

噪声在慢变系统中的随机 Chay 神经元模型的自共振*

王青云 陆启韶

(北京航空航天大学理学院,北京 100083)

摘要 研究了白噪声在慢变系统中的 Chay 神经元模型的共振. 被加到慢变量中的白噪声相当于钙离子的波动,这是更具有生理意义的. 随着噪声强度的增加,发现在某一优化噪声水平处,信噪比经过极大值,这意味自共振的发生. 同时,也证实了钙离子的波动可以引起信号的探索和转换.

关键词 随机 Chay 神经元模型,白噪声,自共振

引言

在传统观点的意义上,噪声被认为是无用的,经常被人们误解. 然而,噪声对非线性系统的作用是非常复杂的并且具有反直觉性. 在许多非线性系统中,噪声对随机共振起关键性作用^[1~4],即噪声能增加动力系统对外部信号的反映. 有许多的例子可以表明,在非线性动力系统中,噪声能导致更有序. 比如,噪声能使混沌信号更规则^[5];噪声能诱导耦合系统的同步等^[6]. 噪声对信号探索的优点已经在许多实验中已经表明. 在神经元模型中随机共振已经被广泛研究^[6,8,9,10]. 所有这些模型中,我们发现,在某一优化噪声水平处,噪声能使神经元的激发节奏更有序. 那也就是说,随机共振被达到. 在文[7]中,无外周期力的共振被报告. 我们称这种共振为自共振或内共振. 在神经元模型中,这种共振也有许多研究. 在这些系统中,有明显的自共振出现.

现实的神经元经常生活在噪声环境中,这种噪声可能来自神经元的内部也可能来自神经元外部环境. 因此,噪声对神经元的作用应当借助神经元模型和对应的实验广泛的研究. 只有这样,我们才有可能对神经元的激发节奏和信息传递有充分的理解. 神经元经常呈现两个时间尺度,一个是对应于动作电位的快动力;另一个是对应于离子波动的慢动力. 然而,大多数研究者关注噪声对快动力的影响. 这种噪声相当于来自神经元外部环境的随机力(如温度的变化,神经元之间相互作用等). 本文着重噪声慢动力的作用,这种噪声可能来自象钠、钾或钙等离子体的波动. 我们也发现了自共振. 近来

的实验已经揭露了内噪声的重要性. 在这里,我们着重研究在 Chay 模型慢动力中的噪声对激发节奏的影响,Chay 模型慢动力中的噪声相当于神经元中钙离子的波动.

1 确定性 Chay 神经元模型和它的局部动力

基于 HH 类的 Chay 神经元模型^[12]包含 HH 类离子动力(钠,钾,或钙等离子)Chay 神经元模型能模拟许多神经元的放电活动(象 β 细胞,冷接受细胞). 它的方程由下面一组微分方程给出

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= g_1 m_\infty^3 h_\infty (V_1 - V) + \\ &g_{K,V} (V_K - V) n^4 + \\ &g_{K,C} \frac{C}{1+C} (V_K - V) + \\ &g_L (V_L - V) \\ \frac{dn}{dt} &= \frac{n_\infty - n}{\tau_n} \end{aligned}$$

$$\frac{dC}{dt} = \rho \{ m_\infty^3 h_\infty (V_C - V) - k_C C \}$$

这里 t 是时间变量, V 代表膜电位, n 是钾离子通道激活的概率, C 是内钙含量; V_1, V_K, V_L, V_C 分别是混和 $\text{Na}^+ - \text{Ca}^{2+}, \text{K}^+$, 漏电流和 Ca^{2+} 的逆电位. $g_p, g_{K,V}, g_{K,C}$ 和 g_L 分别代表各通道的最大电导, m_∞ 和 h_∞ 分别为混合 $\text{Na}^+ - \text{Ca}^{2+}$ 通道激活和失活的概率. $\tau_n, n_\infty, m_\infty$ 和 h_∞ 的显式表达式和意义参见文[12]. 在本文中参数 $g_1 = 1800, g_{K,V} = 1700, g_{K,C} = 10, g_L = 7, \rho = 0.27, K_C = 0.183, V_1 = 100, V_L = -40, V_C = 336. V_K$ 被作为控制参数. 在

2004-08-02 收到第1稿,2004-09-02 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10172011)

确定性 Chay 神经元模型中图 1 表明了以 V_K 为控制参数的分岔图. 从数值计算我们可以得出, 当 $V_{K,C} = -82.387517$, 确定性 Chay 神经元模型经历亚临界 Hopf 分岔. 当 $V_K < V_{K,C}$, 膜电位呈现阻尼阈下振荡[参见图 2(a),(b)]; 而当 $V_K > V_{K,C}$, 大的极限环出现[参见图 2(c)]. 高斯白噪声在 Chay 神经元模型快动力时引起的整数倍峰放电已经被研究. 而我们想知道阻尼阈下振荡如何被象钙离子随机波动这些内噪声影响. 在下面, 我们表明阻尼阈下振荡在噪声诱导的自共振中占有重要的角色. 而且, 我们也可以知道神经元可以通过类似离子波动的内噪声调剂到合适的状态以执行其对应的功能.

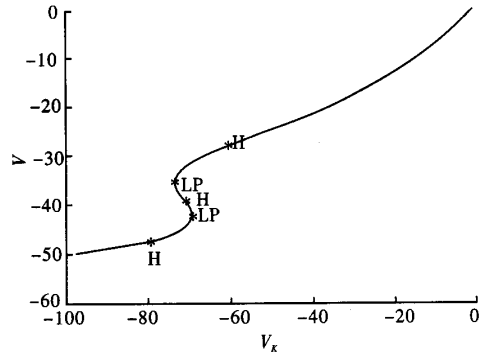
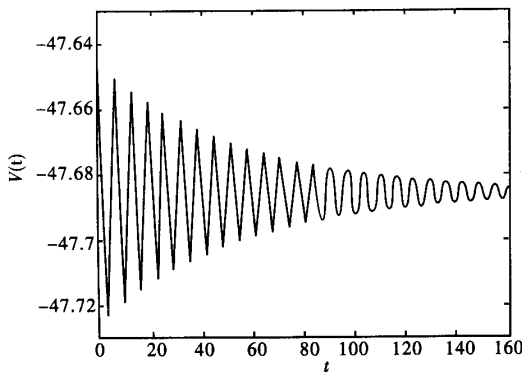


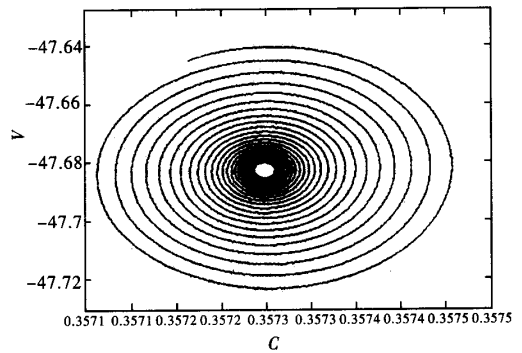
图 1 参数 V VS V_K 膜电位的余维一分岔图.

Fig.1 Bifurcation diagram of parameter V VS V_K



(a) 当参数 $V_K = -82.5$ 阈下振荡的时间序列图

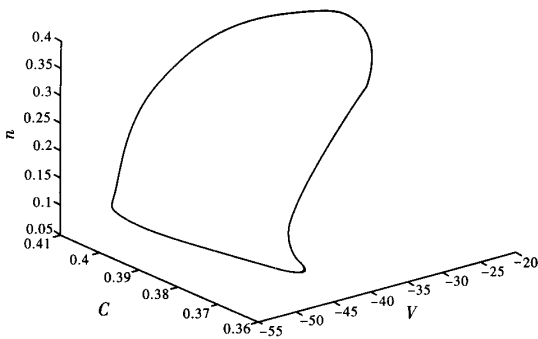
(a) Time series of the subthreshold oscillator when parameter $V_K = -82.5$



(b) 当参数 $V_K = -82.5$ 阈下振荡的相平面图

(b) Phase plane of the subthreshold oscillator when parameter $V_K = -82.5$

of the suprathreshold oscillator with different parameters



(c) 当参数 $V_K = -82$ 阈上的极限环

(c) Limit cycle of the subthreshold oscillator for parameter $V_K = -82$

图 2 当参数 V_K 取不同值时阈下振荡和阈上的极限环

Fig.2 The subthreshold oscillator and limit cycle

2 白噪声诱导的自共振

在噪声诱导的可兴奋的神经元模型的共振已经被许多学者研究^[2,6,8,9,10]. Plant 慢波模型和 HR 模型也表现出自共振^[2]; HH 模型呈现了包括相锁定的各种共振. 而对于 Chay 神经元模型, 噪声对快动力的影响已经有所研究, 如呈现出的整数倍节律等. 在我们的研究中, 关注的是噪声对慢动力的作用. 一个随机因素, 高斯白噪声被加到方程第三个中其他两个方程不变. 由此得到下面的随机 Chay 神经元模型.

$$\frac{dV}{dt} = g_1 m^3 h_\infty (V_1 - V) + g_{K,V} (V_K - V)n^4 + g_{K,C} \frac{C}{1+C} (V_K - V) + g_L (V_L - V)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n_\infty - n}{\tau_n}$$

$$\frac{dC}{dt} = \rho \{ m^3 h_{\infty} (V_C - V) - k_C C \} + \zeta(t)$$

这里的 $\zeta(t)$ 是 高 斯 白 噪 声, 它 具 有 下 面 性 质 $\langle \zeta(t) \rangle = 0, \langle \zeta(t), \zeta(t') \rangle = 2D\delta(t - t')$. 这 里 D 是 噪 声 强 度, 是 一 个 Dirac 函 数.

为 了 刻 划 自 共 振, 我 们 定 义 自 共 振 的 度 量 信 噪 比 如 下

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{S(f)}{N(f)}$$

这 里 $S(f), N(f)$ 分 别 是 在 基 线 (floor) 上 和 下 的 面 积. 基 线 (floor) 是 连 接 背 景 噪 声 的 一 条 直 线. 如 图 3 所 示.

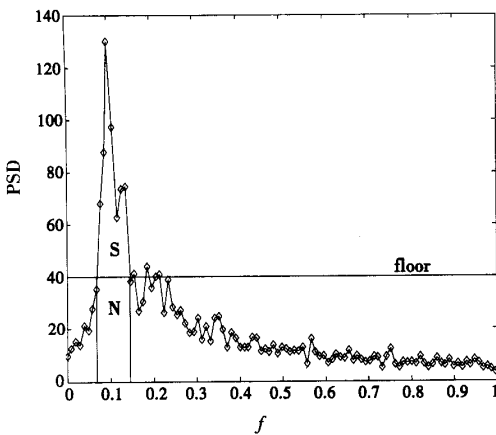
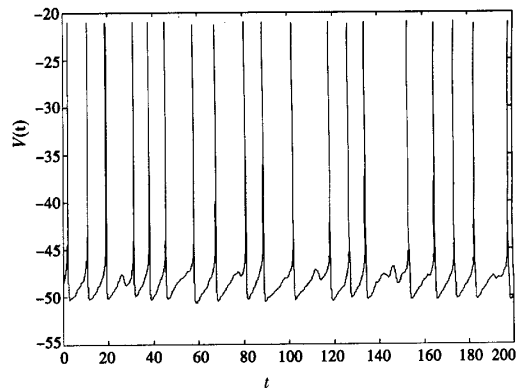


图 3 面积 $S(f), N(f)$ 的图示
Fig. 3 Indication of areas $S(f), N(f)$

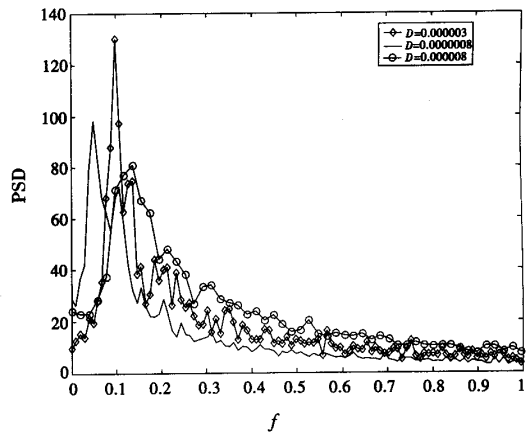
随 机 Chay 神 经 元 模 型 对 高 斯 白 噪 声 典 型 的 反 映 由 图 4 表 明. 图 4(a) 表 明 了 当 噪 声 强 度 $D = 0.000\ 003$ 时 的 激 发 模 式. 图 4(b) 是 对 应 的 功 率 谱 密 度, 它 的 峰 值 呈 现 了 神 经 元 对 高 斯 白 噪 声 的 反 映. 自 共 振 可 以 由 图 4(c) 表 明, 这 里 信 噪 比 (SNR) 曲 线 随 着 噪 声 强 度 的 增 加 爬 上 去 然 后 又 跌 下 来. 因 此 在 SNR 曲 线 上 出 现 一 个 局 部 极 大 值, 这 个 极 大 值 表 明 了 在 某 一 优 化 噪 声 强 度 在 Chay 神 经 元 自 共 振 的 发 生.

在 图 4 中 我 们 选 择 参 数 $V_K = -83$, 即 决 定 性 Chay 神 经 元 模 型 呈 现 阻 尼 阈 下 震 荡. 从 上 面 可 以 看 出 当 噪 声 强 度 $D = 0.000\ 003$, 随 机 Chay 神 经 元 模 型 表 现 出 明 显 的 自 共 振. 而 且 我 们 也 发 现 随 着 噪 声 强 度 的 增 加, 主 峰 频 率 也 随 之 增 加. 主 峰 频 率 和 噪 声 强 度 有 什 么 样 的 关 系, 我 们 下 面 将 讨 论 这 个 问 题. 图 5 中 圆 环 给 出 了 它 们 的 关 系. 我 们 可 以 看 出 它 们 并 不 是 一 种 简 单 的 函 数 关 系, 而 是 有 一 种 高 度 的 非 线 性 形 式.



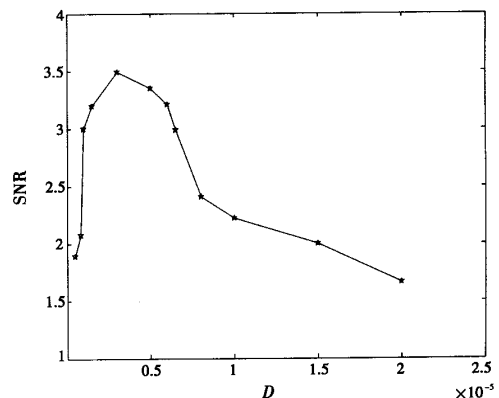
(a) 参 数 $V_K = -83$ 和 噪 声 强 度 $D = 0.000\ 003$ 时 的 时 间 序 列 图

(a) Time series for parameter $V_K = -83$ and noise density $D = 0.000\ 003$



(b) 当 参 数 $V_K = -83$ 时, 在 不 同 噪 声 强 度 下 的 功 率 谱

(b) Power spectrum density under different noise density when parameter $V_K = -83$



(c) 参 数 $V_K = -83$ 时 的 信 噪 比 (SNR) 曲 线

(c) The SNR as a function of noise intensity D when parameter $V_K = -83$

图 4 参 数 $V_K = -83$ 时, 数 值 模 拟 的 结 果

Fig. 4 Some numerical results with parameter $V_K = -83$

图5中的圆环是我们采样的数据,实线是我们构造的函数对数据进行的拟合.我们构造的函数是由Kramer类公式启发而得到的.在受周期驱动的双稳态系统中,激发状态概率切换的Kramer类公式是

$$R(t) = \exp\{(-U/D)[1 - a\cos(2\pi ft)]\}$$

这里 U 是有效的障碍高或激发阈值. D 是有效的噪声强度. a 是常数. 平均激发率可以由下式给出

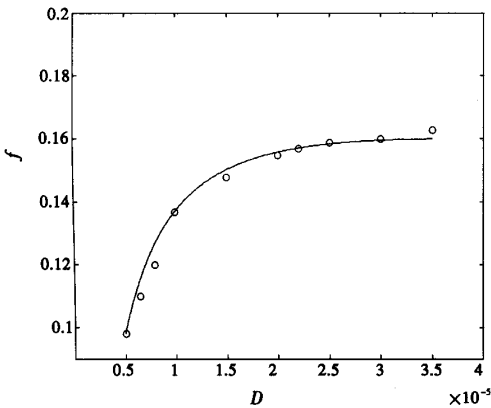


图5 主频率 f 关于噪声强度 D 的函数曲线(实线代表拟合)
Fig.5 Main frequency f VS noise intensity D
(solid line represents fit)

$$\langle R(t) \rangle = \exp(-U/D)B(aU/D)$$

这里 B 是零阶贝塞尔函数. 从上面的分析我们可以构造下面函数来拟合我们的数据

$$f = C_1 D^{(-\mu)} \exp(-C_2/D)$$

这里 D 是噪声强度, C_1, C_2 是常数. 通过计算, 我们可以得出

$$C_1 = 0.057\ 625\ 464\ 900\ 36,$$

$$C_2 = 0.000\ 004\ 119\ 549\ 89,$$

$$\mu = 0.111\ 003\ 180\ 710\ 79$$

我们可以看出采样的数据和公式有很好的适合. 总之, 我们相信主频率不是噪声强度的线性函数, 而是高度非线性的. 进而可以断言噪声对神经元的影响是非常复杂的非线性动力学行为.

3 结论

我们已经表明具有高斯白噪声在慢变量中的随机Chay神经元模型中, 自共振能在某一优化噪声水平处发生. 在神经元中自共振的现象是重要的, 因为对于神经元来说, 内或外部的噪声(例如,

温度变化或离子波动等)是不可避免的. 神经元能利用这些噪声完成随机共振. 在现实的神经元中, 细胞内 Ca^{2+} 离子在控制和调整许多细胞的功能扮演重要的角色, 而 Ca^{2+} 离子的波动是不可避免的. 因此, 噪声被加到慢变中对于解释生理现象是更合理. 最后我们表明主峰频率与噪声强度的关系, 从而使更加相信噪声对神经元的影响是高度非线性的形式.

最后, 我们需要指出的是噪声对快慢动力的影响是有区别的. 主要表现在以下两个方面: 1) 当达到自共振时, 所需的噪声强度有明显的区别. 噪声加到慢动力中所需的噪声强度远远低于加到快动力中所需的噪声强度. 2) 当噪声加到慢动时达到共振容易被破坏, 而当噪声加到快动时达到共振容易被维持. 我们可以借助于图4(c)和图6可以看出当达到自共振时噪声加到快动时有明显的高噪声强度, 它大约是 $D = 0.4$. 对于上面事实的解释我们主要从吸引域的角度去考虑. 由于系统是双稳的, 所以存在一个吸引域. 而我们知道Chay神经元系统有两个时间尺度, 即快慢尺度. 在慢尺度方向吸引域的尺寸远远小于快尺度方向吸引域的尺寸. 所以有上述结果的出现.

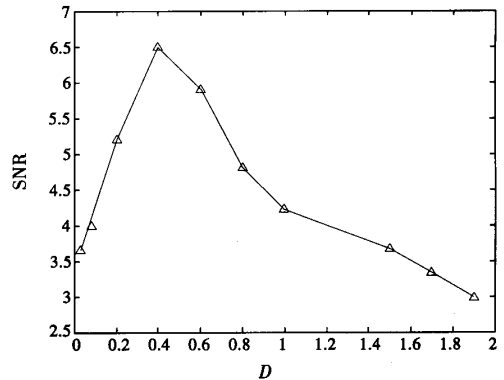


图6 当噪声加到快动力中时, 参数 $V_k = -83$ 处的信噪比(SNR)VS噪声强度 D 曲线

Fig.6 The SNR as a function of noise intensity D when parameter $V_k = -83$ with noise being added to fast dynamics

参考文献

- 1 Robert C Hilborn, Rebecca J. Erwin. Coherence resonance in models of an excitable neuron with noise in both the fast and the slow dynamics, *Physics Letters A*, 2004, (322): 19 ~ 24
- 2 Longtin A. Autonomous stochastic resonance in bursting

- neurons. *Physical Review E*, 1997, (55): 868~876
- 3 Arkady S. Pikovsky and Jürgen Kurths Coherence resonance in a noise - driven excitable system. *Physical Review E*, 1997, (78): 775~778
 - 4 Hans E. Plesser, Theo Geisel, Signal processing by means of noise. *Neuro - computing*, 2001, (38 - 40): 307 - 312
 - 5 Zhu Liqiang, Lai Yincheng, et al. Can noise make non-bursting chaotic systems more regular. *Physical Review E*, 2002, 66: 015204
 - 6 Zhou Changsong, Jürgen Kurths. Noise - induced synchronization and coherence of a Hodgkin - Huxley model of thermally sensitive neurons. *Chaos*, 2003, 13: 401~409
 - 7 Hu Gang. Stochastic resonance without external periodic force. *Physical Review Letters*, 1993, 71: 807~810
 - 8 Seung Kee Han, Tae Gyu Yim, et al. Interacting coherence resonance oscillators. *Physical Review Letters*, 1999, 83: 1771~1774
 - 9 Lee Sanggui, Seunghwan Kim. Parameter dependence of stochastic resonance in the stochastic Hodgkin - Huxley neuron. *Physical Review E*, 1999, 60: 826~830
 - 10 Volkov EI, Stolyarov MN, et al. Coherence resonance and polymodality in inhibitory coupled excitable oscillators. *Physical Review E*, 2003, 67: 066202
 - 11 Zhong Shi, Xin Houwei. Effects of colored noise on internal stochastic resonance in a chemical model system. *Chemical Physics Letters*, 2001, 333: 133~138
 - 12 Chay TR. Chaos in three variable model of an excitable cell. *Physica D*, 1985, 16: 233
 - 13 Rebecca L Honeycutt. Stochastic Runge - kutta algorithm. *Physical Review A*, 1992, 45: 600

COHERENT RESONANCE IN THE STOCHASTIC CHAY NEURON MODEL IN SLOW DYNAMICS WITH WHITE NOISE*

Wang Qingyun Lu Qishao

(School of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract Coherent resonance in the Chay neuron model with white noise in the slow dynamics was studied. The white noise that is added to the slow dynamics amounts to calcium ionic fluctuation. So it is more biologically feasible. We found that when increasing the noise intensity the output signal-to-noise(SNR) of the Chay neuron system went through a local maximum at the optimal noise level, which showed the occurrence of coherence resonance. We also verified that the noise in the slow dynamics, namely, the calcium ionic random fluctuation, may enhance signal detection and transduction.

Key words Chay neuron model, white noise, coherence resonance