

一个时滞反馈受控机电系统中的暂态混沌*

王在华¹ 胡海岩² 王怀磊²

(1. 解放军理工大学理学院, 南京 210007) (2. 南京航空航天大学振动工程研究所, 南京 210016)

摘要 研究了一种具有时滞反馈的磁悬浮轴承系统的暂态混沌现象. 数值分析表明, 在相当大的时滞取值区间内, 该系统的最终稳态运动不仅对初始值极其敏感, 而且对反馈环节中的时滞也极其敏感. 并对这种暂态混沌运动现象作了初步解释.

关键词 时滞, 稳定性, 暂态混沌, 全局分叉

引言

混沌运动是一种不规则运动, 其基本特征是运动状态对初始状态极其敏感, 从而不可预测. 暂态混沌运动通常指的是这样一种运动, 系统随时间演化将进入多个稳定稳态运动中的某一个, 但其最终状态强烈依赖于初始值的选取. 由于不确定因素的影响, 无法事先知道暂态运动需要持续多长时间, 也不知道最终的结果会是什么, 初始状态的微小改变会使系统运动状态从多个稳定的稳态运动中的一个跳到另一个. 因此, 暂态混沌运动也是不可预测的, 而且有可能对系统的运行造成危险. 暂态混沌运动广泛存在于非线性动力系统中. 例如, 著名的 Lorenz 方程^[1]、具有双势井的耗散非线性振子^[2]、经典的 Mathieu 方程^[3]等都可以产生这样的运动.

近年来, 人们对动力学控制速度的要求日益提高, 控制环节中时滞已成为对系统动力学行为进行分析和设计时必须考虑的因素. 受控时滞系统状态的变化不仅依赖于当前的状态, 而且依赖于过去某段时间的状态, 要用时滞微分方程来描述. 研究表明, 暂态混沌运动也广泛存在于带有时滞的非线性动力系统中. 由于时滞系统的状态空间是 Banach 空间, 系统初始状态是定义在时滞区间上的连续函数, 对系统动力学进行理论分析相当困难. 本文主要通过数值模拟方法验证, 磁悬浮轴承技术中的一类受控时滞系统存在暂态混沌现象. 该系统的最终稳态运动不仅对初始值极其敏感, 而且更为重要的是这些运动对反馈环节中的时滞也是极其敏感的.

1 系统运动方程

本文我们研究一种经过简化的单自由度磁悬浮轴承系统^[4,5]

$$m\ddot{x} = F(x, i) := k \left(\frac{(I_b - i)^2}{(g_0 - x)^2} - \frac{(I_b + i)^2}{(g_0 + x)^2} \right) \quad (1)$$

其中 m 为转子质量, $x := x(T)$ 为转子在 T 时刻偏离平衡态的水平位移, $F(x, i)$ 为磁力, k 是力常数, I_b 是偏流, i 是控制电流, g_0 是轴承与转子间的名义气隙. 该模型忽略了诸如外部扰动、转子的非平衡性等因素, 但可以描述磁悬浮轴承系统的某些本质特征^[4,5]. 未受控的磁悬浮轴承系统是不稳定的. 为了获得稳定的运动, 一般采用 PID 控制或 PD 控制. 考虑到控制环节中不可避免的时滞效应, 将 PD 控制的电流表述为

$$i = k_p x(T - \Delta) + k_d \dot{x}(T - \Delta) \quad (2)$$

其中 k_p 和 k_d 为反馈增益, $\Delta > 0$ 为时滞. 将式(2)代入式(1), 引入无量纲状态变量和参数

$$y = x/g_0, t = \Omega T, \Omega^2 = 4kI_b^2/(mg_0^3)$$

$$\tau = \Omega\Delta, u = k_p g_0/I_b, v = k_d \Omega g_0/I_b$$

并忽略 $F(x, i)$ 在 $(x, i) = (0, 0)$ 点处的 Taylor 展开式中 3 阶以上的高阶项, 得到如下无量纲运动方程

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + v\dot{y}(t - \tau) + uy(t - \tau) - \\ y(t) + f(y) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

其中导数是关于无量纲时间 t 的导数, 且非线性函数 $f(y)$ 为

$$f(y) := -2y^3(t) + 3y^2(t)[uy(t - \tau) + v\dot{y}(t - \tau) - y(t) - y(t)[uy(t - \tau) + v\dot{y}(t - \tau)]^2$$

2004-07-30 收到第 1 稿, 2004-08-15 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(0372116, 50135030)及教育部留学回国人员科研启动基金资助项目

2 线性稳定性分析

显然,如果 $u < 2$,则该系统只有 1 个平衡点 $y_1 = 0$;而当 $u > 2$ 时,系统有 3 个平衡点 $y_1 = 0$, $y_{2,3} = \pm 1\sqrt{u-2}$. 因此,系统在 $u = 2$ 时发生平衡点分叉.

在 $y_1 = 0$ 处,系统的特征拟多项式为

$$p_1(\lambda) = \lambda^2 + (u\lambda + u)e^{-\lambda\tau} - 1 \quad (4)$$

如果 $u > 2$,则对应于非零平衡点 $y_{2,3}$ 的特征函数 $p_2(\lambda)$ 为

$$p_2(\lambda) = \lambda^2 - (u-1)(u\lambda + u)e^{-\lambda\tau}/(u-2) - (u^2 - 5u + 4)/(u-2) \quad (5)$$

如果 $\tau = 0$,则容易知道有如下结论:

- 1) 当 $v > 0, 2 > u > 1$ 时,系统唯一的平衡点 y_1 是渐近稳定的;
- 2) 当 $v < 0$ 或 $u < 1$ 时,系统唯一的平衡点 y_1 是不稳定的;
- 3) 当 $v > 0, u > 2$ 时,平衡点 y_1 是渐近稳定的,但 $y_{2,3}$ 是不稳定的;
- 4) 当 $v < 0, u > 2$ 时,3 个平衡点皆不稳定.

当 $\tau > 0$ 时,如果存在 $0 \neq \omega \in R$ 使得 $p_1(i\omega) = 0$,则 ω 必定满足

$$F_1(\omega) := \omega^4 + (-v^2 + 2)\omega^2 - u^2 + 1 = 0 \quad (6)$$

由初等代数知识可知,多项式 $F_1(\omega)$ 可以无实根($\delta := (2 - v^2)^2 - 4(1 - u^2) < 0$;或 $\delta \geq 0, 2 - v^2 > 0, 1 - u^2 > 0$),可以有 2 个实根($\delta \geq 0, 1 - u^2 < 0$),也可以有 4 个实根($\delta \geq 0, 2 - v^2 < 0, 1 - u^2 \geq 0$).

如果 $F_1(\omega) = 0$ 有一非零实根 ω_* ,容易求得临界时滞 τ_* 使得 $p_1(i\omega) = 0$. 进一步,可以证明^[5,6]

$$\operatorname{sgn}\left[\frac{d\lambda}{d\tau}\right]_{(\omega_*, \tau_*)} = \operatorname{sgn}F_1'(\omega_*) \quad (7)$$

因此,如果 $F_1(\omega)$ 有一简单零点 ω_* 并且 $F_1'(\omega_*) > 0$ ($F_1'(\omega_*) < 0$),则当 τ 从左到右跨过临界时滞 τ_* 时,系统会增加(减少)一对具有正实部的共轭复根,从而系统可能发生稳定性切换^[6,7]. 因此,

- (a) 当 $\delta := (2 - v^2)^2 - 4(1 - u^2) < 0$;或 $\delta \geq 0, 2 - v^2 > 0, 1 - u^2 > 0$ 时,如果 $v > 0, u > 1$,则平衡点 y_1 对任意时滞是渐近稳定的;如果 $v < 0$ 或 $u < 1$,则平衡点 y_1 对任意时滞都是不稳定的.

(b) 对其他的参数组合,随着时滞量的增加,

平衡点 y_1 的稳定性会发生切换现象.

对平衡点 $y_{2,3}$ 的特征函数 $p_2(\lambda)$,由 $p_2(i\omega) = 0$ 容易求得相应的函数 $F_2(\omega)$ 如下

$$F_2(\omega) := \omega^4 + (u-1)(2u^2 - u\omega^2 - 12u + v^2 + 16)\omega^2/(u-2)^2 - 8(u-1)^2/(u-2) \quad (8)$$

该函数至少有 2 个实根. 因此,随着时滞 τ 的变化,平衡点 y_2 的稳定性必发生切换.

例如,当 $u = 0.998, v = 1.47$ 时,系统有唯一的平衡点 $y_1 = 0$. 无时滞时,该平衡点为鞍点. 此时为简单起见,我们假设 $0 < \tau < 2$,则相应的多项式 $F_1 = \omega^4 - 0.1609\omega^2 + 0.003996$ 有两对实根 $\pm 0.1752, \pm 0.3608$,从而可求得最小的临界时滞分别为 1.4415 和 1.3539. 另外,直接计算知 $F_1(\pm 0.1752) < 0, F_1(\pm 0.3608) > 0$. 从而,对 $\tau \in [0, 1.3539)$, $p_1(\lambda)$ 有一对具有正实部的共轭复根,当 $\tau \in (1.3539, 1.4415)$ 时, $p_1(\lambda)$ 有两对具有正实部的共轭复根,而当 $\tau \in (1.4415, 2)$ 时, $p_1(\lambda)$ 又只有一对具有正实部的共轭复根.

3 暂态混沌运动

即使是在无时滞情形,该系统的非线性动力学也可以非常复杂. 例如,当 $v < 0, u > 2$ 时,系统的 3 个平衡点都是不稳定的,这类多个不稳定平衡点间相互作用的典型情况可参见综述^[8]. 本文的主要兴趣在于,该系统仅有唯一的平衡点,但由于反馈环节存在时滞,系统具有对初始值及时滞都很敏感的暂态混沌运动.

仍以 $u = 0.998, v = 1.47$ 为例(但以下性质对许多其它参数组合对应的系统也是有的). 此时,系统的唯一平衡点 $y_1 = 0$ 是不稳定的. 由前面的分析可知,当 $\tau \in [0, 1.3539]$ 时,系统的不稳定流形是 2 维的,当 $\tau \in (1.3539, 1.4415)$ 时,不稳定流形是 4 维的,而当 $\tau \in (1.4415, 2)$ 时,不稳定流形又变为 2 维的.

如图 1 所示,当 $\tau = 0.8$ 时,系统的运动是混沌的,其中 $\sum_1 = \{(y, y') : y'(t - \tau) = 0\}$,当 $y'(t - \tau)$ 由负变正跨过零点时对应的相点所决定, $y_0 = 0.1$. 更重要的是,数值分析表明,在相当宽的时滞范围内,该系统具有暂态混沌运动. 在如下的算例中,初始条件取为 $y(t) = y_0, y'(t) = 0, (\forall t \in [-\tau, 0])$,积分步长取为 0.005,各图形是利用软件 XPPAUT 得到的.

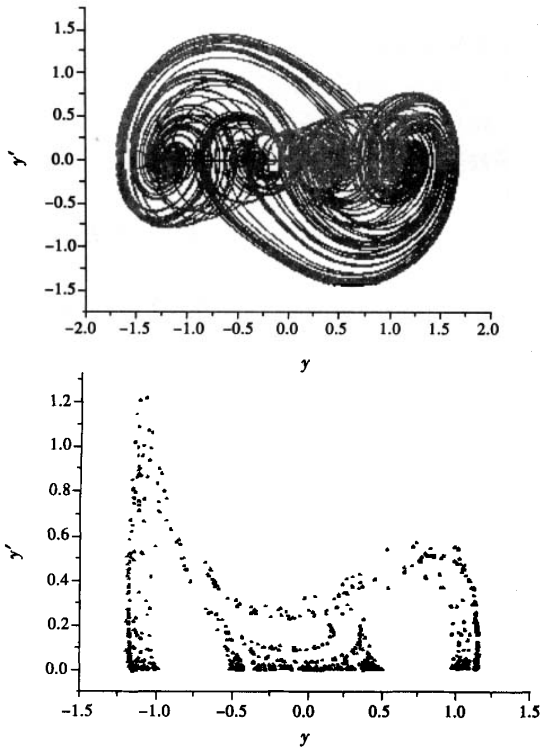


图1 $\tau = 0.8$ 时,系统的混沌运动

上)相轨线;下)关于 Σ_1 的Poincaré截面图

Fig. 1 The chaotic motion when $\tau = 0.8$;

(Top) the phase portrait;

(Bottom) the phase portrait on the Poincaré section Σ_1 .

图2和图3分别对 $\tau = 0.73$ 和 $\tau = 1.12$ 这两种情况给出了系统最终状态对初始值极其敏感的几个算例.图2给出的是 $\tau = 0.73$ 时位移与速度的时间历程,如果初始位移取为 $y_0 = 0.0495$,则系统最终收敛到一个正位移的稳定周期运动;而当 $y_0 = 0.05$ 和 $y_0 = 0.0505$ 时,系统的最终运动为一具有负位移的稳定周期运动,并且容易看出二者的暂态运动完全不一样.图3中记录的是取定 $\tau = 1.12$,当 $y'(t - \tau)$ 由负变正跨过零点时对应的Poincaré截面图.取 $y_0 = 0.05$ 和 $y_0 = 0.0505$ 时,忽略暂态过程后得到两个形状不同的封闭曲线,正好对应两个不同的拟周期运动.

对于以常微分方程描述的动力系统,暂态混沌对应着这样一种情况,即系统具有多个共存吸引子,其吸引盆具有分形结构,而分形吸引盆的边界是由同宿或异宿轨道分叉等全局分叉引起的^[2].但

对于时滞动力系统来说,目前还缺少研究这种现象的理论和方法,甚至对如何恰当地定义同宿轨道、异宿轨道也是很困难的.为理解这种现象,数值模拟是必要的.

在图4中,固定初始位移 $y_0 = 0.1$,给出了系统位移关于参数 τ 的分叉图.此处,取Poincaré截面为 $\Sigma_2 := \{(\tau, y(t)) : y'(t) = 0\}$,其中 $y'(t)$ 取由负变正跨过零点.从图中可以看出,对介于 $(0.77, 0.79)$ 中的某个 τ ,系统会发生分叉.注意到在这个时滞区间段内,该时滞受控系统不发生诸如平衡点分叉、Hopf分叉等局部分叉,故上述分叉应该是全局分叉.

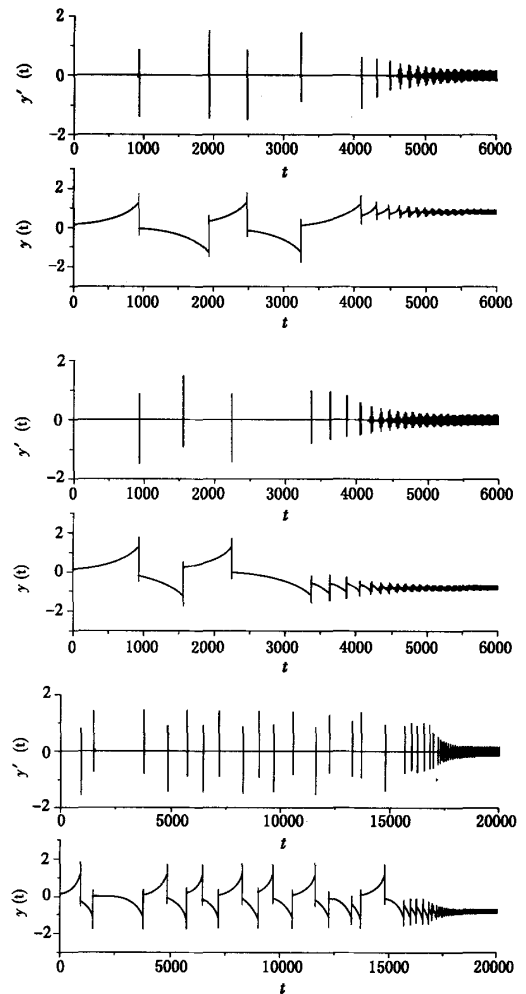


图2 当 $\tau = 0.73$ 时,对应于 $y_0 = 0.0495, y_0 = 0.05$ 和 $y_0 = 0.0505$,系统暂态混沌运动的时间历程

Fig. 2 Time histories of the chaotic transients of $y(t)$ and $y'(t)$ for $y_0 = 0.0495, 0.05, 0.0505$ when $\tau = 0.73$.

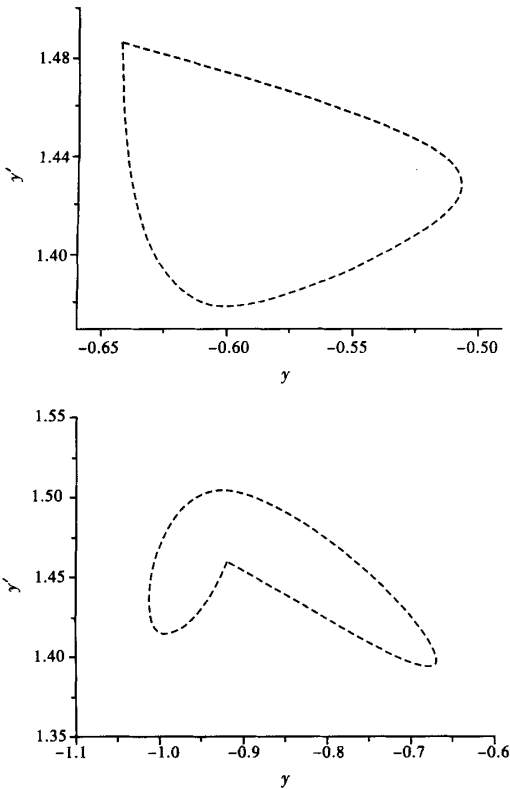


图3 对固定的时 $\tau = 1.12$, 对应于 $y_0 = 0.05, y_0 = 0.0505$, 忽略暂态运动后关于 Σ_1 的 Poincaré 截面图

Fig. 3 The phase portrait on the Poincaré sections Σ_1 for fixed $\tau = 1.12$, after neglecting transients

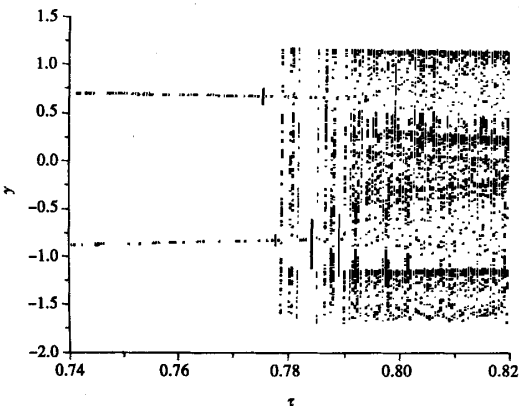


图4 对应于取定的初值 $y_0 = 0.1$, 在 Poincaré 截面 Σ_2 上的分叉图

Fig. 4 The bifurcation diagram for fixed $y_0 = 0.1$ on the Poincaré section Σ_2 .

需要指出的是,对给定的时滞 τ ,图4左部两条不连续线上的点有且仅有一个出现.这表明,该系统运动状态关于时滞也是极其敏感的.如果时滞落在这一区域,则很难预测系统的稳态运动是哪一个,这样的系统是极其有害的.

4 结论

研究时滞动力系统的暂态混沌运动具有重要的科学意义,因为对实际系统来说,这类运动常常是有害的.尽管对无时滞动力系统的暂态混沌运动已有不少研究,但对带有时滞的动力系统的暂态混沌运动研究还难以见到.本文的主要贡献是,对所考察的具有时滞反馈的机电系统,数值分析表明对许多远离局部分叉的参数值,其最终稳态运动不仅对初始值极其敏感,而且对反馈环节中的时滞也极其敏感.这种现象也可能是由同宿轨道分叉等全局分叉引起的分形结构所导致的,就像用常微分方程描述的系统那样.问题是我们目前还缺少研究这一现象的在应用上方便有效的理论、方法或数学工具.

参 考 文 献

- 1 Strogatz SH. Nonlinear Dynamics and Chaos, Addison-Wesley, Reading, 1994
- 2 Szemplinska - Stupnicka W, Tyrkiel E. Sequences of global bifurcations and multiple chaotic transients in a mechanical driven oscillator. In: F. C. Moon ed. IUTAM Symposium on New Applications of Nonlinear and Chaotic Dynamics in Mechanics, Kluwer, Dordrecht, 1999, 81~91
- 3 Soliman MS. Jumps to resonance phenomena in nonlinear mechanics: Fractal basins, chaotic transients and unpredictability. In: F. C. Moon ed. IUTAM Symposium on New Applications of Nonlinear and Chaotic Dynamics in Mechanics, Kluwer, Dordrecht, 1999, 109~115
- 4 Ji JC. Stability and bifurcation in an electromechanical system with time delays. *Mechanics Research Communications*, 2003, 30: 217~225
- 5 Ji JC. Stability and Hopf bifurcation of a magnetic bearing system with time delays. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 259: 845~856
- 6 Hu HY, Wang ZH. Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Delayed Feedback. Berlin: Springer-Verlag, 2002
- 7 Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications to Population Dynamics. New York: Academic Press, 1993
- 8 Izhikevich EM. Neural excitability, spiking and bursting.

CHAOTIC TRANSIENTS IN A CONTROLLED ELECTROMECHANICAL SYSTEM WITH DELAYED FEEDBACK*

Wang Zaihua¹ Hu Haiyan² Wang Huailei²

(1. *Institute of Sciences, PLA University of Science and Technology, Nanjing 210007, China*)

(2. *Institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China*)

Abstract This paper studied the chaotic transient phenomena of a controlled electromechanical system with a time delay in the feedback path. The numerical analysis showed that the final steady motions are not only sensitive to the initial system states, but also sensitive to the values of time delay, for which we gave a preliminary explanation.

Key words time delay, stability, chaotic transient, global bifurcation