第2卷第4期 动力学与控制学报 Vol.2 No.4
2004 年 12 月 JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL Dec. 2004

保守系统中非线性振动问题的数值解法

陈宜周
(江苏大学理学院工程力学研究所,镇江 212013)

摘要 用目标函数方法寻求保守系统中非线性振动问题的解.以摆的运动作为例子,对相关的微分方程在初位移不为零而初速度为零条件下在时间上进行积分.此时,速度为时间的函数,把此函数称为目标函数.因为摆从右侧到左侧再回到右侧完成一个周期,从而此目标函数的第2个零点便是运动的周期.此外,在数值积分过程中,同时得到了位移函数.此法依赖于常微分方程的数值解法和找函数零点的对分法.某些其它非线性常微分方程的解也得到研究.最后,给出了一些例子和数值结果.

关键词 目标函数法,非线性振动,数值解法

引言

文中研究了保守系统中非线性振动问题的解.有关方程可见于著作[1,2].在过去研究的一些情况中,方程中常常带有一个小参数 ε.此方程可用 Lindstedt-Poincare 方法、多尺度法或平均化方法求解[1,2].几乎所有摄动方法,或小参数法都依赖于小参数,以便使近似解能表示为级数的形式.在此法中,要相继求解一系列常微分方程.在摄动方法中,这一系列常微分方程的求解,例如说,直到 ε^4 幂次为止,是非常麻烦的.其次,在摄动方法中,很难估计所得解的精确度.很明显,当参数 ε 为较大值时,此法已不再有效.对摄动方法的局限性,曾有研究者指出[3].

近来,为了寻求杆的压屈载荷和振动频率,有研究者提出了目标函数法[4,5].已经表明,目标函数法是个一般性的方法,它也可以用于本文研究的各种情况.

今介绍目标函数方法的概念如下.令常微分方程为 $\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}t^2+\omega_o^2\sin u=0$ 在初始条件($u=A$, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t=0$ 在时刻 $t=0$)下,在区间$(0,t_p)$上积分.可以发现,函数 $v(t_p)$ 就是提到过的目标函数,其中 $v=\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ 是运动中的速度.用 $t_p=T_{p2}$ 表示目标函数的第2个零点,它便是运动的周期.事实上,考虑下列二点:(a)所假定的初始条件,(b)保守系统中的能量守恒,则在时刻 $t=T_{p2}$ 也有 $u=A$ 和 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t=0$.对比 $t=0$ 和 $t=T_{p2}$ 二个时刻的满足的条件,便可证明 T_{p2} 便是运动的周期.很明显,上述方法很大程度上依赖于计算机的计算.

1 分析

在以下分析中,研究摆运动的常微分方程[1,2]

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\omega_o^2\sin u=0 \tag{1}$$

式中 ω_o 为圆周频率,又给定的初始条件如下

$$u\Big|_{t=0}=A,\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=0 \tag{2}$$

式中 A 为一个正值.此外,令

$$v=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

$$F(u)=\omega_o^2\int_0^u\sin u\,\mathrm{d}u=\omega_o^2(1-\cos u) \tag{4}$$

又对式(1)作积分,在相平面上可得下列方程[1,2]

$$\frac{v^2}{2}+F(u)=h \tag{5}$$

其中 h 可从式(2),(4)和(5)得到,它有值如下

$$h=F(u)\mid_{u=A}=\omega_o^2(1-\cos A) \tag{6}$$

显然,由式(4)和(5)可见,当 $A<\pi$ 时,运动是稳定的.

今介绍目标函数法如下[4,5].对于一个给定的 t_p,对方程(1)在初始条件(2)下进行区间$(0,t_p)$上的积分,此时得到二个函数 $u(t)$,$v(t)$ 和值 $v(t_p)$,其中 $v(t)=\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$.本文中称 $v(t_p)$ 为目标函数.显然,$v(t_p)$ 是给定时间 t_p 的函数,一般说,它不等于零.目标函数法的控制方程如下

$$v(t_p)=0 \tag{7}$$

假定 $t_p=T_{p1}$ 和 $t_p=T_{p2}$ 是目标函数 $v(t_p)$ 的二个相继零点.甚易证明,第2个零点 T_{p2} 就是方程(1)和初始条件(2)决定的运动的周期.事实上,由

2004-04-21 收到第1稿,2004-10-16 收到修改稿.

T_{p1} 和 T_{p2} 的定义和式(4),(5),(6)可得

$$v(T_{p1}) = 0, u(T_{p1}) = -A \qquad (8a)$$

$$v(T_{p2}) = 0, u(T_{p2}) = -A \qquad (8b)$$

今考虑下列二点情况:(a) 式(1)中仅含 d^2u/dt^2, $\sin u$,(b) 在时刻 $t = 0$ 时的条件式(2)和时刻 $t = T_{p2}$ 时的条件式(8b)是等同的.从而,可证明运动有下列周期性

$$u(t) = u(t + T_{p2}) \qquad (9)$$

最后,为了求得运动的周期需要下列步骤.首先,对于一个给定的 t_p,对方程(1)在初始条件(2)下进行区间 $(0, t_p)$ 上的积分,此时得到2个函数 $u(t), v(t)(0 \leqslant t \leqslant t_p)$ 和值 $v(t_p)$.此时,可用Runge-Kutta法对常微分方程进行积分[6].不过,得到的 $v(t_p)$ 不一定等于零.求出目标函数 $v(t_p)$ 的诸零点,特别是第2个零点,是在本研究中一个重点.为此目的,可用对分法来求函数的零点.最后可知,上述方法依赖于常微分方程的数值解和寻求给定函数的零点.这些计算均可用FORTRAN程序在计算机上作出.

在简谐运动 $d^2u/dt^2 + \omega_o^2 u = 0$ 情况下,运动的周期和圆周频率如下

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}, \omega_o = \frac{2\pi}{T_o} \qquad (10)$$

与上类同,摆的运动周期 T_{p2} 和圆周频率 ω_p 可表示为

$$T_{p2} = \frac{2\pi}{\omega_p}, \omega_p = \frac{2\pi}{T_{p2}} \qquad (11)$$

再者,算得的圆周频率 ω_p 可表示为

$$\omega_p = \alpha\omega_o \qquad (12)$$

式中 α 是圆周频率的一个放大,或缩减系数.

上述方法的一个优点是,在得到圆周频率的同时,也得到了振动运动.今把得到的位移表示为

$$u(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{M} c_k \cos(k\omega_p t), (0 \leqslant t \leqslant T_{p2}) \qquad (13)$$

显然,上述Fourier系数可从函数 $u(t)(0 \leqslant t \leqslant T_{p2})$ 得到.可以发现,因 $F(u)$ 是 u 的偶函数,故系数 $c_0, c_2, c_4, \cdots$ 恒为零.再者,缩减系数 α 和诸系数 $c_1, c_3, c_5, \cdots$ 依赖于 A,这些值均列出在表1与表2中.表1列出了方程 $d^2u/dt^2 + \omega_o^2 \sin u = 0$ 和条件 $u(0) = A, u'(0) = 0$ 下,算得的圆周频率减缩系数 α.其中 α 为圆周频率的精确减缩系数,α_1 为由目标函数法得到的圆周频率的减缩系数,β_1 为由 $\beta_1 = (\alpha_1 - \alpha)/\alpha$ 定义的相对误差,α_2 为由摄动法得到的圆周频率的减缩系数,β_2 为由 $\beta_2 = (\alpha_2 - \alpha)/\alpha$ 定义的相对误差.表2列出了方程 $d^2u/dt^2 + \omega_o^2 \sin u = 0$ 和条件 $u(0) = A, u'(0) = 0$ 下,算得的Fourier系数 c_i.在常微分方程的Runge-Kutta法数值积分中,取 $M = 100$ 段进行积分[6].此外,圆周频率的精确值如下式所示[1]

$$T_{p2} = \sqrt{2}\int_{-A}^{A} (h - F(u))^{-1/2} du$$

和

$$\alpha = \frac{\omega_p}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega_0 T_{p2}} \qquad (14)$$

实际计算证明,由式(14)算得的精确值和目标函数法算得的结果极为吻合,直到第4位数字.

表1 圆周频率减缩系数 α

Table 1 Reduced coefficient α of frequency

A	$\pi/18$	$3\pi/18$	$5\pi/18$	$7\pi/18$	$9\pi/18$	$11\pi/18$	$13\pi/18$	$15\pi/18$	$17\pi/18$
α	0.9981	0.9829	0.9526	0.9073	0.8472	0.7720	0.6804	0.5675	0.4099
α_1	0.9981	0.9829	0.9526	0.9073	0.8472	0.7720	0.6804	0.5675	0.4099
β_1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
α_2	0.9981	0.9829	0.9524	0.9067	0.8458	0.7696	0.6783	0.5716	0.4498
β_2	0.0000	0.0000	-0.0002	-0.0007	-0.0017	-0.0031	-0.0031	0.0073	0.0972

表2 Fourier系数 c_i

Table 2 Fourier coefficient c_i

A	$\pi/18$	$3\pi/18$	$5\pi/18$	$7\pi/18$	$9\pi/18$	$11\pi/18$	$13\pi/18$	$15\pi/18$	$17\pi/18$
c_1	0.1746	0.5244	0.8763	1.2321	1.5941	1.9663	2.3555	2.7774	3.2909
c_3	0.0000	-0.0008	-0.0036	-0.0105	-0.0240	-0.0484	-0.0920	-0.1748	-0.3771
c_5	0.0000	0.0000	00000	0.0002	0.0006	0.0020	0.0059	0.0172	0.0634
c_1^*	0.1746	0.5243	0.8761	1.2312	1.5910	1.9567	2.3298	2.7114	3.1031
c_3^*	0.0000	-0.0007	-0.0035	-0.0095	-0.0202	-0.0369	-0.0608	-0.0935	-0.1360

* 由摄动法,式(15)

与此同时,若把 $\sin(u)$ 近似为 $u-u^3/6$,用摄动法得到下列近似解[1,2]

$$\alpha = 1-\frac{A^2}{16},$$

$$c_1 = A\left(1+\frac{A^2}{192}\right),$$

$$c_3 = -\frac{A^3}{192} \tag{15}$$

为了比较,这些结果也列出在表 1 和表 2 中.从表 1 可以看到,当 $A = 17\pi/18$ 时,对系数 α 言,摄动法的计算结果有 9.72% 的误差,而目标函数法的结果是精确的.

2 某些非线性常微分方程的解

上述目标函数法也可用于其它非线性常微分方程的解.研究的方程和初始条件如下

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega_o^2\mathrm{sign}(u) = 0,$$

和初始条件

$$u\Big|_{t=0} = A,\frac{du}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \tag{16}$$

此时,函数 $F(u)$ 和值 h 各为

$$F(u) = \omega_o^2 \mid u \mid \tag{17}$$

$$h = F(u)\mid_{u=A} = \omega_o^2A \tag{18}$$

与上类同,缩减系数 α 和诸系数 $c_1,c_3,c_5,\cdots$ 依赖于 A,这些值均列出在表 3 中.在 Runge-Kutta 法数值积分中,取 $M = 100$ 段进行积分[6].计算结果同样证明,由式(14)算得的精确值和目标函数法算得的结果极为吻合,直到第 4 位数字.

从表 3 可知,当值 A 增加时,系数 α 减小了.对此现象,可作下列定量分析.事实上,对于式(16)定义的运动,用一个简谐运动来迫近,此运动定义为

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega_o^2\alpha_1^2u = 0,$$

和初始条件

$$u\Big|_{t=0} = A,\frac{du}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \tag{19}$$

现在令式(16)和(19)中的对应项(注意,当 $u>0$ 时,$\mathrm{sign}(u) = 1$)用下列条件来接近

$$\int_0^A(1-\alpha_1^2u)^2du \text{ 为极小} \tag{20}$$

由式(20)可得

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{3}{2A}} = 1.2247\sqrt{\frac{1}{A}} \tag{21}$$

从而可见,当 A 增加时,α_1 减小了.从表 3 可知,精确解为 $\alpha = 1.1107\sqrt{1/A}$.此时,系数 α 正比于 $\sqrt{1/A}$.此规律可综合为一定理如下

定理 若下列方程和初始条件

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}+\omega_o^2\mathrm{sign}(u_1) = 0,$$

和初始条件

$$u_1\Big|_{t=0} = A_1,\frac{du_1}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \tag{22}$$

有解如下

$$u_1(t) = F(\omega_p,t),(0\leqslant\omega_pt\leqslant2\pi)$$

带有性质

$$F(\omega_p,t) = F(\omega_pt+2\pi) \tag{23}$$

从而,下列方程和初始条件

$$\frac{d^2u_2}{dt^2}+\omega_o^2\mathrm{sign}(u_2) = 0,$$

和初始条件

$$u_2\Big|_{t=0} = A_2,\frac{du_2}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \tag{24}$$

必有解如下

$$u_2(t) = \frac{A_2}{A_1}F\left[\sqrt{\frac{A_1}{A_2}}\omega_pt\right],\left(0\leqslant\sqrt{\frac{A_1}{A_2}}\omega_pt\leqslant2\pi\right)$$

带有性质

$$F\left[\sqrt{\frac{A_1}{A_2}}\omega_pt\right] = F\left[\sqrt{\frac{A_1}{A_2}}\omega_pt+2\pi\right] \tag{25}$$

由于篇幅限制,证明从略.与此类同的证明,可见另一文献[5].此外,表 3 列出的计算结果也可验证此定理.

表 3 式(16)的圆周频率减缩系数 α 和 Fourier 系数 c_i

Table 3 Reduced coefficient α of frequency and Fourier coefficient c_i of Eqn.(16)

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α	1.1107	0.7854	0.6413	0.5554	0.4967	0.4534	0.4198	0.3927	0.3702	0.3512
c_1	1.0320	2.0641	3.0961	4.1282	5.1602	6.1923	7.2273	8.2564	9.2884	10.3205
c_3	−0.0382	−0.0764	−0.1147	−0.1529	−0.1911	−0.2293	−0.2676	−0.3058	−0.3440	−0.3822
c_5	0.0083	0.0165	0.0248	0.0330	0.0413	0.0495	0.0578	0.0661	0.0743	0.0826
c_7	−0.0030	−0.0060	−0.0090	−0.0120	−0.0150	−0.0181	−0.0211	−0.0241	−0.0271	−0.0301
c_9	0.0014	0.0028	0.0042	0.0057	0.0071	0.0085	0.0099	0.0113	0.0127	0.0142

在第2个例子中,被研究的方程和初始条件如下

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega_o^2u^3=0,$$

和初始条件

$$u\Big|_{t=0}=A,\frac{du}{dt}\Big|_{t=0}=0 \tag{26}$$

此时,函数 $F(u)$ 和值 h 各为

$$F(u)=\omega_o^2u^4/4 \tag{27}$$

$$h=F(u)\mid_{u=A}=\omega_o^2A^4/4 \tag{28}$$

与上类同,修正系数 α 和诸系数 $c_1,c_3,c_5,\cdots$ 依赖于 A,这些值均列出在表4中.计算结果同样证明,由式(14)算得的精确值和目标函数法算得的结果极为吻合,直到第4位数字.

从表4可知,当值 A 增加时,系数 α 也增加.对此现象,可作与上类同的定量分析.现在令式(19)和(26)中的对应项用下列条件来接近

$$\int_0^A(u^3-\alpha_1^2u)^2du\ 为极小 \tag{29}$$

由条件(29)可得

$$\alpha_1=\sqrt{\frac{3}{5}}A=0.7746A \tag{30}$$

从而,从所可见,当 A 增加时,α_1 也增加.从表4可知,精确解为 $\alpha=0.8472A$.

在第3个例子中,被研究的方程和初始条件如下

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega_o^2\sinh u=0,$$

和初始条件

$$u\Big|_{t=0}=A,\frac{du}{dt}\Big|_{t=0}=0 \tag{31}$$

此时,函数 $F(u)$ 和值 h 各为

$$F(u)=\omega_o^2(\cosh u-1) \tag{32}$$

$$h=F(u)\mid_{u=A}=\omega_o^2(\cosh A-1) \tag{33}$$

与上类同,缩减系数 α 和诸系数 $c_1,c_3,c_5,\cdots$ 依赖于 A,这些值均列出在表5中.计算结果同样证明,由式(14)算得的精确值和目标函数法算得的结果极为吻合,直到第4位数字.

从表5可知,当值 A 增加时,系数 α 也增加.对此现象,可作与上类同的分析.现在令式(19)和(31)中的对应项用下列条件来接近

$$\int_0^A(\sinh u-\alpha_1^2u)^2du\ 为极小 \tag{34}$$

由条件(34)可得

$$\alpha_1=\sqrt{\frac{3(A\cosh A-\sinh A)}{A^3}} \tag{35}$$

从而,当 A 增加时,α_1 也增加.

表4 式(26)的圆周频率变化系数 α 和 Fourier 系数 c_i

Table 4 Changeable coefficient α of frequency and Fourier coefficient c_i of Eqn.(26)

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α	0.8472	1.6944	2.5416	3.3888	4.2361	5.0833	5.9305	6.7777	7.6249	8.4721
c_1	0.9550	1.9100	2.8650	3.8200	4.7750	5.7300	6.6850	7.6400	8.5951	9.5501
c_3	0.0430	0.0861	0.1291	0.1722	0.2152	0.2583	0.3013	0.3444	0.3874	0.4305
c_5	0.0019	0.0037	0.0056	0.0074	0.0093	0.0112	0.0130	0.0149	0.0167	0.0186
c_7	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008
c_9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

表5 式(31)的圆周频率变化系数 α 和 Fourier 系数 c_i

Table 5 Changeable coefficient α of frequency and Fourier coefficient c_i of Eqn.(31)

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α	1.0629	1.2568	1.6042	2.1547	2.9964	4.2714	6.2027	9.1369	13.6137	20.4739
c_1	0.9951	1.9654	2.9025	3.8100	4.6951	5.5639	6.4207	7.2687	8.1102	8.9467
c_3	0.0049	0.0335	0.0913	0.1714	0.2651	0.3660	0.4701	0.5753	0.6804	0.7849
c_5	0.0000	0.0011	0.0058	0.0164	0.0336	0.0567	0.0846	0.1161	0.1500	0.1857
c_7	0.0000	0.0000	0.0004	0.0019	0.0051	0.0106	0.0186	0.0288	0.0411	0.0551
c_9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0022	0.0045	0.0078	0.0123	0.0180

3 简短结论

在较早年代,计算机尚未问世,对于非线性振动问题,研究者只好致力于手工推导或简单的运算.与此相反,本研究主要依赖于有效的数值方法和计算机计算.这些可从下列事例看出.显然,本研究的二个关键点为,一为常微分方程的数值解,二为探求函数的零点.熟知,一个常微分方程的精确

数值解可用 Runge-Kutta 法和计算机计算得到.其次,用对分法可以有效地得到函数的零点.再者,本研究中用不到小参数的假定.

参 考 文 献

1 Nayfeh AH, Mook DT. Nonlinear Oscillations. New York: John Wiley, 1978

2 Nayfeh AH. Introduction to Perturbation Techniques. New York: John Wiley, 1978

3 He JH. A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2000, 35(1): 37～43

4 Chen RS. Evaluation of natural vibration frequency and buckling loading by searching zeros of a target function. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1997, 13(5): 695～704

5 Chen YZ. Solution of the Duffing equation by using target function method. *J of Sound and Vibration*, 2002, 256(3): 573～578

6 Hildebland FB. Introduction to Numerical Analysis. New York: McGraw-Hill, 1974

NUMERICAL SOLUTION OF NONLINEAR VIBRATION PROBLEM IN CONSERVATION SYSTEM

Chen Yizhou

(*Division of Engineering Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang* 212013, *China*)

Abstract Solution of the nonlinear vibration in conservation system by using the target function method was studied. The motion of pendulum was taken as an example. The relevant governing equation was integrated on the variable for time with the vanishing initial velocity and non-vanishing initial displacement. In this case, the velocity is a function of time, and it is in turn called the target function. Since the pendulum completes a periodic motion from the right side to the left side and then to the right side, the second zero of the target function becomes the period of the motion. In addition, in the time of numerical integration the displacement were also obtained. The suggested method depended on the numerical integration of the ordinary differential equation and the half-division technique for finding the zeros of a function. Solutions for some nonlinear differential equations were also evaluated, and numerical examples and results were given.

Key words target function method, nonlinear vibration, numerical solution procedure

Received 21 April 2004, revised 16 October 2004