J S_k = J$ 满足,故 S_k 是辛矩阵.从而状态向量由 v_{k-1} 到 v_k 是正则变换.以上的推导只用到 K_k 是对称矩阵的性质,故知有限元保证其单元刚度阵对称,就是保辛.有限元刚度阵的对称性是最基本的规则,故有限元是自动保辛的.有限元法解的稳定性、有效性莫基于此基本性质.

以往一大批微分方程差分格式是脱离了变分原理而根据微分算子凭经验凑合的,五花八门而缺乏一般规则,故不能保辛.有限元法则在变分原理的引导下生成单元,保证了单元刚度阵的对称性,从而保持了保守体系的基本规则,故自动保辛.混合能矩阵保持对称^[3],也是保辛的.辛的概念从分析动力学而来,分析动力学要求状态向量的维数不变.但分析结构力学^[5]不受此限制,变形能法与混合能法皆能保辛,并可适用于维数变化的情况.本文证明位移法摄动是保辛的,而传递辛矩阵的摄动不保辛.并通过数值例题作出比较.

3 位移法结构分析小参数有限元的保辛

因优化设计等原因,结构变形能要作小修改,表现在刚度阵的修改上,有一个小参数 ϵ . 设有结构由 m 个子结构串联而成,两端及连接面编号 $0, 1, \dots, m$. 子结构 k 的连接为 $(k-1, k)$, 出口位移

为 q_{k-1}, q_k , 而出口刚度阵为

$$K_k = K_{0k} + \epsilon K'_k \quad (6)$$

设两端给定位移 q_0, q_m . 子结构组合成结构的总位移向量由各连接面的位移组成.

$$q = \{q_1^T \quad q_2^T \quad \dots \quad q_{m-1}^T\}^T \quad (7)$$

外力 f . 总刚度阵组合为 $K = K_0 + \epsilon K'$. 方程 $Kq = f$ 对应于变分原理

$$U(q) = q^T K q / 2 - q^T f, \delta U = 0 \quad (8)$$

当 $\epsilon = 0$ 时, 设已从近似方程 $K_0 q_0 = f$ 解出了总位移向量 q_0 . 现在要分析 ϵ 时的总位移向量, 采用小参数法. 通常的方法为, 取

$$q = q_0 + \epsilon q_a \quad (9)$$

加法. 然后从 $(K_0 + \epsilon K')(q_0 + \epsilon q_a) \approx K_0 q_0 + \epsilon K' q_0 + \epsilon K_0 q_a = f$ 给出

$$K_0 q_a = -K' q_0 \quad (10)$$

以求解 $q_a = -K_0^{-1} K' K_0^{-1} f$. 但 $q = q_0 + \epsilon q_a$ 并非来自变分原理. 于是原方程近似为

$$q = (K_0^{-1} - \epsilon K_0^{-1} K' K_0^{-1}) f \quad (11)$$

因 $K_0^{-1} - \epsilon K_0^{-1} K' K_0^{-1}$ 仍为对称矩阵, 故结构分析位移法的小参数摄动法是保辛的.

动力学是时域的首值问题, 其状态向量的积分是正则变换, 即辛矩阵的乘法. 小参数摄动法是 Taylor 级数展开的加法. 设 $S(\epsilon) = S_0 + \epsilon S_1$, 其中 S_0 已经是辛矩阵, 即使 S_1 是辛矩阵也不能保证 $S(\epsilon) = S_0 + \epsilon S_1$ 仍是辛矩阵. 冯康指出数值积分的差分近似格式要保辛^[2]. 但辛矩阵加法的摄动已不能保辛了, 必须注意.

4 数值例题

例 1 设结构由串联式 ($m = 5$) 段相同子结构组成. 子结构连接于 $k = 0, 1, \dots, m$ 站, 每站一个位移. 子结构的 k 出口位移为 q_{k-1}, q_k , 子结构出口刚度阵为

$$K_k = \begin{bmatrix} 1 + \epsilon & -1 \\ -1 & 2(1 + \epsilon) \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, m \quad (12)$$

其中 ϵ 为小参数. 两端位移给定为 $q_0 = 3.0, q_m = 0$, 无外力. 课题简单, 可手工验证.

分别选择 $\epsilon = 0$ 与 $\epsilon = 0.1$, 组装总刚度阵进行求解, 得总位移向量 $q = \{q_0, \dots, q_m\}^T$,

$$\epsilon = 0: q_{g,0} = \{3.0, 1.1454, 0.4364, 0.1636,$$

$$0.05454, 0.0\}^T,$$

$$\epsilon = 0.1: \mathbf{q}_{g,0.1} = \{3.0, 1.0125, 0.3413, 0.1139,$$

$$0.03451, 0.0\}^T$$

以上是精确解. 以下分别用传递辛矩阵摄动法与位移摄动法求解.

传递矩阵引入状态向量 $\mathbf{v}_k = \{q_k \ p_k\}^T$, 其动力学方程为 $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{S}_k \mathbf{v}_k$, 根据方程(5)

$$\mathbf{S}_k = \begin{bmatrix} 1 + \epsilon & 1 \\ 1 + 4\epsilon + 2\epsilon^2 & 2(1 + \epsilon) \end{bmatrix}, k = 1, \dots, m,$$

或

$$\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}_k \approx \mathbf{S}_0 + \epsilon \mathbf{S}_1 \quad (13)$$

初值 $\mathbf{v}_0 = \{q_0 \ p_0\}^T$ 给定. 可以验证, \mathbf{S}_0 是辛矩阵, 而 \mathbf{S}_1 不是辛矩阵.

按通常的摄动法

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{0,k} + \epsilon \mathbf{v}_{1,k}, \mathbf{S}_k = \mathbf{S}_0 + \epsilon \mathbf{S}_1 \quad (14)$$

代入方程

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{S}_k \mathbf{v}_k \quad (15)$$

按小参数 ϵ 展开, 其零次近似方程为

$$\mathbf{v}_{0,k+1} = \mathbf{S}_{0,k} \mathbf{v}_{0,k} \quad (16)$$

一次近似为

$$\mathbf{v}_{1,k+1} = \mathbf{S}_{0,k} \mathbf{v}_{1,k} + \mathbf{S}_{1,k} \mathbf{v}_{0,k} \quad (17)$$

若 $\epsilon = 0.1$, 取初值 $\mathbf{v}_0 = \begin{Bmatrix} q_0 \\ p_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$, (下标 a 标记), 站 $k = 0, 1, \dots, 5$, 则由式(13) ~ (17) 可计算得

$$\mathbf{v}_{0,0} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix}, \mathbf{v}_{0,1} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \end{Bmatrix}, \mathbf{v}_{0,2} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 14 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{0,3} = \begin{Bmatrix} 23 \\ 37 \end{Bmatrix}, \mathbf{v}_{0,4} = \begin{Bmatrix} 60 \\ 97 \end{Bmatrix}, \mathbf{v}_{0,5} = \begin{Bmatrix} 157 \\ 254 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{1,0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \mathbf{v}_{1,1} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 14 \end{Bmatrix}, \mathbf{v}_{1,2} = \begin{Bmatrix} 21 \\ 57 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{1,3} = \begin{Bmatrix} 87 \\ 199 \end{Bmatrix}, \mathbf{v}_{1,4} = \begin{Bmatrix} 309 \\ 651 \end{Bmatrix}, \mathbf{v}_{1,5} = \begin{Bmatrix} 1020 \\ 2045 \end{Bmatrix}$$

由 $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{0,k} + \epsilon \mathbf{v}_{1,k}$, 可得位移解为 $\mathbf{q}_{\epsilon=0.1}|_a = \{3 \ 4.3 \ 11.1 \ 31.7 \ 90.9 \ 259\}^T$.

再取初值 $\mathbf{v}_0 = \begin{Bmatrix} q_0 \\ p_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$, (下标 b 标记), 可计算得

$$\mathbf{v}_{0,0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \mathbf{v}_{0,1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}, \mathbf{v}_{0,2} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{0,3} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 13 \end{Bmatrix}, \mathbf{v}_{0,4} = \begin{Bmatrix} 21 \\ 34 \end{Bmatrix}, \mathbf{v}_{0,5} = \begin{Bmatrix} 55 \\ 89 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{1,0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \mathbf{v}_{1,1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}, \mathbf{v}_{1,2} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{1,3} = \begin{Bmatrix} 18 \\ 49 \end{Bmatrix}, \mathbf{v}_{1,4} = \begin{Bmatrix} 75 \\ 174 \end{Bmatrix}, \mathbf{v}_{1,5} = \begin{Bmatrix} 270 \\ 575 \end{Bmatrix}$$

由 $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{0,k} + \epsilon \mathbf{v}_{1,k}$, 可得位移解为 $\mathbf{q}_{\epsilon=0.1}|_b = \{0 \ 1 \ 3.3 \ 9.8 \ 28.5 \ 82\}^T$.

于是运用叠加原理 $\mathbf{q} = \mathbf{q}_a + X \cdot \mathbf{q}_b$, 其中 X 待求. 根据 $q_m = q_{ma} + X \cdot q_{mb} = 0.0$, 解出 $X = -3.158536$, 就得到了辛矩阵摄动的数值解

$$\mathbf{q}_{\epsilon=0.1} = \{3 \ 1.1415 \ 0.6768 \ 0.7463$$

$$0.8817 \ 0.0\}^T$$

当 $\epsilon = 0$ 时, 同样的方法也给出精确位移 $\mathbf{q}_{g,0}$, 因为未曾进行辛矩阵的摄动.

以下运用位移法进行摄动, 位移法摄动是保辛的

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 + \epsilon & -1 \\ -1 & 2(1 + \epsilon) \end{bmatrix} = \mathbf{K}_0 + \epsilon \mathbf{K}_1,$$

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

原问题的总位移向量 $\mathbf{q} = \{q_1, \dots, q_m\}^T$

运用 \mathbf{K} 阵可组装总刚度阵 \mathbf{K}_g , 两端边界条件是 q_0, q_m 给定.

小参数摄动时, $\mathbf{K}_g = \mathbf{K}_0 + \epsilon \mathbf{K}'$, $\mathbf{q} \approx \mathbf{q}_0 + \epsilon \mathbf{q}_a$, 先求解零次近似 $\mathbf{K}_0 \mathbf{q}_0 = \mathbf{f}$, 得到 $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_{g,0}$. 再求解一次近似: 利用 $\mathbf{K}_0 \mathbf{q}_a = -\mathbf{K}' \mathbf{q}_0$, 求 \mathbf{q}_a . 由 $\mathbf{q} \approx \mathbf{q}_0 + \epsilon \mathbf{q}_a$, 得到最后的解.

由 $\mathbf{K}_0 \mathbf{q}_0 = \mathbf{f}$, $q_{00} = 3.0, q_{m0} = 0.0$, 得到的就是 $\epsilon = 0$ 时的精确解 $\mathbf{q}_{g,0}$. 再由 $\mathbf{K}_0 \mathbf{q}_a = -\mathbf{K}' \mathbf{q}_0$, 求 \mathbf{q}_a , 边界条件 $q_{0a} = 0.0, q_{ma} = 0.0$, 得到

$$\mathbf{q}_a = \{0.0 \ -1.5322 \ -1.1603 \ -0.6397$$

本例中,可以验证, S_0 是辛矩阵, S_1 也是辛矩阵.但 $S(\epsilon) = S_0 + \epsilon S_1$ 不是辛矩阵.当小参数增大时,传

递辛矩阵摄动法的计算结果越来越远离正确结果.而位移摄动法由于保辛,得到了令人满意的结果.

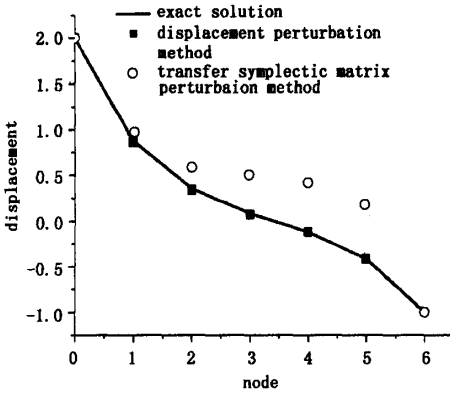


图 1 $\epsilon = 0.1$ 时两种摄动法位移计算结果

Fig. 1 Results of two perturbation methods when $\epsilon = 0.1$

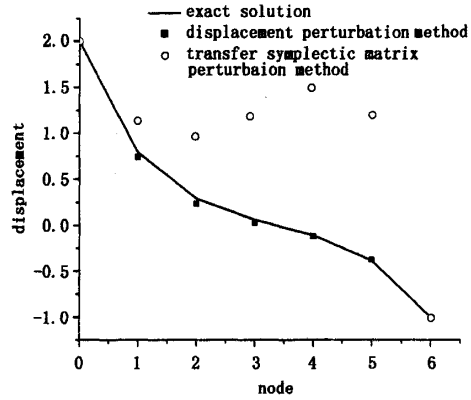


图 2 $\epsilon = 0.2$ 时两种摄动法位移计算结果

Fig. 2 Results of two perturbation methods when $\epsilon = 0.2$

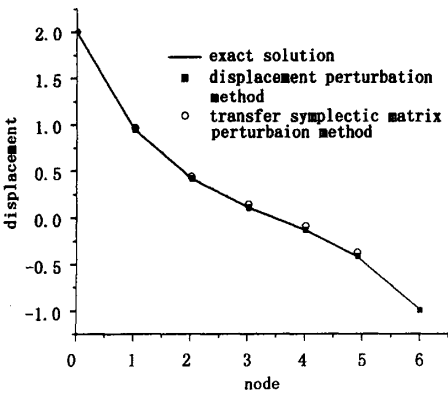


图 3 $\epsilon = 0.02$ 时两种摄动法位移计算结果

Fig. 3 Results of two perturbation methods when $\epsilon = 0.02$

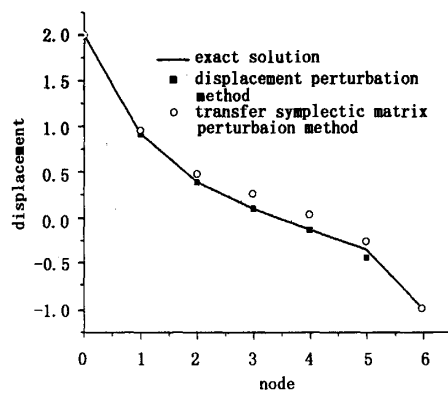


图 4 $\epsilon = 0.05$ 时两种摄动法位移计算结果

Fig. 4 Results of two perturbation methods when $\epsilon = 0.05$

5 结束语

辛是保守体系的特性.有限单元刚度阵保持对称性,保证了保守体系的特性,就是保辛.辛并不神秘.保守体系近似方法都应保辛.有限元位移法的常规小参数摄动法是保辛的.但传递辛矩阵的摄动法却不能保辛.因辛矩阵只在乘法下保辛,辛矩阵的加法不保辛.设计动力学的近似计算方法不应忽视此因素.因保守体系动力学积分是辛矩阵的乘法,故辛矩阵加法的摄动要慎用.

本文由自然科学基金(10372019)与教育部博

士点基金(20010141024)支持,特此表示感谢.本文也是与科学院自动化所复杂系统与智能科学重点实验室的合作课题.

参 考 文 献

- 1 Goldstein H. Classical mechanics. 2nd ed. London: Addison-Wesley, 1980
- 2 冯康,秦孟兆. Hamilton 体系的辛计算格式. 杭州: 浙江科技出版社, 2004 (Feng K, Qing MZ. Symplectic Geometric Algorithm for Hamiltonian Systems. Hangzhou:

- Zhejiang Science and Technology Press, 2004 (in Chinese))
- 3 钟万勰. 应用力学对偶体系. 北京: 科学出版社, 2002 (Zhong WX. Duality system in applied mechanics. Beijing: Science Press, 2002(in Chinese))
- 4 Press WH, Teukolsky SA, Vetterling WT, Flannery BP. Numerical Recipes in C. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1992
- 5 钟万勰. 分析结构力学与有限元. 动力学与控制学报, 2004, 2(3): 1~8 (Zhong WX. Analytical structural mechanics and finite element. *J of Dynamics and Control*, 2004, 2(3): 1~8(in Chinese))

SMALL PARAMETER PERTURBATION METHOD AND SYMPLECTIC CONSERVATION*

Zhong Wanxie^{1,2} Sun Yan²

(1. *Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China*)

(2. *Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China*)

Abstract The small parameter perturbation approximation is applied quite often in applied mathematics and mechanics. There are tremendous conservative system analyses in physics and applied mechanics, and one of the most important characteristics of a conservative system is its symplectic conservation. The present paper emphasizes that the symplectic conservative behavior should be considered in small parameter perturbation approximations. The strip domain structural analysis is considered, and we gave both the perturbation solutions with the displacement method, which is symplectic conservative, and the perturbation solutions with the corresponding transfer symplectic matrix method, which is symplectic non-conservative.

Key words structural mechanics, perturbation method, symplectic matrix, symplectic conservation

Received 10 November 2004, revised 06 December 2004.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10372019) and the Doctoral Discipline of the Ministry of Education, China(20010141024).