

# 窄带随机噪声作用下强非线性 Duffing-Rayleigh 振子的响应\*

杨晓丽 徐伟 孙中奎  
(西北工业大学应用数学系,西安 710072)

**摘要** 将参数变换法和随机多尺度法结合起来,研究窄带随机噪声激励下强非线性 Duffing-Rayleigh 振子的响应及稳定性问题.首先借助参数变换思想引入小参数,然后用多尺度法分离了系统的快变量,最后由摄动法和矩方法得到了系统的稳态响应.并利用 Routh-Hurwitz 准则得到了稳态解稳定的充要条件.理论分析与数值计算表明:在一定条件下,系统存在两个稳定的稳态解.数值模拟的结果表明:参数变换法结合随机多尺度法研究强非线性随机系统的响应、稳定性等问题是有效的.

**关键词** 强非线性随机系统,多尺度法,参数变换法,Routh-Hurwitz 准则

## 引言

长期以来,对非线性动力系统响应和稳定性的研究一直是广大科研和工程技术人员关注的焦点,并取得了丰硕的成果<sup>[1]</sup>.然而由于自然界中随机因素的广泛存在,系统不可避免地受其干扰,且强非线性系统由于其理论和应用的重要性,目前已成为关注的焦点之一.因此对强非线性随机动力系统的研究具有重要的意义.

到目前为止,对宽带噪声作用下非线性随机动力系统的研究取得了较多的理论成果.等效线性法<sup>[2]</sup>、拟静态法<sup>[3]</sup>、多尺度法<sup>[4]</sup>、路径积分法<sup>[5]</sup>、随机平均法<sup>[6]</sup>等方法已用于分析窄带随机噪声作用下非线性动力系统的性能.与宽带噪声相比,非线性系统在窄带随机噪声作用下的非线性效应更为突出<sup>[2-6]</sup>,尤其在共振区及其邻域,研究起来也较困难.特别是对不含小参数的所谓强非线性系统在窄带随机噪声作用下响应的研究并不多.

本文就在这方面作一些探讨,研究如下形式的 Duffing-Rayleigh 振子

$$\ddot{u} + u - \epsilon \delta_1 \dot{u} + \frac{1}{3} \epsilon \delta_2 \dot{u}^3 + \epsilon \beta u^3 = \epsilon \xi(t) \quad (1)$$

式中“·”表示对时间  $t$  的导数, $\epsilon$  不必为小参数, $\xi(t)$  为窄带随机噪声.本文采用 Weding<sup>[7]</sup> 提出的统一模型: $\xi(t) = p \cos(\Omega t + \gamma W(t))$ .当带宽  $\gamma \rightarrow 0$  时, $S_\xi(\omega)$  在  $\omega = \pm \Omega$  处取值为无穷大,而在其它处的值趋于零,这是一种典型的窄带噪声的功率

谱密度.本文先由参数变换的思想使方程(1)出现小参数,然后用多尺度法研究该系统的主共振响应及稳定性问题.

## 1 参数变换及多尺度法

在对确定性强非线性动力系统的研究中,参数变换法<sup>[8,9]</sup>是一种行之有效的方法,它使关于原参数  $\epsilon$  的强非线性系统转化为关于小参数  $\alpha$  的系统.假设当  $\gamma = 0$  时系统(1)具有稳态响应,且其主谐波的振幅为  $u_0$ .首先由参数变换<sup>[8]</sup>思想引入变换

$$\text{参数 } \alpha = \frac{\epsilon u_0^2}{4 + 3\epsilon u_0^2}, \text{ 显然 } 0 < \alpha < \frac{1}{3}.$$

Rong Haiwu 等<sup>[10]</sup>应用该变换讨论了强非线性 Van der Pol-Duffing 振子在窄带随机噪声作用下的响应.定义新的时间尺度  $\tau = \Omega t$ ,引入变换  $v = \frac{u}{u_0}$  及调谐

$$\text{参数 } \sigma, \Omega^2 = \frac{1 + \alpha \sigma}{1 - 3\alpha}, \text{ 从而式(1)可化为}$$
$$(1 + \alpha \sigma) \ddot{v} + v - 2\alpha \mu_1 \dot{v} + \alpha(2\mu_2 v^3 + 4\beta v^3 - 3v) = \frac{4p\alpha}{u_0^3} \cos(\tau + \gamma W(\tau)) \quad (2)$$

其中  $\mu_1 = \frac{2\delta_1 \Omega}{u_0^2}, \mu_2 = \frac{2\delta_2 \Omega^3}{3}$ .由于式(2)中含有小参数  $\alpha$ ,下面用多尺度法求解系统(2).

设方程(2)具有如下形式的解

$$v = v_0(T_0, T_1) + \alpha v_1(T_0, T_1) + \dots \quad (3)$$

将式(3)代入式(2),则得

2004-10-09 收到第1稿,2004-11-08 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(10472091);国家重点自然科学基金资助项目(10332030);广东省自然科学基金(04011640)和陕西省自然科学基金资助项目.

$$\begin{aligned}
 D_0^2 v_0 + v_0 &= 0 \quad (4) \\
 D_0^2 v_1 + v_1 &= -\sigma D_0^2 v_0 - 2D_0 D_1 v_0 + \\
 & 2\mu_1 D_0 v_0 - 2\mu_2 (D_0 v_0)^3 - \\
 & 4\beta v_0^3 + 3v_0 + \frac{4p}{u_0^3} \cos(\tau + \gamma W(\tau)) \quad (5)
 \end{aligned}$$

式中  $D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0}$ ,  $D_1 = \frac{\partial}{\partial T_1}$ .

设方程(4)的解

$$v_0 = \frac{a}{2} \exp(i(T_0 + \varphi(T_1))) + cc \quad (6)$$

将式(6)代入式(5), 消除久期项并分离其实部与虚部, 可得

$$\begin{cases}
 a' = \mu_1 a - \frac{3}{4} \mu_2 a^3 - \frac{2p}{u_0^3} \sin(\varphi - \\
 \gamma W(T_1)) \\
 a\varphi' = -\frac{1}{2} a(\sigma + 3) + \frac{3}{2} \beta a^3 - \\
 \frac{2p}{u_0^3} \cos(\varphi - \gamma W(T_1))
 \end{cases} \quad (7)$$

从方程(7)解出  $a, \varphi$  后, 可得方程(1)的首次近似解为

$$u = a(\alpha\tau) u_0 \cos(\tau + \varphi(\alpha\tau)) + O(a)$$

## 2 稳态解及其稳定性

首先讨论当  $\gamma = 0$  时, 系统(7)的稳态解及其稳定性, 式(7)可改写为

$$\begin{cases}
 a' = \mu_1 a - \frac{3}{4} \mu_2 a^3 - \frac{2p}{u_0^3} \sin\varphi \\
 a\varphi' = -\frac{1}{2} a(\sigma + 3) + \frac{3}{2} \beta a^3 - \frac{2p}{u_0^3} \cos\varphi
 \end{cases} \quad (8)$$

令  $a' = 0, \varphi' = 0$ , 由  $u_0$  的定义知稳态响应  $a = a_0 = 1$ . 从式(7)中消去  $\varphi$ , 得系统(1)稳态响应的幅频曲线方程

$$(\mu_1 - \frac{3}{4} \mu_2)^3 + [\frac{3}{2} \beta - \frac{1}{2}(\sigma + 3)]^2 = \frac{4p^2}{u_0^6} \quad (9)$$

式(5)消除长期项后可解得  $v_1$ , 从而得系统(1)的一阶近似解为

$$\begin{aligned}
 u(t) &= u_0 \cos(T_0 + \varphi_0) + \alpha u_0 \left[ \frac{\mu_2}{16} \sin 3(T_0 + \right. \\
 & \left. \varphi_0) + \frac{\beta}{8} \cos 3(T_0 + \varphi) \right] + O(\alpha^2) \quad (10)
 \end{aligned}$$

记  $\rho = \frac{1}{4} u_0^2$ , 取参数  $\varepsilon = 1.0, \delta_1 = 1.0, \delta_2 = 0.5$ , 在  $\rho\text{-}\sigma$  平面上, 随着激励强度  $p$  的变化, 系统的幅频曲线呈现不同的形状. 当  $\beta = 0$  时, 系统(1)为 Rayleigh 振子, 它的幅频曲线如图 1 所示. 当  $p =$

0 时, 幅频曲线退化为点  $(-3, 2)$ , 随着  $p$  的增大, 幅频曲线包括两个分支, 一支类似于椭圆形状, 另一支是接近于  $\sigma$  轴的曲线; 随着  $p$  的继续增大, 类似于椭圆状的分支不断膨胀, 接近于  $\sigma$  轴的分支迅速远离  $\sigma$  轴; 当  $p = 1.0897$  时, 两只分支结合在一起; 随着  $p$  的继续增大直到  $p = 1.19$  时, 幅频曲线为具有多值性且开口不断变大的曲线; 之后随着  $p$  的增大, 幅频曲线不再具有多值性. 当  $\beta \neq 0$  时, 系统(1)为 Duffing-Rayleigh 振子. 取  $\beta = 1.0$ , 它的幅频曲线如图 2 所示. 当  $p = 0$  时, 幅频曲线退化为点  $(0, \frac{1}{3}), (0, \frac{2}{3})$  和  $(0, 1)$ ; 随着  $p$  的继续增大, 幅频曲线形状的变化类似于上述的 Rayleigh 振子的幅频曲线的演化. Nayfeh<sup>[11]</sup> 在研究弱非线性 Duffing-Rayleigh 振子的幅频曲线时也得到相似的结论, 但形状有所不同. 下面讨论稳态解  $a_0, \varphi_0$  的稳定性. 令  $a = a_0 + a_1, \varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ , 其中  $a_0, \varphi_0$  由式(8)决定,  $a_1, \varphi_1$  是摄动项. 将上式代入式(8)并忽略非线性项, 得

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 - \frac{9}{4} \mu_2 & \frac{1}{2}(\sigma + 3) - \frac{3}{2} \beta \\ -\frac{1}{2}(\sigma + 3) + \frac{9}{2} \beta & \mu_1 - \frac{3}{4} \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

式(11)的系数矩阵所对应的特征方程为

$$\lambda^2 + 2B_1 \lambda + B_2 = 0 \quad (12)$$

其中  $B_1 = \frac{3}{2} \mu_2 - \mu_1, B_2 = (\mu_1 - \frac{9}{4} \mu_2)(\mu_1 - \frac{3}{4} \mu_2) + \frac{1}{4}(\sigma + 3)^3 - 3\beta(\sigma + 3) + \frac{27}{4} \beta^2$ .

$a_0, \varphi_0$  稳定的充要条件是方程(12)的所有根具有负实部, 因此稳定的区域为  $B_1 > 0$  和  $B_2 > 0$ , 即图 1 与图 2 中  $\{B_1 = 0, B_2 = 0\}$  线是稳定区域与不稳定区域的分界线, 在这条线的上方解是稳定的、可实现的, 而在下方解是不稳定的、不可实现的.

下面用摄动法讨论当  $\gamma \neq 0$  但很小时, 即有随机扰动时系统(7)的稳态响应. 令  $a = a_0 + a_1, \eta = \varphi_0 + \eta_1$  和  $\eta = \varphi - \gamma W(t)$ , 将上式代入式(7), 则得在点  $(a_0, \varphi_0)$  的线性化的  $It\hat{o}$  方程

$$\begin{cases}
 da_1 = [(\mu_1 - \frac{9}{4} \mu_2) a_1 - (-\frac{1}{2}(\sigma + 3) + \\
 \frac{3}{2} \beta) \eta_1] dT_1 \\
 d\eta_1 = [(-\frac{1}{2}(\sigma + 3) + \frac{9}{2} \beta) a_1 + (\mu_1 - \\
 \frac{3}{4} \mu_2) \eta_1] dT_1 - \gamma dW(T_1)
 \end{cases} \quad (13)$$

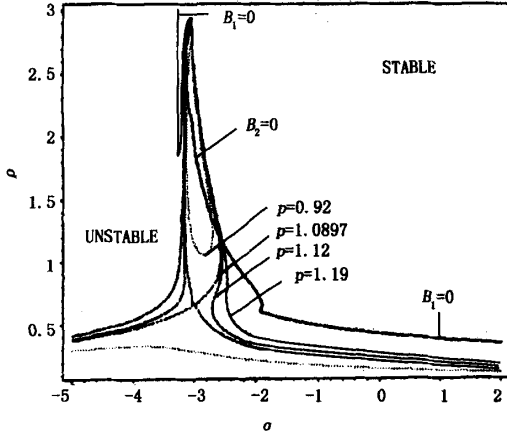


图 1 Rayleigh 振子的幅频曲线  
Fig. 1 Frequency-response curves of the Rayleigh oscillator

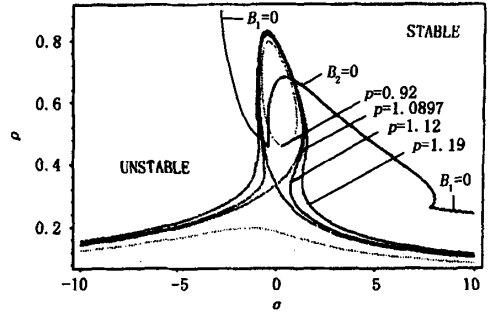


图 2 Duffing-Rayleigh 振子的幅频曲线  
Fig. 2 Frequency-response curves of the Duffing-Rayleigh oscillator

由矩方程法<sup>[12]</sup> 可得一、二阶稳态矩

$$\begin{cases} E a_1 = E \eta_1 = 0 \\ E a_1^2 = \frac{[-\frac{1}{2}(\sigma + 3) + \frac{3}{2}\beta]^2 \gamma^2}{4(\frac{3}{2}\mu_2 - \mu_1)[(\mu_1 - \frac{9}{4}\mu_2)(\mu_1 - \frac{3}{4}\mu_2) + \frac{1}{4}(\sigma + 3)^2 - 3\beta(\sigma + 3) + \frac{27}{4}\beta^2]} \\ E a_1 \eta_1 = \frac{(\mu_1 - \frac{9}{4}\mu_2)[-\frac{1}{2}(\sigma + 3) + \frac{3}{2}\beta] \gamma^2}{4(\frac{3}{2}\mu_2 - \mu_1)[(\mu_1 - \frac{9}{4}\mu_2)(\mu_1 - \frac{3}{4}\mu_2) + \frac{1}{4}(\sigma + 3)^2 - 3\beta(\sigma + 3) + \frac{27}{4}\beta^2]} \\ E \eta_1^2 = \frac{[(\mu_1 - \frac{9}{4}\mu_2)^2 + (\mu_1 - \frac{9}{4}\mu_2)(\mu_1 - \frac{3}{4}\mu_2) + \frac{1}{4}(\sigma + 3)^2 - 3\beta(\sigma + 3) + \frac{27}{4}\beta^2] \gamma^2}{4(\frac{3}{2}\mu_2 - \mu_1)[(\mu_1 - \frac{9}{4}\mu_2)(\mu_1 - \frac{3}{4}\mu_2) + \frac{1}{4}(\sigma + 3)^2 - 3\beta(\sigma + 3) + \frac{27}{4}\beta^2]} \end{cases} \quad (14)$$

根据 Routh-Hurwitz 准则<sup>[13]</sup>, 二阶稳态矩稳定的充分必要条件是  $B_1 > 0$  和  $B_2 > 0$ .

由式(14) 可得系统(1) 的均方响应为

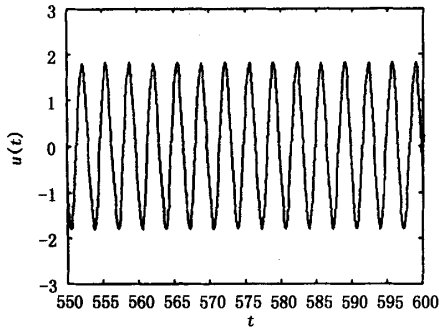
$$E a^2 = u_0^2 a_0^2 + \frac{\mu_0^2 [-\frac{1}{2}(\sigma + 3) + \frac{3}{2}\beta]^2 \gamma^2}{4(\frac{3}{2}\mu_2 - \mu_1)[(\mu_1 - \frac{9}{4}\mu_2)(\mu_1 - \frac{3}{4}\mu_2) + \frac{1}{4}(\sigma + 3)^2 - 3\beta(\sigma + 3) + \frac{27}{4}\beta^2]} \quad (15)$$

### 3 数值模拟

本文的数值计算方法可参考文献[12, 14]. 在数值模拟过程中, 窄带过程  $\xi(t)$  可写成如下形式  $\xi(t) = p \cos(\varphi(t))$ ,  $\dot{\varphi}(t) = \Omega + \gamma \zeta(t)$ ,  $\zeta(t) = W(t)$ . 设  $\xi(t)$  的谱密度  $S_\xi(\omega)$  仅当  $0 < \omega \leq 2\omega_0$  取值为 1.0, 而在其余处的取值为 0. 则  $\xi(t)$  可用下式进行模拟

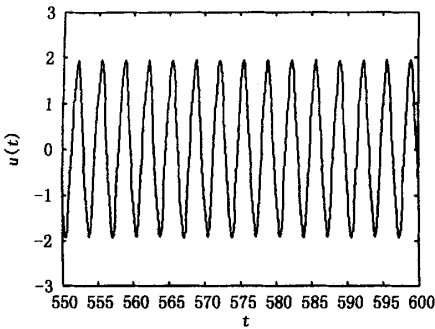
$$\xi(t) = \sqrt{\frac{4\omega_0}{N}} \sum_{k=1}^N \cos[\frac{\omega_0}{N}(2k-1)t + \varphi_k]$$

式中  $\varphi_k$  是  $(0, 2\pi]$  上均匀分布的独立同分布随机变量序列,  $N$  是一个较大的整数. 取参数  $\epsilon = 1.0$ ,  $\delta_2 = 0.5, \beta = 1.0, \omega_0 = 1.0, N = 1000$ , 用四阶的 Runge-Kutta 方法计算系统(1) 的响应. 当  $\delta_1 = 1.0, p = 1.25, \Omega = 1.88, \gamma = 0$  时, 由本文方法得出的系统(1) 的一阶近似解(式(10)) 与数值计算结果的比较见图 3. 当  $p = 0.52, \delta_1 = 0.6, \gamma = 0.005$  时,  $E a^2$  关于  $\sigma$  的变化区线的数值结果和理论结果(式(15)) 的比较见图 4.



(a) 理论解

(a) Theoretical solution



(b) 数值解

(b) Numerical solution

图3 系统(1) 稳态解

Fig. 3 Comparison of the steady state solution of system (1) predicted by the present method with that obtained by numerical calculation

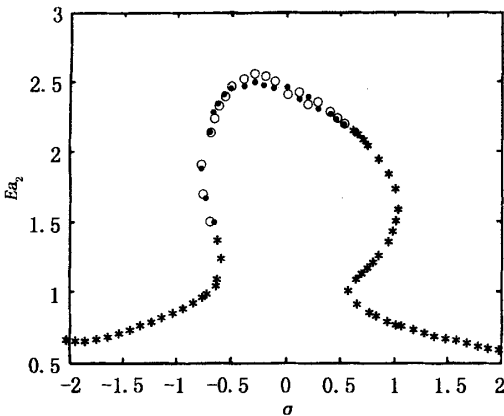


图4 系统(1) 均方响应的幅频曲线

- · · 式(15) 稳定的理论解,
- \* \* \* 式(15) 不稳定的理论解,
- ○ ○ 系统(1) 数值解

Fig.4 Frequency mean-square response of system (1)

- · · stable theoretically solution,
- \* \* \* unstable theoretically solution,
- ○ ○ numerical solution

### 4 结论和讨论

本文将参数变换法和随机多尺度法结合起来,研究了强非线性 Duffing-Rayleigh 振子主共振响应及稳定性等问题.由摄动法和矩方程得到了系统稳态均方响应,并利用 Routh-Hurwitz 准则求得了稳态解稳定的充要条件.在一定条件下系统存在两个稳定的稳态解.本文的提法适用于讨论窄带随机噪声外激作用下一类强非线性系统  $\ddot{u} + u + \epsilon au^3 + f(\dot{u}) = \epsilon \xi(t)$  的主共振响应及稳定性等问题,此方法在多自由度强非线性随机动力系统的应用将在后面的文章中进行讨论.

### 参 考 文 献

- 1 Nayfeh AH. Introduction to Perturbation Techniques. New York:Wiley,1981
- 2 Lyengar RN. Response of nonlinear systems to narrow-band excitation. *Struct Safety*, 1989, 6: 177~185
- 3 Lennox WC, Kuak YC. Narrow band excitation of a nonlinear oscillator. *J Appl Mech*, 1976, 43:340~344
- 4 Rong Haiwu, Xu Wei, Wang Xiangdong, Meng Guang, Fang Tong. Principle response of Van der Pol-Duffing oscillator under combined deterministic and random parametric excitation. *Appl Math Mech*, 2002, 23(3): 299~310
- 5 Yu JS, Lin YK. Numerical path integration of a non-homogeneous Markov process. *Int J Nonlinear Mech*, 2004, 39:1493~1500
- 6 Huang ZL, Zhu WQ, Ni YQ, Ko JM. Stochastic averaging of strongly non-linear oscillators under bounded noise excitation. *J Sound Vib*, 2002, 254(2): 245~267
- 7 Weding WV. Invariant measures and Lyapunov exponents for generalized parameter fluctuations. *Struct Safety*, 1990, 8: 13~25
- 8 Burton TD, Rahman Z. On the mutli-scale analysis of strongly non-linear forced oscillators. *Int J Nonlinear Mech*, 1986, 21(2): 135~146
- 9 Cheung YK, Chen SH, Lau SL. A modified Lindstedt - Poincare method for certain strongly nonlinear oscillators. *Int J Nonlinear Mech*, 1991, 26(3, 4): 367~378
- 10 Rong Haiwu, Meng Guang, Wang Xiangdong, Xu Wei, Fang Tong. Response statistic of strongly non-linear oscillator to combined deterministic and random excitation. *Int J Nonlinear Mech*, 2004, 39: 871~878
- 11 Nayfeh AH, Serhan SJ. Response statistics of nonlinear systems to combined deterministic and random excitations. *Int J Nonlinear Mech*, 1990, 25(5): 493~509

- 12 朱位秋. 随机振动. 北京:科学出版社,1992(Zhu Weiqu. Random Vibration. Beijing: Science Press, 1992 (in Chinese))
- 13 刘秉正,彭建华. 非线性动力学. 北京:高等教育出版社,2004(Liu Bingzheng, Peng Jianhua. Nonlinear Dynamics. Beijing: Higher Education Press, 2004 (in Chinese))
- 14 Shinozuka M. Simulation of multivariate and multidimensional random processes. *J Sound Vib*, 1971, 19:357~367

## RESPONSE STATISTICS OF STRONGLY NON-LINEAR SYSTEM TO RANDOM NARROW-BAND EXCITATION\*

Yang Xiaoli Xu Wei Sun Zhongkui

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnic University, Xi'an 710072, China)

**Abstract** A technique combining the parameter transformation method with the multiple scales method was presented to determine the primary resonance response of a strongly non-linear Duffing-Rayleigh oscillator to random narrow-band excitation. First, we introduced a new expansion parameter  $\alpha = \alpha(\epsilon, \mu_0)$ , and then we employed the multiple scales method to determine the equations, which described the modulation of the amplitude and phase, finally we analyzed the dynamical behaviors of the primary resonance response. The effect of the random excitation on the stable periodic response was analyzed as a perturbation, and the stationary mean-square response was obtained by the moment method. The sufficient and necessary condition for the stability of the steady-state response was obtained by the Routh-Hurwitz criterion. Theoretical analyses and numerical calculation showed that under some conditions the system may have two steady-state solutions, and that the technique was effective to study the strongly non-linear oscillator.

**Key words** stochastic strongly nonlinear system, multiple scales method, parameter transformation, Routh-Hurwitz criterion