

用微分求积法分析输液管道的非线性动力学行为*

王琳 倪樵

(华中科技大学力学系, 武汉 430074)

摘要 将微分求积法(Differential Quadrature Method, 简称DQM)应用于输液管道的非线性动力学分析, 采用此法研究了受非线性约束输液管道的分岔现象和混沌运动问题. 从悬臂输液管道模型出发, 利用微分求积法形成管道的动力学方程. 以分岔图、相平面图、时间历程图和Poincaré映射等分析手段考察了系统参数(管内流速)变化对管道振动形态的影响. 结果表明, 在所研究的系统中存在出现倍周期分岔现象和混沌运动的参数区域, 这与前人的研究成果具有一致性. 这为一类结构的非线性动力响应问题提供了一种新的研究思路.

关键词 输液管, 分岔, 混沌, 微分求积法, 非线性动力学

引言

输液管道的振动与稳定性问题是结构动力学问题研究的重要内容之一. 这不仅是因为它有较高的理论研究价值, 而且还有广阔的工程应用背景. 近年来随着科学技术的迅速发展, 输液管道的非线性动力学行为已经成为人们对此结构研究的热点, 而输液管道的分岔与混沌现象更是学者们关注的研究方向. 第一个研究悬臂输液管混沌现象的是Tang和Dowell^[1], 他们采用的分析模型是在管自由端的左右两侧放置两块永久磁铁, 计算和试验都表明当流速超过某一临界值时系统会发生混沌运动. 后来, Paidoussis^[2,3]等人研究了带非线性弹簧约束悬臂输液管道的分岔与混沌行为, 他们发现管道系统通过倍周期分岔通向混沌运动的事实. Li和Paidoussis^[4]进一步考虑了3个参数(流速, 流体质量比和重力系数)同时变化, 发现立式悬臂输液管的分岔现象及混沌运动. Jin JD^[5]分析了输液管在运动约束和线性弹簧支承联合作用下的分岔与混沌运动. 然而, 上面的一些理论研究都是运用传统的分析手段, 即采用 Galerkin 方法对系统的偏微分方程进行常微分化处理, 将待求的位移函数在给定管的低阶模态空间展开, 进而形成悬臂管的动力学方程. 这种方法仅仅考虑了管道结构的低阶模态, 因而具有一定的局限性. 本文试图采用微分求积法来分析输液管非线性动力学问题. 众所周知, 微分求积法是一种求解边值和初值问题的有效的数值方法, Ni Qiao 等人^[6]首次将此方法成功的用

于分析输液管道的线性问题研究之中. 本文将它推广应用到输液管道的非线性动力响应分析中去, 采用文献[5]的分析模型以验证这种方法的有效性. 数值计算表明, 本文结果与文献[5]中的经典结果相当吻合, 即受3次弹簧约束和线性弹簧支承的悬臂输液管系统在一定参数区域内将通过一串串的倍周期分岔通向混沌.

1 理论模型

考虑图1所示的竖直放置的悬臂输液管道系统, 在 ξ_0 处设有一非线性约束^[5], 管道和约束之间设置有橡胶垫(可简化为线性弹簧). 如图2建立坐标, x 表示管道横截面位置, y 表示管道轴线偏离平衡位置的位移. 研究中作如下假设

- 1) 管内流体为定常不可压缩流;
- 2) 忽略管道外部运动阻尼;
- 3) 管道材料为粘弹性, 且符合 Kelvin-Voigt 假定, 即其应力-应变关系满足条件

$$\sigma = (1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t}) E \epsilon \quad (1)$$

式中 E 为材料弹性模量, α 为粘弹性系数.

2 运动微分方程及其 DQM 模拟

在平面上管道的平面运动偏微分方程可表示为^[5]

$$aEI \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + [MU^2 - (M + m)(L - x)g] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (M + m)g \frac{\partial y}{\partial x} +$$

2004-09-26 收到第1稿, 2004-10-20 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10272051)

$$2MU \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + (M + m) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (K_1 y + K_2 y^3) \delta(x - x_b) = 0 \quad (2)$$

式中 EI 为管道的抗弯刚度, L 为管道总长度, m 和 M 分别为管道单位长度质量和管内流体单位长度质量, U 为管内定常流速, K_1 和 K_2 分别表示线性弹簧刚度和反映运动约束作用的三次弹簧刚度系数, g 为重力加速度, δ 为 Dirac delta 函数, t 为时间.

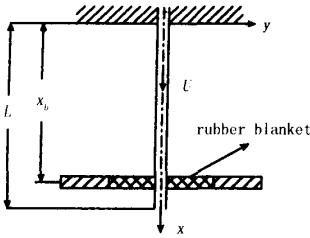


图1 工程中的输液管道
Fig.1 Pipe conveying fluid in engineering.

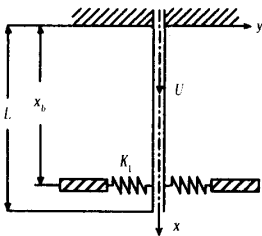


图2 输液管道力学模型
Fig.2 The model of pipe conveying fluid.

引入下列无量纲化的变量和参数

$$\begin{aligned} \eta &= y/L, \xi = x/L, \\ \tau &= [EI/(M + m)]^{1/2} t/L^2, \\ u &= (M/EI)^{1/2} UL, \\ \beta &= M/(M + m), \gamma = (M + m)gL^3/EI, \\ k_1 &= KL^3/EI, k_2 = KL^5/EI, \\ \xi_b &= x_b/L, \alpha = [EI/(M + m)]^{1/2} a/L^2 \end{aligned} \quad (3)$$

把方程(2)无量纲化以后,得到如下形式的方程

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^5 \eta}{\partial \xi^4 \partial \tau} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + [u^2 - \gamma(1 - \xi)] \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \\ \gamma \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + 2\sqrt{\beta}u \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} + \\ (k_1 \eta + k_2 \eta^3) \delta(\xi - \xi_b) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

对于图1所示的悬臂管道系统,其固定端($\xi = 0$)的边界条件为

$$\eta = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 0 \quad (5)$$

而自由端($\xi = 1$)的边界条件为

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} = 0 \quad (6)$$

对于输液管道模型,传统的作法是采用 Galerkin 法将控制方程进行离散化,仅提取有限的低阶振型函数作近似处理;DQM则克服了 Galerkin 法的这种局限性,本质上考虑了所有振型的综合贡献. DQM 是把函数在给定网点上的各阶导数值近似的用域上全部网点处的函数值的加权和表示,其原理可参阅文献[6],在此不赘述.

下面将用 DQM 模拟方程(4)~(6)以便数值求解. 采用下列公式划分区域得到非均匀网点,取网点数 $N = 7$,边界上都采用 Δ 邻接处理^[7], Δ 为小量,一般取 $\Delta = 10^{-3} \sim 10^{-6}$,即

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = \Delta, \xi_N = 1, \xi_{N-1} = 1 - \Delta,$$

$$\xi_i = \frac{1}{2} [1 - \cos(\frac{i-2}{N-3}\pi)] \quad (i = 3, 4, \dots, N-2) \quad (7)$$

将此方法应用于一端固定的输液管道,可得到方程(4)~(6)的 DQM 模拟方程及相应的边界条件

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \{A_{ij}^{(4)} + [u^2 - \gamma(1 - \xi_i)]A_{ij}^{(2)} + \gamma A_{ij}^{(1)}\} \eta_j + \\ \sum_{j=1}^N (\alpha A_{ij}^{(4)} + 2\sqrt{\beta}u A_{ij}^{(1)}) \dot{\eta}_j + \\ k_1 \eta_b + k_2 \eta_b^3 + \ddot{\eta}_i = 0 \end{aligned} \quad (i = 3, 4, \dots, N-2) \quad (8)$$

$$\eta_1 = 0, \sum_{j=1}^N A_{2j}^{(1)} \eta_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^N A_{N-1,j}^{(2)} \eta_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^N A_{Nj}^{(3)} \eta_j = 0 \quad (9)$$

对于输液管道模型, DQM 模拟运动方程和边界条件之后可形成关于时间的动力学方程. 将(8)和(9)合并写成矩阵的形式

$$[\tilde{M}]\{\ddot{\eta}\} + [\tilde{C}]\{\dot{\eta}\} + [\tilde{K}]\{\eta\} = \{\tilde{Q}\} \quad (10)$$

式中 $[\tilde{M}]$ 是质量矩阵, $[\tilde{K}]$ 是刚度矩阵, $[\tilde{C}]$ 是陀螺矩阵, $[\tilde{K}]$ 和 $[\tilde{C}]$ 中均含有无量纲流速和质量比等参数. 由于管道在 ξ_b 处受到非线性弹簧约束作用,因此,式(10)实际上是一个非线性方程组,其刚度阵可以写成

$$[\tilde{K}] = [\tilde{K}_L] + [\tilde{K}_{NL}] \quad (11)$$

其中 $[\tilde{K}_L]$ 和 $[\tilde{K}_{NL}]$ 分别表示刚度矩阵的线性部分和非线性部分. 方程(10)构成了输液管道系统的动力学方程组,求解此方程组可以确定管道系的多种振动形态.

3 数值求解及结果

取以下系统参数:

$$\gamma = 10, \xi_b = 0.85, k_1 = 50, k_2 = 500,$$

$$\alpha = 0.005, \beta = 0.2, N = 7, b = N - 2$$

为验证 DQM 的有效性, 本文主要研究系统参数 u (流体流速) 变化对管道振动特性的影响. 为此, 若不作特别说明, 初始条件取 $\eta(i, 0) = -10^{-6}, \ddot{\eta}(i, 0) = 10^{-5} (i = 3, 4, \dots, N)$, 采用 Newmark 法和 Newton-Raphson 迭代法在时间域上对方程 (10) 进行数值计算, 然后用画分岔图、相轨迹图、位移时间历程图和 Poincaré 映射图等数值模拟技术, 分析输液管自由端的振动形态. 在这些图中, 其纵横坐标参数均为无量纲参数.

数值计算表明, 正位移和负位移初始条件将对系统振动位移所历经范围的正负偏向有所影响, 这可以在分岔图和相图中看到. 在流速参数区域内, 每当 $\dot{\eta}(N, \tau) = 0$ 时就记录管道自由端的位移, 由

此作出图 3 所示的以流速为控制参数的分岔图. 在分岔图中, 为了保持结果的完整性, 分别采用了正位移和负位移初始条件作数值迭代计算, 其结果同时呈现在同一分岔图中. 以零位移为界限, 图中点画线以下部分对应于负的位移初始条件; 点画线以上部分对应于正的位移初始条件, 即 $\eta(i, 0) = 10^{-6}, \ddot{\eta}(i, 0) = 10^{-5} (i = 3, 4, \dots, N)$. 从分岔图上还可以看出, 当流速较低时, 管道振动是稳定的; 当 $u > U_H = 7.28$ 时, 管道振动首先将发生 Hopf 分岔, 此时在相平面图上反映为一对对称的极限环 (图 4(a)); 当 $u > U_{pf} = 8.198$ 时, 相轨迹的对称性被破坏, 出现不对称的极限环, 如图 4(b) 所示; 当 $u > U_{P2} = 8.546$ 时, 管道振动将以周期 2 的形式出现 (图 4(c)); 随着流速的继续增大, 系统将进入混沌道路, 最后因失稳而发散; 此外, 研究还发现, 混沌参数区域还存在着周期运动的窗口 (图 4(e)). 图 5 为上述振动形式相对应的部分位移时间历程图.

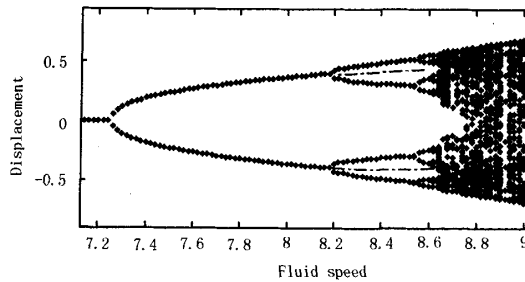
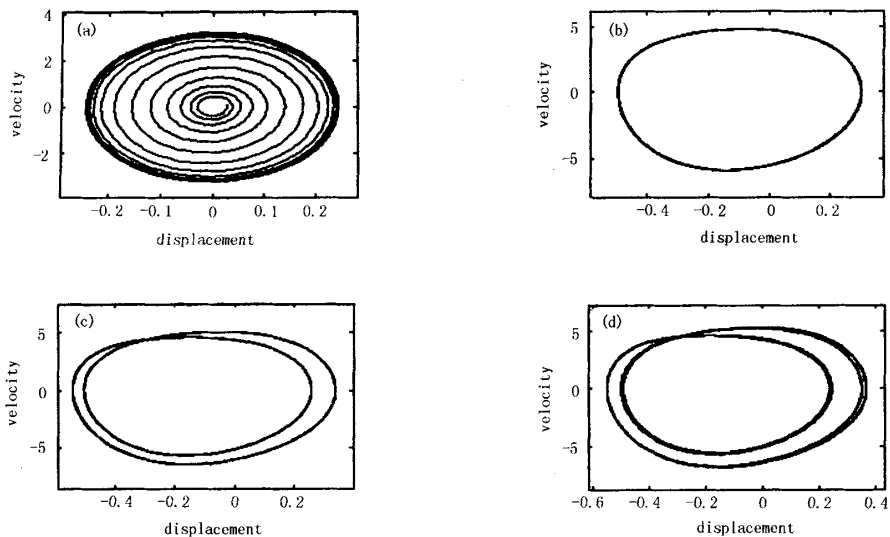


图 3 流速参数区域分岔图

Fig. 3 Bifurcation diagram for the parameter of fluid speed.



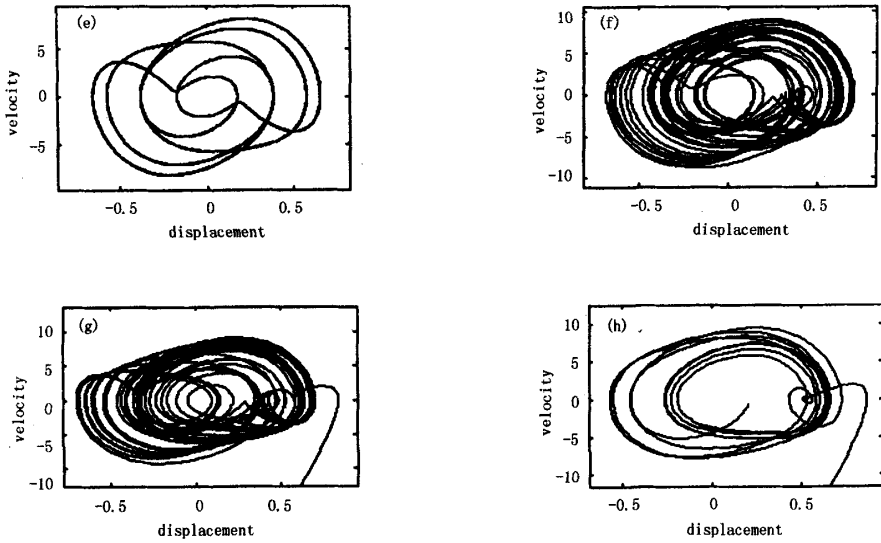


图 4 平面相图

(a) $u = 7.6$, 对称极限环; (b) $u = 8.4$, 周期 1; (c) $u = 8.56$, 周期 2; (d) $u = 8.606$, 周期 4;
 (e) $u = 8.92$, 周期 5; (f) $u = 9.05$, 混沌; (g) $u = 9.08$, 混沌发散; (h) $u = 9.15$, 发散.

Fig. 4 Phase portraits.

(a) $u = 7.6$, symmetric limit cycle motion; (b) $u = 8.4$, period-1 motion; (c) $u = 8.56$, period-2 motion;
 (d) $u = 8.606$, period-4 motion; (e) $u = 8.92$, period-5 motion; (f) $u = 9.05$, chaotic motion;
 (g) $u = 9.08$, chaotic divergence; (h) $u = 9.15$, divergent motion.

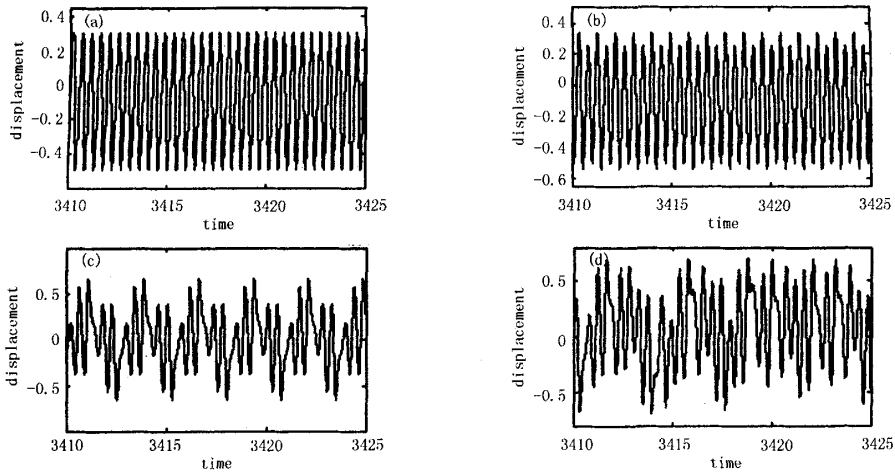


图 5 位移时间历程

(a) 周期 1; (b) 周期 2; (c) 周期 5; (d) 混沌.

Fig. 5 Time histories.

(a) period-1; (b) period-2; (c) period-5; (d) chaotic motion.

Poincaré 映射图采用文献[2]中所述的“映射触发器”:在管道 ξ_b 处位移为零(即 $\xi = 0.85$)时记录管道 $\xi = 1$ 处的运动状态.图 6 是系统周期 1、周期 2、周期 4 和混沌运动的 Poincaré 映射图.显然,

当管道 ξ_b 处位移为零时,采用上述映射触发器记录时没有区分对应速度值的正负,因此周期 4 运动在 Poincaré 映射图上有 8 个孤立点(点的个数为周期数的两倍,其余类推).当系统处于混沌运动时,

其 Poincaré 映射图上有无穷多个点值。

此外,具有线性弹簧和不具有线性弹簧的管道^[2]发生混沌时,其参数 u 的混沌区域略有不同,即前者开始发生混沌时的流速值比后者要大一些。这说明在管道和非线性运动约束之间设置橡胶垫子(线性弹簧)可以在一定程度上延缓或抑止混沌

的发生。

上述这些数值计算结果与文献[5]的结果吻合得很好,充分揭示了输液管道的非线性动力学行为;而且,DQM的实施过程避免了 Galerkin 的大量积分运算,其计算精度和效率较好。这表明 DQM 在输液管道模型的非线性振动研究中值得推广应用。

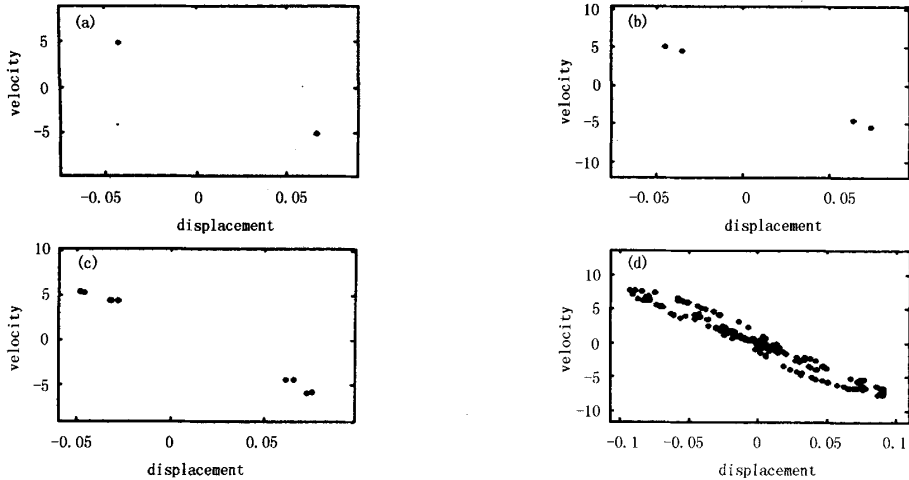


图6 Poincaré 映射

(a) 周期1; (b) 周期2; (c) 周期4; (d) 混沌

Fig. 6 Poincaré maps.

(a) period-1; (b) period-2; (c) period-4; (d) chaotic motion.

4 讨论

综上所述,在输液管的非线性动力学分析中,微分求积法的研究结果与文献[5]的结果具有较好的吻合;同时,DQM有着独特的优点,极易处理具有弹性支承的输液管模型,且计算量较少,与传统的 Galerkin 法相比,此法避免了大量的积分运算,本质上考虑了管道所有模态对振动形态的综合贡献。因此,DQM是分析输液管道非线性动力学行为的一种行之有效的办法,可望进一步的推广应用。本文的研究不仅证实了微分求积法的有效性,还为这一类工程结构的动力响应问题提供了一种新的研究思路。

参 考 文 献

- 1 Tang DM, Dowel EH. Chaotic oscillations of a cantilevered pipe conveying fluid. *Journal of Fluids and Structures*, 1988, 2: 263~283
- 2 Paidoussis MP, Li GX, Moon FC. Chaotic oscillations of the autonomous system of a constrained pipe conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, 135: 1~19
- 3 Paidoussis MP, Moon FC. Non-linear and chaotic fluidelastic vibrations of a flexible pipe conveying fluid. *Journal of Fluids and Structures*, 1988, 3: 567~591
- 4 Li GX, Paidoussis MP. Stability, double degeneracy and chaos in cantilevered pipes conveying fluid. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1994, 29: 83~107
- 5 JIN JD. Stability and chaotic motions of a restrained pipe conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 208: 427~439
- 6 Qiao Ni, Huang Yuying. Differential quadrature method to stability analysis of pipes conveying fluid with spring support. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2000, 13: 320~327
- 7 Bert CW. Differential quadrature method in computational mechanics: A review. *Applied Mechanics Reviews*, 1996, 49: 1~27

THE NONLINEAR DYNAMIC VIBRATIONS OF A RESTRAINED PIPE CONVEYING FLUID BY DIFFERENTIAL QUADRATURE METHOD *

Wang Lin Ni Qiao

(*Department of Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*)

Abstract By extending the Differential Quadrature Method (DQM), this paper established the nonlinear vibrations of a cantilevered pipe conveying fluid with motion-limiting nonlinear constraints. The partial differential equation of the pipe motion was reduced to an ordinary differential equation by DQM. Based on this, the vibration behavior of the free end of the pipe was studied, and several vibrations were found by numerical calculations. By means of the bifurcation diagram, phase portraits of the motion, the time histories, and the Poincaré maps, this paper analyzed the effect of parameter variation on the pipe vibration. The analysis proved the existence of chaotic vibrations, and the route to chaos is shown to be via period-doubling bifurcations of specific parameters. The results agreed reasonably with other classical ones. Thus, the present method is valid and applicable for studying the dynamic response (including chaotic vibrations) of some other structures.

Key words pipe conveying fluid, chaotic vibration, bifurcation, DQM, nonlinear vibration