第2卷第4期 动力学与控制学报 Vol.2 No.4
2004年12月 JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL Dec. 2004

分析结构力学与有限元*

钟万勰
(大连理工大学工业装备结构分析重点实验室,大连 116023)

摘要 分析力学历来是在动力学范围内论述的,结构力学与最优控制模拟关系的共同基础就是分析力学.这表明在结构力学与最优控制理论的架构内也应有分析力学的整套理论.本文就结构力学讲述分析力学,称分析结构力学.保守体系可用Hamilton体系的方法描述,其特点是保辛.保辛给出保守体系结构最重要的特性.有限元法是从结构力学发展的,有限元的单元刚度阵应保持对称性,其实这就是保辛.根据区段单元变形能只与其两端位移有关,就可通过数学分析得到Lagrange括号与Poisson括号,展示了其辛对偶体系、正则方程、正则变换等的内容.

关键词 分析结构力学,保辛,正则变换,有限元

1 保辛引论

分析力学历来是在动力学范围内发展的,故也称分析动力学(Analytical dynamics).根据结构力学与最优控制间的模拟关系,其共同基础就是分析力学.故在结构力学与最优控制理论的架构内也应有分析力学的整套理论.本文就结构力学架构讲述分析力学,可称分析结构力学.

在物理与力学中有大量保守体系的分析.保守体系可用Hamilton体系描述[1],其特点是保辛.保辛就是保持体系结构最重要的特性.冯康指出保守体系的差分格式应当保辛[2],取得很好的效果.这表明保守体系的数学近似方法也应当保辛.通常五花八门的差分格式并不是错误,而是对真实解的逼近不够好.保辛的优点是更好的逼近.

迄今,分析动力学讨论的系统都是确定维数的系统.分析结构力学将分析力学用于空间长度坐标z.然而结构力学并不限定横截面位移的数目,这是与分析动力学很大的差别,并且还适用离散坐标体系,横截面位移也并非必须在同一长度坐标系.将分析动力学的方法论推广到结构力学是很重要的理论问题.将长度坐标离散就是有限元.本文证明每个单元两端状态的关系就是正则变换.在Lagrange括号与Poisson括号[1]上表现得很明确,故先就这些括号进行讨论.

辛,使人感到玄,其实只是一个名词而已,必须破除这种神秘感.有限元法是从结构力学发展的,有限元工作者熟知,单元刚度阵应保持对称性,其实这就是保辛.现通过单纵向坐标柱形域弹性体系有限元来加以阐明.有限元将连续坐标转化为离散坐标.例如Timoshenco梁问题,设长度区段为$0 < z < L$,沿长度划分m个单元.第k号单元有左、右两端a,b,即$k-1,k$站,其位移分别为n维的向量$\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{q}_b$.有限元采用精确列式就是精确解,采用近似就是有限元近似解.设结构的边界条件是给定在$z=0$与$z=L$端的位移.有限元需要建立每个单元的刚度阵,其单元变形能为

$$U_k(\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{q}_b;z_a,z_b)=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{q}_a\\\boldsymbol{q}_b\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_k\begin{Bmatrix}\boldsymbol{q}_a\\\boldsymbol{q}_b\end{Bmatrix}=$$
$$(\boldsymbol{q}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{aa}^{(k)}\boldsymbol{q}_a+\boldsymbol{q}_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{bb}^{(k)}\boldsymbol{q}_b)/2+\boldsymbol{q}_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{ba}^{(k)}\boldsymbol{q}_a,$$
$$\boldsymbol{K}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{aa}^{(k)} & \boldsymbol{K}_{ab}^{(k)}\\\boldsymbol{K}_{ba}^{(k)} & \boldsymbol{K}_{bb}^{(k)}\end{bmatrix}\tag{1}$$

$\boldsymbol{K}_k$是对称阵.最小总势能原理与平衡方程为

$$\min\Big(\sum_{k=1}^{m}U_k\Big),\boldsymbol{K}_{ba}^{(k-1)}\boldsymbol{q}_{(k-1)}+[\boldsymbol{K}_{bb}^{(k-1)}+\boldsymbol{K}_{aa}^{(k)}]\boldsymbol{q}_k+\boldsymbol{K}_{ab}^{(k)}\boldsymbol{q}_{k+1}=0\tag{2}$$

单元变形能就是作用量函数.引入对偶向量

$$\boldsymbol{p}_k=\partial U_k/\partial\boldsymbol{q}_k=\boldsymbol{K}_{bb}^{(k)}\boldsymbol{q}_k+\boldsymbol{K}_{ba}^{(k)}\boldsymbol{q}_{k-1}\tag{3a}$$
$$\boldsymbol{p}_{k-1}=-\partial U_k/\partial\boldsymbol{q}_{k-1}=-(\boldsymbol{K}_{aa}^{(k)}\boldsymbol{q}_{k-1}+\boldsymbol{K}_{ab}^{(k)}\boldsymbol{q}_k)\tag{3b}$$

则平衡方程为$\boldsymbol{p}_k=\boldsymbol{p}_{k-1}$.引入各站的状态向量

$$\boldsymbol{v}_k=\{\boldsymbol{q}_k^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{p}_k^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}\tag{4}$$

于是从(3a,b)可导出

$$\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{v}_{k-1},\boldsymbol{S}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_{11}^{(k)} & \boldsymbol{S}_{12}^{(k)}\\\boldsymbol{S}_{21}^{(k)} & \boldsymbol{S}_{22}^{(k)}\end{bmatrix},$$

2004-10-29收到第1稿.
*国家自然科学基金(10372019)和教育部博士点基金资助项目(20010141024)

$$S_{11}^{(k)}=-(K_{ab}^{(k)})^{-1}K_{aa}^{(k)},S_{12}^{(k)}=-(K_{ab}^{(k)})^{-1},$$
$$S_{21}^{(k)}=K_{ba}^{(k)}-K_{bb}^{(k)}(K_{ab}^{(k)})^{-1}K_{aa}^{(k)},$$
$$S_{22}^{(k)}=-K_{bb}^{(k)}(K_{ab}^{(k)})^{-1} \tag{5}$$

可验证 $\boldsymbol{S}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}_k=\boldsymbol{J}$，故 $\boldsymbol{S}_k$ 是辛矩阵．从而状态向量由 $\boldsymbol{v}_{k-1}$ 到 $\boldsymbol{v}_k$ 是正则变换．以上的推导只用到 $\boldsymbol{K}_k$ 是对称矩阵的性质，故知有限元列式保证其刚度阵对称，就是保辛．有限元刚度阵的对称性是最基本的规则，故有限元是自动保辛的．有限元法解的稳定性、有效性奠基于此基本性质．

以往一大批差分格式是脱离了变分原理而根据微分算子凭经验凑合的，五花八门而缺乏一般规则．有限元列式虽然也是五花八门，但在变分原理导引下的单元，保证了单元刚度阵的对称性，从而保持了保守体系的基本规则，故自动保辛，这是很大的优点．辛的概念从分析动力学而来，要求状态向量的维数不变．有限元单元刚度阵对称性则更为一般，没有维数不变的要求．但上文有限元的陈述是线性系统的，毕竟分析力学要面对一般的非线性系统．结构力学也有非线性系统，本文的讨论适用于非线性系统．

以下在单长度坐标的架构内讲述分析结构力学．首先探讨 Lagrange 括号与 Poisson 括号．

2 等维数体系的 Poisson 括号与 Lagrange 括号

例如 Timoshenco 梁就是等维数($n=2$)的体系．传统讲述正则变换总是在动力学系统下的，现用结构力学来讲述，位移向量用 $\boldsymbol{q}$ 来表示．

多维问题方可将沿长度方向状态变化问题的性质讲明白．设有区段(z,z_a)，其两端的位移分别为 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_a$，皆为 n 维向量．区段变形能 $U(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_a,z,z_a)$ 只是两端位移 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_a$ 的函数，而与如何达到该位移状态无关．这里并不作线性系统的假设，线性体系时 $U(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_a,z,z_a)$ 是 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_a$ 的二次函数．

分别引入对于 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_a$ 的对偶向量

$$\boldsymbol{p}=-\partial U/\partial\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}_a=\partial U/\partial\boldsymbol{q}_a, \tag{6a}$$

或

$$p_i=-\partial U/\partial q_i,p_{aj}=\partial U/\partial q_{aj} \tag{6b}$$

组成两端的状态向量，$\boldsymbol{v}=\{\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{v}_a=\{\boldsymbol{q}_a^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_a^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}$ 根据偏微商次序无关规则，有

$$-\partial p_i/\partial q_{aj}=\partial p_{aj}/\partial q_j(=\partial^2U/\partial q_i\partial q_{aj}) \tag{7}$$

其中的偏微商是位移的函数．

将方程(6b)对 $\boldsymbol{q}_a$ 求解，可得

$$\boldsymbol{q}_a=\boldsymbol{q}_a(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p};z,z_a) \tag{8a}$$

将(8a)的 $\boldsymbol{q}_a$ 代入(6a)给出

$$\boldsymbol{p}_a=\boldsymbol{p}_a(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p};z,z_a) \tag{8b}$$

这样，(8a,b)成为从原对偶变量 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$ 到新对偶变量 $\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{p}_a$ 的变换．应验证状态向量沿 z 方向的变换是正则变换．$\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$ 是在 z 处的状态对偶变量；而 $\boldsymbol{q}_a$，$\boldsymbol{p}_a$ 则是在 z_a 处的状态对偶变量；力学意义很清楚．现采用微商的链式法则以导出正则变换，便于理解．结构力学有限元采用两端边值条件，给定 $\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{q}_a$，而将两端的对偶内力 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}_a$ 由 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_a$ 来确定．但分析力学则通常采用对偶变量 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$ 的初值条件，而将另一端的对偶变量 $\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{p}_a$ 当成一个变换，即正则变换．该变换的条件非常有兴趣．

在(8a,b)的基础上，观察其微商

$$\partial q_{aj}/\partial q_i,\partial q_{aj}/\partial p_i;\partial p_{aj}/\partial q_i,$$
$$\partial p_{aj}/\partial p_i,i=1,\cdots,n \tag{9}$$

之间的关系．按 $U(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_a,z,z_a)$ 的全微分为

$$\mathrm{d}U=(\partial U/\partial\boldsymbol{q}_a)^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{q}_a+(\partial U/\partial\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{q}=\sum_{i=1}^{n}[p_{aj}\mathrm{d}q_{ai}-p_i\mathrm{d}q_i] \tag{10}$$

将变形能（作用量）看成 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$ 的函数，即 $U(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_a(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),z,z_a)=U'(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},z,z_a)$．于是其全微分为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}U&=(\partial U/\partial\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{q}+(\partial U/\partial\boldsymbol{q}_a)^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{q}_a=\\&\sum_{i=1}^{n}[-p_i\mathrm{d}q_i+p_{ai}\sum_{j=1}^{n}((\partial q_{ai}/\partial q_j)\mathrm{d}q_j+(\partial q_{ai}/\partial p_j)\mathrm{d}p_j)]=\\&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[(-p_i\delta_{ij}+p_{ai}(\partial q_{ai}/\partial q_j))\mathrm{d}q_j+p_{ai}(\partial q_{ai}/\partial p_j)\mathrm{d}p_j]=\mathrm{d}U'\end{aligned} \tag{11}$$

故

$$\partial U'/\partial q_j=-p_j+\sum_{k=1}^{n}[(\partial q_{ak}/\partial q_j)\cdot p_{ak}] \tag{12a}$$

$$\partial U'/\partial p_i=\sum_{k=1}^{n}(\partial q_{ak}/\partial p_i)\cdot p_{ak} \tag{12b}$$

这是按分量表示的偏微商，采用向量表示

$$\partial U'/\partial\boldsymbol{q}=-\boldsymbol{p}+(\partial\boldsymbol{q}_a/\partial\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{p}_a \tag{12'a}$$

$$\partial U'/\partial\boldsymbol{p}=(\partial\boldsymbol{q}_a/\partial\boldsymbol{p})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{p}_a \tag{12'b}$$

这里出现了向量函数 $\boldsymbol{q}_a$ 对向量变量 $\boldsymbol{q}$ 的微商．规定向量 $\boldsymbol{f}$ 对向量 $\boldsymbol{q}$ 的微商为

$$\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{q}}=\begin{bmatrix}\partial f_1/\partial q_1&\partial f_1/\partial q_2&\cdots&\partial f_1/\partial q_n\\\partial f_2/\partial q_1&\cdots&\cdots&\partial f_2/\partial q_n\\\vdots&&&\vdots\\\partial f_m/\partial q_1&\partial f_m/\partial q_2&\cdots&\partial f_m/\partial q_n\end{bmatrix} \tag{13}$$

本文规定与文[3]相差一个转置. 为一般起见,将 f(就是 q_a)写成了 m 维向量. 上文 $m=n$.

将 z_a, z 固定,$U'(q,p)$ 是 $2n$ 维的函数. 根据恒等式

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial U'}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial U'}{\partial q_i}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial U'}{\partial p_j}\right)=\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{\partial U'}{\partial p_i}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial U'}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial U'}{\partial p_i}\right),$$

将(12a,b)代入有 $\partial^2 U'/\partial q_j \partial q_i=\sum_{k=1}^{n}[(\partial^2 q_{ak}/\partial q_j\partial q_i)\cdot p_{ak}+(\partial q_{ak}/\partial q_j)\cdot(\partial p_{ak}/\partial q_i)]$. 注意区别 U 与 U'. 将 i, j 互换仍然相等. 两者相减给出

$$\sum_{k=1}^{n}[(\partial q_{ak}/\partial q_i)\cdot(\partial p_{ak}/\partial q_j)-(\partial q_{ak}/\partial q_j)\cdot(\partial p_{ak}/\partial q_i)]=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial(q_{ak},p_{ak})}{\partial(q_i,q_j)}\right|=0 \tag{14a}$$

同理

$$\sum_{k=1}^{n}[(\partial q_{ak}/\partial p_i)\cdot(\partial p_{ak}/\partial p_j)-(\partial q_{ak}/\partial p_j)\cdot(\partial p_{ak}/\partial p_i)]=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial(q_{ak},p_{ak})}{\partial(p_i,p_j)}\right|=0 \tag{14b}$$

及

$$\sum_{k=1}^{n}[(\partial q_{ak}/\partial q_j)\cdot(\partial p_{ak}/\partial p_i)-(\partial q_{ak}/\partial p_i)\cdot(\partial p_{ak}/\partial q_j)]=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial(q_{ak},p_{ak})}{\partial(q_j,p_i)}\right|=\delta_{ij} \tag{14c}$$

这些公式给出从 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$ 到 $\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{p}_a$ 的正则变换的充分必要条件.

设从 $\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{p}_a$ 到 $\boldsymbol{q}_b,\boldsymbol{p}_b$ 的变换也是正则变换,则从 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$ 到 $\boldsymbol{q}_b,\boldsymbol{p}_b$ 的合成变换也是正则变换. 验证为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(q_{bk},p_{bk})}{\partial(q_i,q_j)}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}\partial q_{bk}/\partial q_i & \partial q_{bk}/\partial q_j\\ \partial p_{bk}/\partial q_i & \partial p_{bk}/\partial q_j\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\begin{vmatrix}\partial q_{bk}/\partial q_{al} & \partial q_{bk}/\partial p_{al}\\ \partial p_{bk}/\partial q_{al} & \partial p_{bk}/\partial p_{al}\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}\partial q_{al}/\partial q_i & \partial q_{al}/\partial q_j\\ \partial p_{al}/\partial q_i & \partial p_{al}/\partial q_j\end{vmatrix}=$$
$$\sum_{l=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}\partial q_{bk}/\partial q_{al} & \partial q_{bk}/\partial p_{al}\\ \partial p_{bk}/\partial q_{al} & \partial p_{bk}/\partial p_{al}\end{vmatrix}\right)\times\begin{vmatrix}\partial q_{al}/\partial q_i & \partial q_{al}/\partial q_j\\ \partial p_{al}/\partial q_i & \partial p_{al}/\partial q_j\end{vmatrix}\right]=0$$

同理, $\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial(q_{bk},p_{bk})}{\partial(p_i,p_j)}\right|=0$, $\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial(q_{bk},p_{bk})}{\partial(q_i,p_j)}\right|=\delta_{ij}$. 验证毕.

以上讲述是从 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$ 到 $\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{p}_a$ 再到 $\boldsymbol{q}_b,\boldsymbol{p}_b$ 的变换,并不涉及对纵向坐标 z 的微商. 因此对离散坐标体系也适用,证明时运用了:变形能与只与两端位移状态有关的条件. 还应证明正则变换的合成相当于两个相邻区段的区段合并,即两者是一致的. 证明见第三节.

设状态向量(正则变量)$\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$ 是任意两个参变量 u, v 的函数. $\boldsymbol{q}(u,v), \boldsymbol{p}(u,v)$ 代表在 $2n$ 维状态空间中的 2 维曲面. 选择任意两个元素,q_i, q_j, p_i, q_j 或 p_i, p_j 等,定义

$$\langle q_i,q_j\rangle_{u,v}\underset{\text{def}}{=}(\partial q_i/\partial u)(\partial q_j/\partial v)-(\partial q_i/\partial v)(\partial q_j/\partial u)=\left|\frac{\partial(q_i,q_j)}{\partial(u,v)}\right| \tag{15a}$$

$$\langle p_i,p_j\rangle_{u,v}\underset{\text{def}}{=}(\partial p_i/\partial u)(\partial p_j/\partial v)-(\partial p_i/\partial v)(\partial p_j/\partial u)=\left|\frac{\partial(p_i,p_j)}{\partial(u,v)}\right| \tag{15b}$$

$$\langle p_i,q_j\rangle_{u,v}\underset{\text{def}}{=}(\partial p_i/\partial u)(\partial q_j/\partial v)-(\partial p_i/\partial v)(\partial q_j/\partial u)=\left|\frac{\partial(p_i,q_j)}{\partial(u,v)}\right| \tag{15c}$$

组成相应的 $2n\times 2n$ 反对称矩阵

$$\begin{bmatrix}0 & \langle q_1,q_2\rangle & \langle q_1,p_1\rangle & \langle q_1,p_2\rangle\\ \langle q_2,q_1\rangle & 0 & \langle q_2,p_1\rangle & \langle q_2,p_2\rangle\\ \langle p_1,q_1\rangle & \langle p_1,q_2\rangle & 0 & \langle p_1,p_2\rangle\\ \langle p_2,q_1\rangle & \langle p_2,q_2\rangle & \langle p_2,p_1\rangle & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{L}_{u,v},(n=2) \tag{16}$$

因 $\langle q_i,q_j\rangle_{u,v}=-\langle q_j,q_i\rangle_{u,v}$,反对称.

将状态向量 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$ 作正则变换(8),给出的仍是 u, v 的函数 $\boldsymbol{q}_a(u,v), \boldsymbol{p}_a(u,v)$. 式(15,16)对 $\boldsymbol{q}_a$, $\boldsymbol{p}_a$ 也成立. 现定义 Lagrange 括号,它给出一个纯量,记为

$$\{u,v\}_{q,p}\underset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}\langle q_i,p_i\rangle_{u,v} \tag{17}$$

即矩阵 $\boldsymbol{L}_{u,v}$ 右上 $n\times n$ 子矩阵的对角元之和. 对 $\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{p}_a$ 也有 Lagrange 括号,按链式微商规则有

$$\{u,v\}_{q_a,p_a}\underset{\text{def}}{=}\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix}\partial q_{ai}/\partial u & \partial q_{ai}/\partial v\\ \partial p_{ai}/\partial u & \partial p_{ai}/\partial v\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix}\partial q_{ai}/\partial q_j & \partial q_{ai}/\partial p_j\\ \partial p_{ai}/\partial q_j & \partial p_{ai}/\partial p_j\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}\partial q_j/\partial u & \partial q_j/\partial v\\ \partial p_j/\partial u & \partial p_j/\partial v\end{vmatrix}$$

但按(14c),有

$$\{u,v\}_{q_a,p_a} = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} \partial q_j/\partial u & \partial q_j/\partial v \\ \partial p_j/\partial u & \partial p_j/\partial v \end{vmatrix} =$$

$$\{u,v\}_{q,p} = \{u,v\} \tag{18}$$

表明Lagrange括号在正则变换之下不变.所以下标$\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{p}_a$不必写出.显然$\{u,v\}=-\{v,u\}$,且有

$$\{q_i,q_j\}=0,\{p_i,p_j\}=0,\{q_i,p_j\}=\delta_{ij} \tag{19}$$

Lagrange括号将u,v当作两个参数自变量,给出了$2n$维状态空间中的一个超曲面.而Poisson括号则将u,v看成为状态向量$\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$的任意两个函数$u(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),v(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$.泊松(Poisson)括号的定义为

$$[u,v]_{q,p} \underset{\text{def}}{=} (\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{q}})^{\mathrm{T}} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{p}} - (\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{p}})^{\mathrm{T}} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{q}} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial q_k}\frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k}\frac{\partial v}{\partial q_k}) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} \partial u/\partial q_k & \partial u/\partial p_k \\ \partial v/\partial q_k & \partial v/\partial p_k \end{vmatrix} \tag{20}$$

显然也有$[u,v]_{q,p}=-[v,u]_{q,p}$.Poisson括号给出一个纯量,其中u,v也可是坐标z的函数,z只是一个参数.揭示Lagrange括号及Poisson括号与辛矩阵的关系有启发意义.记$\zeta=\{\boldsymbol{q}_a^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_a^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}$,则

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} \partial q_{a1}/\partial q_1 & \cdots & \partial q_{a1}/\partial q_n & \partial q_{a1}/\partial p_1 & \cdots & \partial q_{a1}/\partial p_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial q_{an}/\partial q_1 & \cdots & \partial q_{an}/\partial q_n & \partial q_{an}/\partial p_1 & \cdots & \partial q_{an}/\partial p_n \\ \partial p_{a1}/\partial q_1 & \cdots & \partial p_{a1}/\partial q_n & \partial p_{a1}/\partial p_1 & \cdots & \partial p_{a1}/\partial p_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial p_{an}/\partial q_1 & \cdots & \partial p_{an}/\partial q_n & \partial p_{an}/\partial p_1 & \cdots & \partial p_{an}/\partial p_n \end{bmatrix} \underset{\text{def}}{=} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v})$$

从Lagrange括号的(14),读者可验证矩阵等式$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{J}$满足,故$\boldsymbol{S}$是辛矩阵.Lagrange括号与$\boldsymbol{S}$为辛矩阵是互为因果关系的.Lagrange括号的(14)就是共轭辛正交归一关系.还有Poisson括号.将$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{J}$求逆,可证$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$也是辛矩阵,从而$\boldsymbol{S}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{J}$.它给出的$[q_{ai},q_{aj}]_{q,p}=0,[p_{ai},p_{aj}]_{q,p}=0,[q_{ai},p_{aj}]_{q,p}=\delta_{ij}$也是共轭辛正交归一关系.

因$\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{p}_a$与$\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$是正则变换的关系,根据微商的链式规则,有

$$[u,v]_{q,p} = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} \partial u/\partial q_k & \partial u/\partial p_k \\ \partial v/\partial q_k & \partial v/\partial p_k \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \partial u/\partial q_{ai} & \partial u/\partial p_{ai} \\ \partial v/\partial q_{ai} & \partial v/\partial p_{ai} \end{vmatrix} \times$$

$$\begin{vmatrix} \partial q_{ai}/\partial q_k & \partial q_{ai}/\partial p_k \\ \partial p_{ai}/\partial q_k & \partial p_{ai}/\partial p_k \end{vmatrix} = [u,v]_{q_a,p_a} = [u,v] \tag{21}$$

表明Poisson括号在正则变换下不变,故可将其下标去掉.采用辛的表示也许更简洁些

$$[u_1,u_2]_v = (\partial u_1/\partial \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}(\partial u_2/\partial \boldsymbol{v}),$$

其中

$$\boldsymbol{v}\{\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}} \tag{22}$$

如果u_1,u_2直接选自正则变量的分量,易知

$$[q_i,q_j]=0,[p_i,p_j]=0,[q_i,p_j]=\delta_{ij},$$

$$[p_i,q_j]=-\delta_{ij}, i,j=1,\cdots,n \tag{23}$$

这些正则变量都是$\boldsymbol{v}$的分量,若将泊松括号写成$2n\times 2n$矩阵,有

$$[\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}]=\boldsymbol{J} \tag{24}$$

现在将u_1,u_2取为正则变换后的变量$\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{p}_a$,或$\zeta=\{\boldsymbol{q}_a^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_a^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}$的分量,则其泊松括号的矩阵为

$$[\zeta,\zeta]_v = (\partial\zeta/\partial\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}(\partial\zeta/\partial\boldsymbol{v}) =$$

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{J},(\boldsymbol{S}=\partial\zeta/\partial\boldsymbol{v}) \tag{25}$$

故$\boldsymbol{S}$是辛矩阵.凡是满足条件$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{J}$的矩阵,都称为辛矩阵.由$\boldsymbol{v}$转换到$\zeta$是正则变换就必然有此结果.正则变量的泊松括号矩阵称为基本泊松括号矩阵.式(25)表明,基本泊松括号阵在正则变换下是不变的.对定常线性系统,$\boldsymbol{S}$是定常辛矩阵;对变系数线性方程则$\boldsymbol{S}$是随坐标z而变的辛矩阵;对非线性系统则$\boldsymbol{S}$是状态的辛矩阵.

以上将长度坐标只当作参数,适用离散系统.对于连续长度坐标,哈密顿正则方程在正则变换下其形式不变.现在泊松括号也是在正则变换下不变.事实上正则方程可用泊松括号表示为

$$\dot{\boldsymbol{q}}=[\boldsymbol{q},H],\dot{\boldsymbol{p}}=[\boldsymbol{p},H],\dot{\boldsymbol{v}}=[\boldsymbol{v},H] \tag{26}$$

括号中一个是向量,一个是哈密顿函数H为纯量,结果仍是向量.无非是将n个方程写在一起而已.采用泊松括号的辛表示

$$[\boldsymbol{v},H]=\boldsymbol{J}\cdot(\partial H/\partial\boldsymbol{v}) \tag{27}$$

方程(26),(27)是将正则变量直接代入泊松括号.如对任意函数$u(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},z)$取全微商,则

$$\dot{u}=\mathrm{d}u/\mathrm{d}z=(\partial u/\partial\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{q}}+$$

$$(\partial u/\partial\boldsymbol{p})^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{p}}+\partial u/\partial z=$$

$$(\partial u/\partial\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}(\partial H/\partial\boldsymbol{p})-$$

$$(\partial u/\partial\boldsymbol{p})^{\mathrm{T}}(\partial H/\partial\boldsymbol{q})+\partial u/\partial z=$$

$$[u,H]+\partial u/\partial z \tag{28}$$

或

$$\dot{u} = (\partial u/\partial \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{v}} + \partial u/\partial z = (\partial u/\partial \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}(\partial H/\partial \boldsymbol{v}) + \partial u/\partial z \tag{29}$$

这就是辛表示.如将哈密顿函数 H 代替上式中的 u,则因对于任意的向量 $\boldsymbol{v}_a$ 恒有 $\boldsymbol{v}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{v}_a = 0$,故

$$\mathrm{d}H/\mathrm{d}z = \partial H/\partial z \tag{30}$$

正则坐标 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$ 是用于描述结构变形的坐标系统,而哈密顿函数 H 是针对某一变形而给的,因此说哈密顿函数 H 生成了一个变形,状态沿着长度坐标的变化就是一系列的正则变换[4].

本节从区段变形能 $U(\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{q},z_a,z)$ 只是两端位移的函数的性质,导出了 Poisson 括号与 Lagrange 括号、传递辛矩阵、正则变换,以及正则方程(26).这是空间坐标与分析结构力学方面的结果.

3　变分原理与正则变换

上文从变形能出发,推导了 Lagrange 括号与 Poisson 括号以及正则变换.从 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$ 到 $\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{p}_a$ 再到 $\boldsymbol{q}_b,\boldsymbol{p}_b$ 的正则变换,给出合成变换仍是正则变换.这里有一致性的问题.因 (z,z_a) 与 (z_a,z_b) 区段的变形能合成给出 (z,z_b) 的区段变形能.根据势能原理,对合成区段的变形能有

$$U_{0,b}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_b,z,z_b) = \min_{\boldsymbol{q}_a}[U_{0,a}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_a,z,z_a) + U_{a,b}(\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{q}_b,z_a,z_b)] \tag{31}$$

但也可按式(8 ~ 12)得到变换 $\boldsymbol{q}_b = \boldsymbol{q}_b(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$, $\boldsymbol{p}_b(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 及其偏微商.问,采用区段变形能合成得到的变换是否就是采用正则变换得到的变换.即两种变换的合成是否一致.答,是.

证　首先要验证,给出正则变换(8),$[\boldsymbol{q}_a = \boldsymbol{q}_a(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p}_a = \boldsymbol{p}_a(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})]$,其条件(14)意味着,一定存在只与两端位移有关的,从而是 $2n$ 个未知数的区段变形能函数 $U(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_a)$,证明如下.

从(14a)可导出

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\Big(-p_j + \sum_{k=1}^{n}[(\partial q_{ak}/\partial q_j)\cdot p_{ak}]\Big) = \frac{\partial}{\partial q_j}\Big(-p_i + \sum_{k=1}^{n}[(\partial q_{ak}/\partial q_i)\cdot p_{ak}]\Big) \tag{32a}$$

同理

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\Big(\sum_{k=1}^{n}[(\partial q_{ak}/\partial p_j)\cdot p_{ak}]\Big) = \frac{\partial}{\partial p_j}\Big(\sum_{k=1}^{n}[(\partial q_{ak}/\partial p_i)\cdot p_{ak}]\Big) \tag{32b}$$

及

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\Big(-p_j + \sum_{k=1}^{n}[(\partial q_{ak}/\partial q_j)\cdot p_{ak}]\Big) = \frac{\partial}{\partial q_j}\Big(\sum_{k=1}^{n}[(\partial q_{ak}/\partial p_i)\cdot p_{ak}]\Big) \tag{32c}$$

其中 $q_{ak}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),p_{ak}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 皆为 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$ 的函数.记

$$g_j(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = -p_j + \sum_{k=1}^{n}[(\partial q_{ak}/\partial q_j)\cdot p_{ak}],$$
$$g_{n+j}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \sum_{k=1}^{n}[(\partial q_{ak}/\partial p_j)\cdot p_{ak}],$$
$$j = 1,\cdots,n \tag{33}$$

共 $2n$ 个函数,它们皆为状态向量 $\boldsymbol{v} = \{\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}$ 的函数.(32a)的 3 式可统一表示为 $\partial g_i/\partial v_j = \partial g_j/\partial v_i$,其中 $i,j = 1,\cdots,2n$.而这恰是 $2n$ 维的向量函数 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 是某纯量函数 $U'(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 梯度的充要条件,即

$$\partial U'(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})/\partial q_j = -p_j + \sum_{k=1}^{n}[(\partial q_{ak}/\partial q_j)\cdot p_{ak}],$$
$$\partial U'/\partial p_j = \sum_{k=1}^{n}[(\partial q_{ak}/\partial p_j)\cdot p_{ak}],$$
$$j = 1,\cdots n \tag{34}$$

从正则变换 $\boldsymbol{q}_a = \boldsymbol{q}_a(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p}_a = \boldsymbol{p}_a(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 的前一式可解出 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_a)$,得 $U(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_a) = U'(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_a))$.执行全微分,给出

$$\mathrm{d}U' = (\partial U'/\partial \boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{q} + (\partial U'/\partial \boldsymbol{p})^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \sum_{j=1}^{n}\Big[-p_j\cdot\mathrm{d}q_j + \sum_{k=1}^{n}p_{ak}\cdot[(\partial q_{ak}/\partial q_j)\cdot\mathrm{d}q_j + (\partial q_{ak}/\partial p_j)\cdot\mathrm{d}p_j]\Big] = -\sum_{j=1}^{n}p_j\cdot\mathrm{d}q_j + \sum_{k=1}^{n}p_{ak}\mathrm{d}q_{ak} = \mathrm{d}U$$

这就是原有全微分(11)的复原.故知正则变换与区段变形能为两端位移的函数是一致的.注意,U 是可随意加一个常数的.

下一步是证明正则变换的合成相当于最小势能原理(31).根据全微分

$$\mathrm{d}U(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_b) = \mathrm{d}U(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_a) + \mathrm{d}U(\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{q}_b) = -\sum_{j=1}^{n}p_j\cdot\mathrm{d}q_j + \Big(\sum_{k=1}^{n}p_{ak}\cdot\mathrm{d}q_{ak} - \sum_{k=1}^{n}p_{ak}\cdot\mathrm{d}q_{ak}\Big) + \sum_{k=1}^{n}p_{bk}\cdot\mathrm{d}q_{bk} = \sum_{k=1}^{n}p_{bk}\cdot\mathrm{d}q_{bk} - \sum_{j=1}^{n}p_j\cdot\mathrm{d}q_j$$

圆括号内的 p_{ak},q_{ak} 是区段连接点 z_a 的,$\mathrm{d}q_{ak}$ 相等表示位移连续而 p_{ak} 的相等是势能变分原理(31)的结果,是内力平衡条件.而正则变换的合成也是位移与内力连续.两者也是一致的.证毕.

$U(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_a)$ 是区段变形能,将它对 $\boldsymbol{q}_a$ 执行

Legendre 变换,得到混合能

$$V(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_a)=\max_{\boldsymbol{q}_a}[\boldsymbol{p}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_a-U(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_a)],$$

$$\boldsymbol{p}_a=\partial U(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_a)/\partial \boldsymbol{q}_a \tag{35}$$

混合能的全微分为

$$\mathrm{d}V(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}_a)=\boldsymbol{q}_a^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_a+\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{q};$$

$$\boldsymbol{p}=\partial V(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}_a)/\partial \boldsymbol{q},$$

$$\boldsymbol{q}_a=\partial V(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}_a)/\partial \boldsymbol{p}_a \tag{36}$$

线性系统时

$$V(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}_a)=\boldsymbol{p}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{p}_a/2+\boldsymbol{p}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{q}/2,$$

$$\boldsymbol{q}_a=\boldsymbol{F}\boldsymbol{q}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{p}_a,$$

$$\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{Q}\boldsymbol{q}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_a$$

混合能的区段合并变分原理为

$$V_{0,b}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}_b,z,z_b)=$$

$$\min_{\boldsymbol{p}_a}\max_{\boldsymbol{q}_a}[V_{0,a}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}_a,z,z_a)+V_{a,b}(\boldsymbol{q}_a,\boldsymbol{p}_b,z_a,z_b)-\boldsymbol{p}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_a] \tag{37}$$

也与(31)相一致.其实,线性系统势能、混合能与辛矩阵表达的一致性已经在文[5]中讲述.

3.1 有限元离散系统与保辛

既然已经证明了正则变换与变形能变分原理的一致性,而变形能变分原理与混合能变分原理也是一致的,故混合能变分原理与正则变换一致.采用区段能量表达的优点是其离散的系统性质.有限元位移法分析自然就导出区段变形能.采用正则变换就是保辛,故有限元法能自动保辛.线性体系的有限元分析用刚度阵的对称性保辛.非线性有限元就五花八门了,这是应当考虑的.以上分析表明,位移法非线性有限元可从区段变形能只是两端位移的函数这一原则来达到保辛.问题在于非线性系统求解或参数修改等经常采用小参数摄动法,它保辛吗?

有限元分析的特点是将连续系统分析近似地转化为离散系统来分析.有限元离散时应保证区段变形能只是两端位移的函数.但也只能保证有限元离散近似这一步保辛.非线性系统离散后仍为非线性方程,要求解.非线性联立方程的求解是很大的课题.非线性系统的求解经常采用小参数法摄动展开.但离散系统的小参数法摄动展开法保辛吗?该问题另文研究.

3.2 离散链式结构的传递求解

连续坐标课题有限元离散后,成为保辛的链式联立方程.因柱形域结构力学分析是与最优控制理论模拟的,故特别有兴趣.设线性结构刚度有小参数 $\varepsilon_i, i=1,\cdots,\varepsilon_p$ 待定.参数确定后沿长度方向步步推进积分是可行的.但优化设计或参数识别分析需要不断改变参数的选择.修改参数后仍需求解,要做灵敏度分析.如要更好的近似,就应保辛.

设链式结构是由定常区段组成的,只有一个参数 ε 待定,其区段刚度阵为

$$\boldsymbol{K}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{aa} & \boldsymbol{K}_{ab}\\ \boldsymbol{K}_{ba} & \boldsymbol{K}_{bb}\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{aa}^{(1)} & \boldsymbol{K}_{ab}^{(1)}\\ \boldsymbol{K}_{ba}^{(1)} & \boldsymbol{K}_{bb}^{(1)}\end{bmatrix} \tag{38}$$

在起始站 $k=0$ 的边界条件为 $\boldsymbol{p}_0=0$,要求解参数函数 ε 的右端 $k=m$ 处的 $n\times n$ 刚度阵 $\boldsymbol{K}_m$, $\boldsymbol{p}_m=\boldsymbol{K}_m\boldsymbol{q}_m$.

首先将解的原方程写为对偶向量的传递辛形式(相当于 初参数法、或 打靶法)

$$\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{v}_{k-1}, k=1,\cdots,m \tag{39}$$

$$\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{S}_{0\sim k}\boldsymbol{v}_0,$$

$$\boldsymbol{S}_{0\sim k}=\boldsymbol{S}_k\cdot\boldsymbol{S}_{k-1}\cdots\boldsymbol{S}_1,$$

$$\boldsymbol{S}_k=\boldsymbol{S}_{0k}+\varepsilon\boldsymbol{S}_{k+} \tag{40}$$

其中 ε 是小参数.原方程直接求解,未运用小参数展开,故给出精确解.由传递辛矩阵就容易求出 K_m 了.

小参数摄动应先求解 $\varepsilon=0$ 的情况,并用下标0标记.链式结构是两端边值问题.可用(5)转换为状态向量传递辛矩阵的方法求解.$(k-1,k)$ 的区段 k 单元刚度阵 $\boldsymbol{K}_{0k}$ 变换为辛矩阵 $\boldsymbol{S}_{0k}$.根据

$$\boldsymbol{v}_{0k}=\boldsymbol{S}_{0k}\boldsymbol{v}_{0,k-1}, k=1,\cdots,m$$

从起始站 $k=0$ 的状态向量 $\boldsymbol{v}_{00}$ 计算有

$$\boldsymbol{S}_{0,0\sim k}=\boldsymbol{S}_{0k}\cdot\boldsymbol{S}_{0,k-1}\cdots\boldsymbol{S}_{01},$$

$$\boldsymbol{v}_{0k}=\boldsymbol{S}_{0,0\sim k}\boldsymbol{v}_{00}, k=1,\cdots,m \tag{40'}$$

用位移法表示,$\boldsymbol{K}_{g0}\boldsymbol{q}_{g0}=\boldsymbol{f}$,其中 $\boldsymbol{q}_{g0}=\{0\quad q_{01}\quad q_{02}\}^{\mathrm{T}}(m=2)$ 是各节点位移组成的总位移向量.相应地对偶总节点力向量为 $\boldsymbol{p}_{g0}=\{p_{00}\quad p_{01}\quad p_{02}\}^{\mathrm{T}}$,则节点的状态向量为 $\boldsymbol{v}_{0i}=\{q_{0i}\quad p_{0i}\}^{\mathrm{T}}$,并可由这些节点的状态向量组成总状态向量.零次近似是保辛的.

在零次近似基础上的保辛小参数摄动可用正则变换.将未知状态向量 $\boldsymbol{v}_k$ 表达为

$$\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{S}_{0,0\sim k}\cdot\boldsymbol{v}_{1k}, k=0,\cdots,m \tag{41}$$

其中用 $\boldsymbol{v}_{1k}$ 代替 $\boldsymbol{v}_k$ 待求.状态向量用辛矩阵 $\boldsymbol{S}_{0,0\sim k}$ 前乘,就是正则变换.代入原方程(39),有

$$\boldsymbol{S}_{0k}\boldsymbol{S}_{0,0\sim k-1}\cdot\boldsymbol{v}_{1k}=\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{S}_{0,0\sim k-1}\cdot\boldsymbol{v}_{1,k-1}$$

双方左乘以$(-\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}_{0,0\sim k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{0k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})$,利用辛矩阵的特点 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{J}$,给出对 $\boldsymbol{v}_{1k}$ 的传递方程

$$\boldsymbol{v}_{1k}=\boldsymbol{S}_{1k}\cdot\boldsymbol{v}_{1,k-1},$$

$$\boldsymbol{S}_{1k}\underset{\mathrm{def}}{=}-\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}_{0,0\sim k-1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}_{0k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}_k)\boldsymbol{S}_{0,0\sim k-1} \tag{42}$$

因 $\boldsymbol{S}_k,\boldsymbol{S}_{0,0\sim k-1}$ 皆为辛矩阵,故 $\boldsymbol{S}_{1k}$ 仍为辛矩阵.再

因 $\boldsymbol{S}_k$ 与零次近似的$\boldsymbol{S}_{0k}$ 相差不大,可表达为 $\varepsilon\boldsymbol{S}_{k+}=\boldsymbol{S}_k-\boldsymbol{S}_{0k}$,从而

$$\boldsymbol{S}_{1k}=-\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}_{0,0\sim k-1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}_{0k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}_k)\boldsymbol{S}_{0,0\sim k-1}=$$
$$\boldsymbol{I}-\varepsilon\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}_{0,0\sim k-1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}_{0k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}_{k+})\boldsymbol{S}_{0,0\sim k-1} \quad (43)$$

所以 $\boldsymbol{S}_{1k}$ 与单位阵相差一个小量矩阵.对方程(42)积分求出 $\boldsymbol{v}_{1k},k=1,\cdots,m$.它与单位向量相差一个小量,就完成了一次保辛的摄动.

正则变换的表述只能用于两端位移 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_a$ 为相同 n 维数向量的情况;然而有限元变分原理可用于不同维位移向量的情况.虽然都是保辛摄动,位移法摄动与式(39) ~ (42) 的辛摄动仍是不同的.

4　不同维数的体系

分析动力学中通常不讲不同维的系统,但结构力学常见不同维的系统,可用条形矩阵或波前法求解.将有限元变截面结构在长度的横向切开,就会出现两端出口不同维的子结构.其变形能函数为 $U(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2)$,其中 $\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2$ 分别是 n_1,n_2 维向量,设 $n_2>n_1$.分别引入对于 $\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2$ 的对偶向量

$$\boldsymbol{p}_1=-\partial U(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2)/\partial\boldsymbol{q}_1,$$
$$\boldsymbol{p}_2=\partial U(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2)/\partial\boldsymbol{q}_2 \quad (44a)$$

或

$$p_{1j}=-\partial U/\partial q_{1j},\ p_{2i}=\partial U/\partial q_{2i} \quad (44b)$$

组成两端的状态向量,$\boldsymbol{v}_i=\{\boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_i^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}},i=1,2$.根据微商的次序无关规则,有

$$\partial p_{2i}/\partial q_{1j}=-\partial p_{1j}/\partial q_{2i}=\partial^2 U/\partial q_{2i}\partial q_{1j} \quad (45)$$

现在考察变形能、混合能与状态向量.变形能与混合能的合成公式分别采用变分原理(31)与(37),对不同维数的体系不成问题.正则变换辛矩阵要求两端维数相同,故不能适应不同维数的体系;然而变形能、混合能表示则可适应.

于是变形能、混合能的表象,当维数不变时与正则变换相同;在维数变化时仍能适应.故变形能(31)、混合能(37)的变分原理成为正则变换对不同维结构力学的推广.从而结构力学的串联子结构消元算法[3]符合于正则变换的推广,效果也很好.

5　结束语

本文给出了分析结构力学的理论.根据单连续坐标结构的区段变形能只是两端状态的函数,证明了状态传递就是正则变换.反之,状态传递为正则变换决定了区段变形能函数的存在.两者互为充要条件.从而势能变分原理、混合能变分原理与两个正则变换的积仍为正则变换,是一致的.正则变换是保辛的.故势能变分原理、混合能变分原理也是保辛的.

结构力学与动力学一样,经常采用近似的小参数摄动法.这是应用数学与力学最常用的近似之一.然而,常用的小参数摄动法全保辛吗? 应予分析,许多近似算法是否保辛等都应研讨.

如所熟知,辛矩阵的乘积仍给出辛矩阵,辛矩阵在其乘法下构成一个群[3].但辛矩阵的加法却不能保证给出辛矩阵.这简单的事实对于近似分析有指导意义.在状态空间下的近似计算,如果要保辛,就不宜采用加法.可是常用的小参数摄动法用的就是加法,因此不能保证保辛.如何才保辛还需深入探讨.需要另文研讨.

本文由国家自然科学基金(10372019),教育部博士点基金(20010141024) 支持,特此表示感谢.本文也是与科学院自动化所复杂系统与智能科学重点实验室的合作课题.

参　考　文　献

1　Goldstein H. Classical mechanics. 2nd ed. London: Addison-Wesley, 1980

2　冯康,秦孟兆. Hamilton 体系的辛计算格式. 杭州:浙江科技出版社,2003(Feng K, Qin M Z. Symplectic Geometric Algorithms for Hamiltonian system. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Press, 2003(in Chinese))

3　钟万勰. 应用力学对偶体系. 北京:科学出版社,2002 (Zhong WX. Duality system in applied mechanics. Beijing: Science Press, 2002(in Chinese))

4　Whittaker ET. A treatise on the analytical dynamics. 4th ed. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1952

5　钟万勰. 子结构链及 LQ 控制的能量代数. 大连理工大学学报, 1992, 31: 635 ~ 638(Zhong WX. Engergy algebra of substructure chain and LQ control. *J of Dalian Univ Tech*, 1992, 31: 635~638(in Chinese))

ANALYTICAL STRUCTURAL MECHANICS AND FINITE ELEMENT*

Zhong Wanxie

(*State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian* 116023, *China*)

Abstract Traditionally, analytical mechanics is described by means of dynamics, and the common foundation for structural mechanics and optimal control is analytical mechanics. So, under the framework of structural mechanics or optimal control theory, there should also be a whole set of analytical mechanics theory, which we define as analytical structural mechanics. A conservative system can be described with the Hamilton system methodology, and its characteristic is the symplectic conservation, which is the most important feature of conservative system. The finite element method was initiated from structural mechanics, and its element stiffness matrices should be symmetric, which is, in fact, the symplectic conservation. Based on the fact that the interval deformation energy depends only on the two end displacements vector, we derive the Lagrange and Poisson brackets analytically, the symplectic duality system, the canonical equations, and the canonical transformations, etc.

Key words analytical structural mechanics; symplectic conservation; canonical transformation; finite element.

简讯

《动力学与控制学报》即将进入国家中文核心期刊

《动力学与控制学报》从2003年底创刊以来,经过全国动力学与控制科学工作者、期刊编委和编辑部成员的不懈努力,即将于2005年进入国家中文核心期刊的行列.

《动力学与控制学报》编辑部

Received 29 October 2004.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10372019) and the Doctoral Disipline of the Ministry of Education, China(20010141024)