

# 电磁与机械载荷作用下导电梁式板的超谐波共振

胡宇达 杜国君 王国伟

(燕山大学建筑工程与力学学院, 秦皇岛 066004)

**摘要** 研究了电磁与机械载荷共同作用下梁式薄板的非线性超谐波共振问题. 在给出薄板的电磁弹性运动基本方程及电磁力表达式的基础上, 推得了横向稳恒磁场和机械载荷共同作用下梁式薄板的振动方程; 应用伽辽金积分法, 进一步导出了相应的非线性振动控制微分方程. 采用多尺度法进行求解, 得到了稳态运动下的幅频响应方程. 最后, 通过算例, 给出了相应的幅频响应曲线图和时间历程图, 分析了板厚、磁场及激励幅值对系统振动的影响.

**关键词** 磁弹性, 梁式板, 磁场, 超谐波共振, 多尺度法

## 引言

在航空航天、化工和核工业装置的防护系统, 超导发电机和超导蓄能装置, 大型发电机装置, 高速磁悬浮列车, 电磁传感器等众多高科技装置与设备中, 电磁弹性结构得到了广泛的应用, 而其在电磁场环境中的动力学行为直接影响着系统运行的安全性与可靠性, 为此, 国内外学者在这方面做了不少理论上的研究工作, 取得了一定成果<sup>[1~4]</sup>, 但因模型建立和问题求解等方面的困难, 目前仅对特定磁场中简单构件的线性振动问题做过较细致的工作, 尚有许多问题有待于进一步的研究.

本文在文[5]的基础上, 研究了电磁与机械载荷共同作用下导电梁式薄板的非线性超谐波共振问题. 得到了相应的磁弹性耦合振动微分方程, 并采用多尺度法进行求解, 导出了稳态运动下的幅频响应方程, 借助得到的幅频响应曲线图和时间历程图, 分析了电磁与机械参数对系统振动的影响, 得到了一些有价值的结果.

## 1 薄板的磁弹性振动方程与电磁力表达式

对于外加磁场环境中受法向机械载荷作用的导电金属薄板, 考虑机械场与电磁场的相互耦合作用, 在文[6]的基础上, 考虑几何非线性项的影响, 可得直角坐标系  $Oxyz$  下薄板的磁弹性振动方程

$$D_M \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}) =$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + F_z + P_z \quad (1)$$

式中  $N_x, N_y, N_{xy}$  为相应方向的中面内力,  $F_z, P_z$  分别为法向电磁力和机械力,  $m_x, m_y$  为电磁力矩,  $w$  为板中面内各点沿法向(坐标  $z$  方向)的位移,

$D_M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  为弯曲刚度, 微分算子  $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ ,  $E$  为弹性模量,  $\nu$  为泊松系数,  $\rho$  为材料密度,  $h$  为板厚,  $t$  为时间变量.

考虑材料为线性各向同性的良导体, 在略去磁化因素影响情况下, 电磁场与机械场相互作用而在体内产生的洛仑兹力矢量表达式为

$$f = J \times B_0 \quad (2)$$

式中  $J(J_x, J_y, J_z)$  为电流密度矢量,  $B_0(B_{0x}, B_{0y}, B_{0z})$  为磁感应强度矢量.

在式(2)的基础上, 根据薄板薄壳的电磁弹性假设和线性化方法<sup>[1]</sup>, 略去扰动后激发产生的电磁量和弹性位移量间的二阶及以上项. 积分后得到作用于板单位面积上的电磁力及力矩表达式为<sup>[6]</sup>

$$F_x = \sigma h B_{0z} (e_y + B_{0x} \frac{\partial w}{\partial t} - B_{0z} \frac{\partial u}{\partial t}) \quad (3)$$

$$F_y = \sigma h B_{0z} (-e_x + B_{0y} \frac{\partial w}{\partial t} - B_{0z} \frac{\partial v}{\partial t}) \quad (4)$$

$$F_z = \sigma h B_{0y} (e_x - B_{0y} \frac{\partial w}{\partial t} + B_{0z} \frac{\partial v}{\partial t}) - \sigma h B_{0x} (e_y + B_{0x} \frac{\partial w}{\partial t} - B_{0z} \frac{\partial u}{\partial t}) \quad (5)$$

$$m_x = \frac{\sigma h^3}{12} B_{0z}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \quad (6)$$

$$m_y = \frac{\sigma h^3}{12} B_{0z}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y} \quad (7)$$

式中  $e(e_x, e_y, e_z)$  为电场强度矢量,  $\sigma$  为电导率.

## 2 横向磁场中梁式板的非线性振动微分方程

对于稳恒横向磁场  $B_0(0, 0, B_{0z})$  中受机械动荷载  $P_z = q_0 \sin \Omega t$  ( $q_0$  为力幅,  $\Omega$  为频率) 作用的  $x$  方向两端简支梁式传导薄板, 其位移不随  $y$  变化. 这样, 将电磁力的表达式代入式(1)中, 并考虑到几何和物理方程, 可推得如下横向磁场中梁式板的非线性振动方程

$$D_M \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{3}{2} D_N \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\sigma h^3 B_{0z}}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} - P_z = 0 \quad (8)$$

设满足两端简支边界条件梁式板的关于方程(8)的解具有如下形式

$$w(x, t) = \Phi(t) \sin \frac{\pi x}{l} \quad (9)$$

式中  $l$  为板沿  $x$  向的长度.

将式(9)代入式(8)中, 得残值

$$\begin{aligned} \chi = & \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 D_M \Phi \sin \frac{\pi x}{l} + \rho h \dot{\Phi} \sin \frac{\pi x}{l} + \\ & \frac{3}{2} D_N \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 \Phi^3 \cos^2 \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \\ & \frac{\sigma h^3}{12} B_{0z}^2 \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \dot{\Phi} \sin \frac{\pi x}{l} - \\ & q_0 \sin \Omega t \neq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

式中  $\dot{\Phi}$ ,  $\ddot{\Phi}$  分别表示对时间的一阶和二阶导数.

采用伽辽金积分法, 并进行无量纲化处理后, 进一步得到梁式板的振动微分方程为

$$\ddot{g} + g = -\eta_1 \dot{g} - \eta_2 g^3 + \eta_3 \sin \Omega_0 \tau \quad (11)$$

式中  $\eta_1 = \frac{\sigma h^2 B_{0z}^2}{12 \rho \omega} \left( \frac{\pi}{l} \right)^2$ ,  $\eta_2 = \frac{3}{8} \frac{D_N h}{\rho \omega^2} \left( \frac{\pi}{l} \right)^4$ ,  $\eta_3 = \frac{4 q_0}{\pi \rho h^2 \omega^2}$ ;  $\dot{g}$  和  $\ddot{g}$  表示  $g$  对  $\tau$  求导; 无量纲量  $\tau = \omega t$ ,

$$\xi = \frac{\pi x}{l}, g = \frac{\Phi}{h}, \Omega_0 = \frac{\Omega}{\omega}, \omega = \sqrt{\frac{D_M}{\rho h}} \left( \frac{\pi}{l} \right)^2.$$

## 3 超谐波共振问题与多尺度法求解

在研究超谐波共振 ( $\Omega_0 \approx 1/3$ ) 问题时, 考虑硬激励情况, 并引入小参数  $\varepsilon$ , 则方程(11)可写为

$$\ddot{g} + g = -\varepsilon \eta_{01} \dot{g} - \varepsilon \eta_{02} g^3 + \eta_3 \sin \Omega_0 \tau \quad (12)$$

利用多尺度法<sup>[7]</sup>, 将上面方程的近似解表示为

$$g(\tau, \varepsilon) = g_0(T_0, T_1) + \varepsilon g_1(T_0, T_1) + \dots \quad (13)$$

这里, 新自变量  $T_0 = \tau, T_1 = \varepsilon \tau$ .

将(13)代入(12)中, 并令方程两侧  $\varepsilon$  的同次幂项系数相等, 可得

$$D_0^2 g_0 + g_0 = \eta_3 \sin \Omega_0 T_0 \quad (14)$$

$$D_0^2 g_1 + g_1 = -2D_0 D_1 g_0 - \eta_{01} D_0 g_0 - \eta_{02} g_0^3 \quad (15)$$

这里,  $D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0}, D_1 = \frac{\partial}{\partial T_1}, D_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2}$ .

方程(14)的通解可写为

$$g_0 = A(T_1) \exp(i T_0) + i \Lambda \exp(i \Omega_0 T_0) + cc \quad (16)$$

式中  $\Lambda = -\eta_3(1 - \Omega_0^2)^{-1/2}, i^2 = -1, cc$  为前面项的共轭项(下同).

这样, 将式(16)代入式(15)中, 可得到

$$\begin{aligned} D_0^2 g_1 + g_1 = & -(2iA' + i\eta_{01}A + 6\eta_{02}A\Lambda^2 + \\ & 3\eta_{02}A^2\bar{A})\exp(iT_0) - (i\eta_{01}\Omega' + \\ & 3i\eta_{02}\Lambda^2 + 6i\eta_{02}A\bar{A})\exp(i\Omega_0 T_0) - \\ & \eta_{02}iA^3\exp(3iT_0) - i\Lambda^3\exp(3i\Omega_0 T_0) + \\ & 3iA^2\Lambda\exp[i(2 + \Omega_0)T_0] + \\ & 3i\bar{A}^2\Lambda\exp[i(\Omega_0 - 2)T_0] - \\ & 3A\Lambda^2\exp[i(1 + 2\Omega_0)T_0] - \\ & 3A\bar{A}^2\exp[i(1 - 2\Omega_0)T_0] \} + cc \end{aligned} \quad (17)$$

式中的撇号代表对  $T_1$  的一阶导数.

引进调协参数  $\lambda$ , 并令

$$3\Omega_0 = 1 + \varepsilon \lambda \quad (18)$$

由此, 根据消除永年项的条件得

$$\begin{aligned} i(2A' + \eta_{01}A) + 6\eta_{02}A\Lambda^2 + 3\eta_{02}A^2\bar{A} - \\ i\eta_{02}\Lambda^3\exp(i\lambda T_1) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

再将  $A(T_1)$  表示成如下极式形式

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) \exp[i\beta(T_1)] \quad (20)$$

这样, 在式(19)中进行实部和虚部分离后得到

$$a' = -\frac{\eta_{01}}{2} a + \eta_{02} \Lambda^3 \cos \gamma \quad (\gamma = \lambda T_1 - \beta) \quad (21)$$

$$a\gamma' = (\lambda - 3\eta_{02}\Lambda^2)a - \frac{3\eta_{02}}{8}a^3 - \eta_{02}\Lambda^3\sin\gamma \quad (22)$$

对于稳态运动情况, 令  $a' = \gamma' = 0$ , 则在上面两式的基础上消去  $\gamma$  后, 最终得到的幅频响应方程为

$$\left[ \frac{\eta_{01}^2}{4} + (\lambda - 3\eta_{02}\Lambda^2 - \frac{3\eta_{02}}{8}a^2)^2 \right] a^2 = \eta_{02}^2 \Lambda^6 \quad (23)$$

### 4 算例分析

对于铝制薄板,在给定相应参数<sup>[6]</sup>并取板长  $l = 0.2 \text{ m}$  下,通过编程计算,得到了相应的幅频响应曲线图和时间历程图.由幅频响应曲线图可见,在共振区域系统的幅值急剧增大,呈现出硬特性,并伴有多值和跳跃现象的发生,下面弯线为不稳定解区域.当板厚一定时(图 1),随磁场强度的增大,幅值呈下降趋势,即外加磁场相当于电磁阻尼的作

用;当磁场一定时(图 2),随板厚的增加,幅值亦呈下降趋势;图 3 为激励幅值对系统振动的影响,并与前者具有相类似的曲线变化规律.图 4 为时间历程曲线图,因超谐波激励下的响应为自由振动解与特解的叠加,故曲线呈现出图中所示的变化规律.通过给出的这些曲线易见,当结构发生超谐波共振时,将伴有较复杂的动力学行为,因此本文得到的结果,可为进一步对系统的电磁振动控制问题研究提供理论依据.

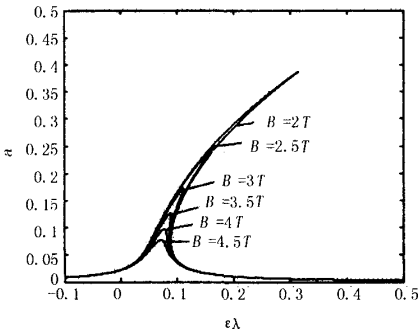


图 1 幅频响应曲线( $h = 2.5 \text{ mm}, q = 1500 \text{ N/m}^2$ )

Fig.1 Frequency response( $h = 2.5 \text{ mm}, q = 1500 \text{ N/m}^2$ )

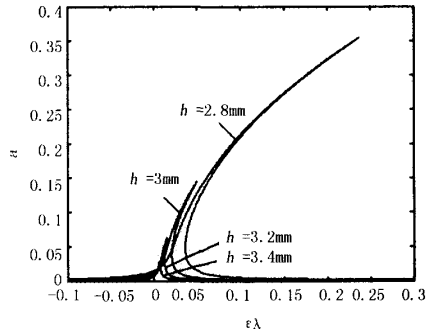


图 2 幅频响应曲线( $B = 1 \text{ T}, q = 1500 \text{ N/m}^2$ )

Fig.2 Frequency response( $B = 1 \text{ T}, q = 1500 \text{ N/m}^2$ )

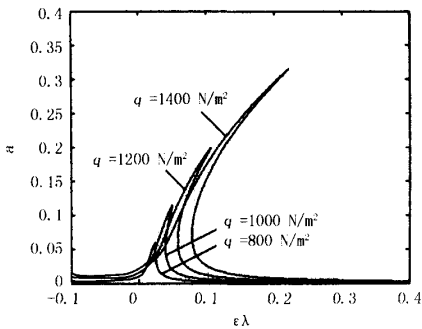


图 3 幅频响应曲线( $h = 2.5 \text{ mm}, B = 2 \text{ T}$ )

Fig.3 Frequency response( $h = 2.5 \text{ mm}, B = 2 \text{ T}$ )

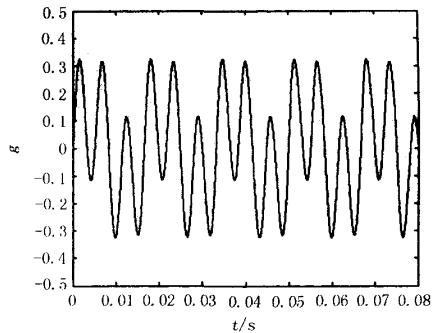


图 4 时间历程曲线( $h = 2.5 \text{ mm}, B = 2 \text{ T}, \epsilon\lambda = 0.16$ )

Fig.4 Time history( $h = 2.5 \text{ mm}, B = 2 \text{ T}, \epsilon\lambda = 0.16$ )

### 5 结束语

本文研究了机械载荷作用下电磁场环境中薄板的超谐波共振问题,得到了稳态运动下的幅频响应方程;并通过幅频响应曲线图的给出,分析了磁场、板厚和激励幅值对结构振动的影响,得到了一些有价值结论.在本文工作的基础上,可进一步对复杂电磁场环境下弹性结构的非线性动力学问题开展更加深入的研究.

### 参 考 文 献

- 1 Амбарцумян С.А. Багдасарян Г.Е. Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. Москва: Наука, 1977
- 2 Lee JS. Dynamic stability of conducting beam - plates in transverse magnetic fields. *Journal of Engineering Mechanics*, 1996, 122(2): 89~94
- 3 Thompson RCA, Mullin T. Routes to chaos in a magneto - elastic beam. *Chaos Solitons and Fractals*, 1997, 8

- (4):681~697
- 4 邱家俊. 机电耦联动力系统的非线性振动. 北京: 科学出版社, 1996 (Qiu Jiajun. Nonlinear vibration on coupled mechanical and electric dynamic systems. Beijing: Science Press, 1996(in Chinese))
- 5 胡宇达. 传导薄板的非线性磁弹性振动问题. 工程力学, 2001, 18(4):89~94(Hu Yuda. Magneto-elastic nonlinear vibration analysis of a thin conductive plate. *Engineering Mechanics*, 2001, 18(4):89~94(in Chinese))
- 6 胡宇达. 薄板薄壳的磁弹性振动问题[博士论文]. 秦皇岛: 燕山大学, 1998 (Hu Yuda. The magnetoelastic vibration problem for thin plate and shell. [Ph D Thesis]. Qinhuangdao: Yanshan University, 1998(in Chinese))
- 7 Nayfeh AH, Mook DT. *Nonlinear Oscillations*. New York: John Wiley & Sons, 1979

## ULTRAHARMONIC RESONANCE OF CONDUCTIVE BEAM-PLATE UNDER MAGNETIC FIELD AND MECHANIC LOADING

Hu Yuda Du Guojun Wang Guowei

(School of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

**Abstract** This paper studied the non-linear ultraharmonic resonance of a conductive beam plate in a magnetic field subjected to some mechanical loadings. Base on the nonlinear electro-magneto-elastic equations of the plate and the expression of the electromagnetic forces, the vibration equations of the thin beam plate under uniform transverse magnetic field and mechanical loadings were obtained. By using the Galerkin's method, the differential equation of the nonlinear vibration was derived. By means of the multiscale method, the amplitude and frequency resonance equations in steady state were obtained. By some examples, the amplitude - frequency curves and the time history curves were derived. The influences of plate thickness, magnetic field and excitation amplitude on vibration properties of system were analyzed.

**Key words** magnetoelastic, conductive beam plate, magnetic field, ultraharmonic resonance, multiscale method