

随机 Duffing-van der Pol 系统响应的 Chebyshev 多项式逼近

马少娟 徐伟 雷佑铭
(西北工业大学应用数学系,西安 710072)

摘要 对一类含随机参数的 Duffing-van der Pol 系统,运用 Chebyshev 多项式逼近法,将其转化成等价的确定性扩阶系统;通过求解等价系统在谐和激励下的稳态响应,可得 Duffing-van der Pol 系统相应的稳态随机响应,研究了当谐和激励的振幅变化时,含随机参数的 Duffing-van der Pol 系统的对称破裂分岔和倍周期分岔.数值模拟结果与数值解比较表明:正交多项式逼近法能有效地解决此类非线性随机动力系统的响应问题.

关键词 Chebyshev 多项式,随机 Duffing-van der Pol 系统,对称破裂分岔,倍周期分岔

引言

随机结构分析的研究已有 20 余年的历史,其主要研究手段有随机模拟法^[1,2]和随机摄动法^[3-5].随机摄动法和随机模拟法虽然能成功地解决静力分析、动力特征值等问题,但随机模拟法需要花费巨大的计算工作量,随机摄动法则要求随机系统的变异参数是一个小量,因而局限性较大.在这一背景下,由 Spanos^[6],Jensen 和 Iwan^[7]发展的正交展开理论,为随机结构的动力响应研究开辟了一个重要的方向.其后,一些学者发展完善了这一理论.李杰^[8,9]提出了类似的随机结构子空间次序正交分解的思想,并逐步地完善这一思想.方同、冷小磊等^[10]应用正交多项式逼近了一类线性随机系统的响应.冷小磊^[11]利用正交多项式逼近法研究了随机 Duffing 系统的动力学行为,把正交多项式逼近的理论扩展到了非线性问题的研究中.

Duffing-van der Pol 系统是一个很典型的系统,同时含有 van der Pol 系统的非线性阻尼项及 Duffing 系统三次非线性项,因此在工程应用中具有广泛地代表性.确定性 Duffing-van der Pol 系统已被广泛的研究过^[12,13].许多学者用随机平均法或多尺度法等方法研究了随机激励下的 Duffing-van der Pol 系统的响应问题^[14,15].然而,对于含有随机参数的 Duffing-van der Pol 系统响应问题的研究,目前尚未见有文献.

本文利用正交多项式逼近方法把含随机参数的 Duffing-van der Pol 系统转化成等价的确定性扩

阶系统,针对相应的扩阶系统求出其解,得到趋向稳态的随机响应,并在此基础上研究含随机参数的 Duffing-van der Pol 系统的对称破裂分岔、倍周期分岔问题.

1 chebyshev 多项式

正交多项式逼近法中多项式基的选取依赖于方程中随机变量的概率密度函数,在随机系统的动力分析中,正态分布和均匀分布是两种典型的密度函数,它们所对应的多项式基是 Hermite 多项式和 Legendre 多项式.然而,正态分布的随机变量,其取值可达到 $-\infty$,这不仅违背了随机参数的取值限制,而且会致使部分样本系统成为不稳定系统.均匀分布的随机变量,从 -1 到 $+1$ 的变化不会导致不稳定现象的发生,但在实际应用中不合理.因此,我们选择一种服从拱形分布的随机变量,既不会使系统发生不稳定现象,在实际应用中也非常合理.见图 1 的拱形概率密度函数表示如下

$$p(u) = \begin{cases} (2/\pi)\sqrt{1-u^2} & |u| \leq 1 \\ 0 & |u| > 1 \end{cases} \quad (1)$$

基于概率密度函数(1),选择第二类 Chebyshev 多项式为正交基,其表达式为^[16]

$$U_n(u) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} (2u)^{n-2k}, \quad (2)$$

因此,有

$$U_0(u) = 1 \\ U_1(u) = 2u$$

$$\begin{aligned}
 U_2(u) &= 4u^2 - 1 \\
 U_3(u) &= 8u^3 - 4u \\
 U_4(u) &= 16u^4 - 12u^2 + 1 \\
 U_5(u) &= 32u^5 - 32u^3 + 6u, \quad (3)
 \end{aligned}$$

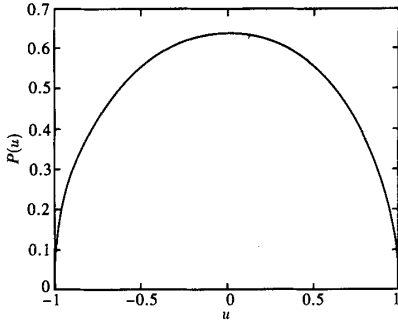


图1 随机变量的拱形概率密度函数曲线 $p(u)$
 Fig.1 The curve of arch-like PDF $p(u)$ for random variable

经过推导,可以得出

$$uU_n(u) = \frac{1}{2}(U_{n-1}(u) + U_{n+1}(u)) \quad (4)$$

此类 Chebyshev 多项式的正交性表现为

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{\pi} \sqrt{1-u^2} U_i(u) U_j(u) du = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (5)$$

方程(5)是一种加权正交关系,其加权函数正是拱形概率密度函数.方程(5)的左边可看作是 $U_i(u)U_j(u)$ 的期望.则根据概率论中的知识,随机空间 Ω 中的随机变量 ζ 的任意可测函数 $f(u)$ 可以按第二类 Chebyshev 多项式为正交基展开成如下形式

$$f(u) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i U_i(u)$$

在此, $c_i = \int_{-\infty}^{\infty} p(u)f(u)U_i(u)du$ 为函数 $f(u)$ 在基函数 $U_i(u)$ 上的投影,对于多个独立的随机变量的函数 $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$,也有类似的结论.这种展开称为随机函数 $f(u)$ 的正交分解,是构造复合随机响应问题的正交分解方法的理论基础.

2 随机 Duffing-van der Pol 系统的 Chebyshev 多项式逼近

考虑单自由度含随机参数的 Duffing-van der Pol 系统

$$\ddot{x} + (a + cx^2)\dot{x} + bx^3 + dx = f \quad (6)$$

其中 a, c, d 为确定性参数, b 为随机参数, $f(t) = F \cos(\omega t)$ 为确定性谐和激励. b 可以表示为

$$b = \bar{b} + \delta u \quad (7)$$

其中 \bar{b} 为随机参数 b 的均值, δ 表示 b 的标准差, u 是定义在 $[-1, 1]$ 上服从拱形分布的随机变量.此时,系统的响应可表示为时间 t 与 u 的函数,即 $x = x(t, u)$.因此,系统的响应展开成以 u 下的正交多项式为基函数的级数形式

$$x(t, u) = \sum_{i=1}^N x_i(t) U_i(u) \quad (8)$$

其中 $U_i(u)$ 是第 i 阶正交多项式, $x_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u)x(t, u)U_i(u)du, N = 0, 1, 2, \dots$, 将式(7)和式(8)代入式(6)中,整理后有

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + d \right) \sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(t) + \\
 \frac{1}{3} c \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(t) \right)^3 + \\
 \bar{b} \left(\sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(t) \right)^3 + \\
 \epsilon u \left(\sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(t) \right)^3 = f(t) \quad (9)
 \end{aligned}$$

上式中的三次项整理为

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(t) \right)^3 = \\
 x_0^3(t) U_0^3(t) + \dots + \\
 x_N^3(t) U_N^3(t) + \\
 3x_0^2(t)x_1(t)U_0^2(t)U_1(t) + \dots + \\
 3x_{N-1}(t)x_N^2(t)U_{N-1}(t)U_N^2(t) + \\
 6x_0(t)x_1(t)x_2(t) \times \\
 U_0(t)U_1(t)U_2(t) + \dots + \\
 6x_{N-2}(t)x_{N-1}(t) \times \\
 x_N(t)U_{N-2}(t)U_{N-1}(t)U_N(t) \quad (10)
 \end{aligned}$$

对于 Chebyshev 多项式,经推导有

$$\begin{aligned}
 U_0^3 &= U_1 \\
 3U_0^2 U_1 &= 3U_1 \\
 3U_1^2 U_2 &= 3U_4 + 6U_2 + 3U_0 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

将上式代入式(10)中,则其中 $U_i(u)$ 的三次乘积项化为相应单个正交多项式 $U_i(u)$ 的线性组合.整理后,令第 i 阶多项式 $U_i(u)$ 的系数为 $X_i(t)$, 则有

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i=1}^N x_i(t) U_i(u) \right)^3 = \\
 X_0(t) U_0(u) + \dots + \\
 X_N(t) U_N(u) = \sum_{i=1}^N X_i(t) U_i(u) \quad (11)
 \end{aligned}$$

借助 chebyshev 正交多项式的递推公式(4)和式

(11),式(9)中左边第四项可整理为

$$\begin{aligned} \delta u \left(\sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(u) \right)^3 = & \\ \left(\sum_{i=0}^N X_i(t) U_i(u) \right) = & \\ \frac{1}{2} \delta \sum_{i=0}^N X_i(t) [U_{i-1}(u) + U_{i+1}(u)] = & \\ \frac{1}{2} \delta \sum_{i=0}^N [X_{i+1}(t) + X_{i-1}(t)] U_i(u) \quad (12) \end{aligned}$$

式(12)中 $U_{-1} = 0, X_{-1} = 0$,把式(11)和式(12)带入式(9),可以得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + d \right) \sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(t) + & \\ \frac{1}{3} c \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^N X_i(t) U_i(t) + & \\ \bar{b} \sum_{i=0}^N X_i(t) U_i(t) + & \\ \frac{1}{2} \delta \sum_{i=0}^N [X_{i+1} + X_{i-1}] U_i(t) = f(t) \quad (13) \end{aligned}$$

在式(13)两边同乘以 $p(u) U_j(u), j = 0, 1, 2, \dots, N$,再关于 u 在 $[-1, 1]$ 上求积分,根据随机变量的概率密度函数为权函数的加权正交性,就可以得到一组关于 $x_j(t)$ 的与原随机系统等价的确定性方程组.

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} \right) x_0(t) + \frac{1}{3} c \frac{d}{dt} X_0(t) + & \\ \bar{b} X_0(t) + \frac{1}{2} \delta X_1(t) = f(t) & \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} \right) x_1(t) + \frac{1}{3} c \frac{d}{dt} X_1(t) + & \\ \bar{b} X_1(t) + \frac{1}{2} \delta [X_2(t) + X_0(t)] = 0 & \quad (14) \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} \right) x_2(t) + \frac{1}{3} c \frac{d}{dt} X_2(t) + & \\ \bar{b} X_2(t) + \frac{1}{2} \delta [X_3(t) + X_1(t)] = 0 & \\ \dots\dots & \end{aligned} \right.$$

由此,随机 Duffing-van der Pol 系统就转化成等价的确定性系统,当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(u)$ 与原系统的 $x(t, u)$ 是等价的,在此,取 $N = 4$.用数值方法求解方程组(14)后,将其解代入式(15),可得原随机系统的近似解.

$$x(t, u) = \sum_{i=0}^4 x_i(t) U_i(u) \quad (15)$$

如果 $u = 0$,则 $b = \bar{b}$,这个样本系统就称作均

值参数系统,其响应可近似的表示为

$$\begin{aligned} x(t, 0) = \sum_{i=0}^4 x_i(t) U_i(0) = & \\ x_0(t) - x_2(t) + x_4(t) \quad (16) \end{aligned}$$

3 系统(6)的分岔研究

系统(6)可写为

$$\dot{x} + (a + cx^2)\dot{x} + (\bar{b} + \delta u)x^3 + dx = f \quad (17)$$

通过正交多项式逼近的方法我们得出与其等价的确定性方程组(14),然后应用数值积分的方法解出方程组(14),就可以研究原随机系统的动态响应问题,最后得到逼近随机响应 $x(t, u)$ 式(15),均值参数系统的样本响应式(16).当 $\delta = 0$ 时,原系统就变成了确定性的非线性系统

$$\dot{x} + (a + cx^2)\dot{x} + \bar{b}x^3 + dx = f \quad (18)$$

在数值模拟时,用均值参数系统的样本响应来验证正交多项式逼近法的正确与否,用均值系统式(18)的确定性响应 $x(t)$ 来验证随机系统是否保持着它的非线性特性,由此来验证正交多项式逼近法的有效性.

令与随机系统等价的确定性系统(14)的初值为

$$\begin{aligned} x(0) = [x_0(0), \dots, x_4(0)] & \\ y(0) = [x_0(0), \dots, x_4(0)] & \end{aligned}$$

确定性非线性系统(18)的初值为 $x_0 = x(0), y_0 = x(0)$.在本文中参数 δ, F 取的较小,因此,确定性方程组(14)和相应确定性系统(18)取相同的初始条件,即 $x_0(0) = x(0), y_0(0) = y(0), x_i(0) = y_i(0) = 0, (i = 1, 2, 3, 4)$.

3.1 系统(6)的对称破裂分岔

随机 Duffing-van der Pol 系统的参数值取为

$$\begin{aligned} a = -0.1, \bar{b} = 1.0, c = 0.1, d = -1, & \\ \delta = 0.01, \omega = 1.5 & \end{aligned}$$

当谐和激励振幅 F 变化时,用正交逼近法作数值模拟,所得如图2.图中 DRM 表示均值系统的确定性响应,SRM 表示均值系统的样本响应,ARR 表示逼近的随机响应.

当 F 取 7.0 时,其周期解都收敛到同一条周期轨道如图 2(a).当 $F = 8.0$ 时,模拟结果显示系统对应不同的初始条件(IC-1), (IC-2),有两个稳态的相互对称的周期 $1T (T = \frac{2\pi}{\omega})$ 相轨出现,如图 2(b)和(c).由图可知,当谐和激励振幅 F 在区间 (7.0, 8.0) 内取值时,系统会发生对称破裂分岔.

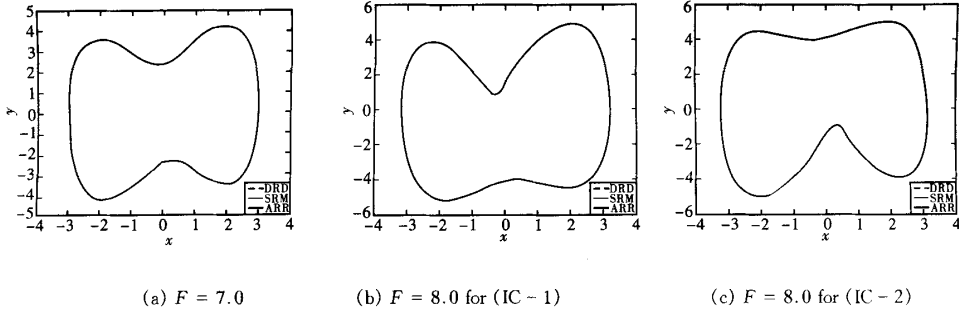


图 2 F 变化时系统的对称破裂分岔相轨图

Fig. 2 Phase portraits of symmetry breaking bifurcation while F varies
 $x(0) = [1.3, 0, 0, 0, 0]$ $x(0) = [4.0, 0, 0, 0, 0]$
 (IC-1); $y(0) = [0.7, 0, 0, 0, 0]$ (IC-2); $y(0) = [1.0, 0, 0, 0, 0]$
 $x_0 = 1.3, y_0 = 0.7$ $x_0 = 4.0, y_0 = 1.0$

3.2 系统(6)的倍周期分岔

随机 Duffing-van der Pol 系统的参数值取为
 $a = -0.1, \bar{b} = 1.0, c = 0.1, d = -1,$
 $\delta = 0.01, \omega = 1.5$

当谐和激励振幅 F 变化时,用正交逼近法作数值模拟,所得如图 3. 图中 DRM 表示均值系统的确定性响应,SRM 表示均值系统的样本响应,ARR 表示逼近的随机响应.

当 F 取 14.0 时,模拟结果显示系统出现了两个互相对称周期 $1T$ 的稳态相轨,其中一个如图

3(a),对应的初始条件为(IC-3).当 F 取 18.8 时,系统出现了两个互相对称周期 $2T$ 的稳态相轨,其中一个如图 3(b),对应的初始条件为(IC-3).当 F 取 19.78 时,模拟结果显示系统出现了两个互相对称周期 $4T$ 的稳态相轨,其中一个如图 3(c),对应的初始条件为(IC-3).

由图 3(a), (b), (c) 可知,当 F 在区间(14.0, 19.78) 内变化时,系统就会出现一系列周期 $1T, 2T, 4T$ 的稳态相轨,亦就是系统发生了倍周期分岔.

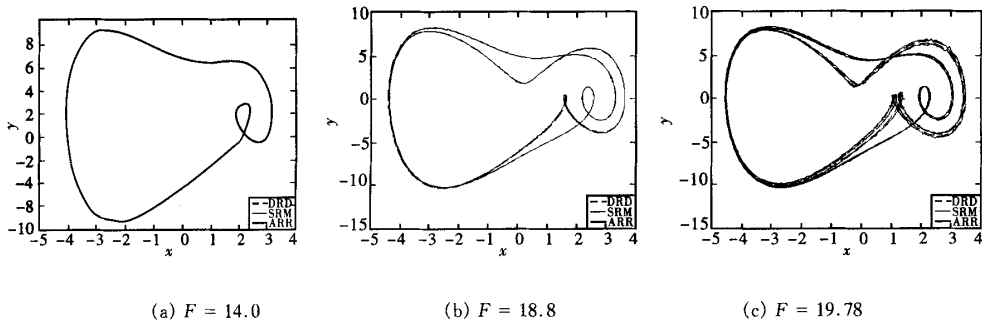


图 3 F 变化时系统的倍周期分岔相轨图

Fig. 3 Phase portraits of period - doubling bifurcation while F varies
 $x(0) = [1.3, 0, 0, 0, 0]$
 (IC-3); $y(0) = [0.3, 0, 0, 0, 0]$
 $x_0 = 1.3, y_0 = 0.3$

4 结论

本文应用 Chebyshev 多项式逼近法把含有随机参数的 Duffing-van der Pol 系统转化成等价的确定性扩阶系统,在此基础上用数值方法求出其响应,分析讨论了谐和激励振幅变化时系统的对称破裂分岔和倍周期分岔.数值模拟结果显示谐和激励振幅 F 由 7.0 增大到 19.78 的过程中,系统也先后

出现了对称破裂分岔和倍周期分岔现象.当 $7 < F < 8$ 时,系统出现对称破裂现象,当 F 在(14, 19.78) 内取值时,系统出现了周期 $1T, 2T, 4T$ 的稳态相轨,形成了倍周期分岔现象.模拟结果的一致性在一定程度上证明了方法的有效性.

由以上的研究工作可见,Chebyshev 多项式逼近法能有效地解决随机 Duffing-van der Pol 的响应问题,是研究非线性随机动力系统响应的一种新途

径.我们可以尝试用这种方法来探究随机 Duffing-van der Pol 系统的其他更丰富动力学行为.

参 考 文 献

- 1 Shinozuka M. Probability modeling of concrete structures. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, 1972, (98):1433~1451
- 2 Shinozuka M. Newman expansion for stochastic finite element analysis. *Journal of the Engineering Mechanics*, 1988, (114):1335~1354
- 3 Liu WK, Besterfield GH, Belytschko P. Variational approach to probabilistic finite elements. *Journal of the Engineering Mechanics*, 1988, (114):2115~2133
- 4 Kleiber M, Hien TD. The stochastic finite element method; basic perturbation technique and computer implementation. New York: Wiley Press, 1992
- 5 Benaroya H, Reliak M. Finite element method in probabilistic structural analysis. *A selective Review Applied Mechanics Review*, 1988, (41):201~213
- 6 Spanos PD, Ghanem RG. Stochastic finite expansion for random media. *J Eng Mech Div ASCE*, 1989, 115(4):1035~1053
- 7 Jense H, Iwan WD. Response of system with uncertain parameters to stochastic excitation. *ASCE Eng Mech*, 1992, 118(10):1012~1025
- 8 李杰. 随机结构系统——分析与建模. 北京: 科学出版社, 1996(Li J. Stochastic Structural System —— Analysis and Modeling. Beijing: Science Press, 1996(in Chinese))
- 9 Li J, Liao S. Response Analysis of Stochastic Parameter Structure under nonstationary random excitation. *Computational Mechanics*, 2001, 21:61~68
- 10 Fang T, Leng XL, Song CQ. Chebyshev polynomial approximation for dynamical response problem of random system. *Journal of sound and vibration*, 2003, 226(198):198~206
- 11 冷小磊. 线性随机系统演变随机响应问题研究及随机 Duffing 系统中分岔与混沌初探. [博士论文]. 西安: 西北工业大学(Leng XL. Study of Evolutionary random response problems of stochastic linear systems and elementary study on bifurcation and chaos of stochastic Duffing system. [Ph D thesis]. Xi'an: Northwest Polytechnical University, 2002(in Chinese))
- 12 Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillation, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields. Berlin: Springer, 1983
- 13 Holmes P, Rand D. Phase portraits and bifurcations of the non-linear oscillator: $\ddot{x} + (\alpha + \gamma x^2)\dot{x} + \beta x + \delta x^3 x = 0$. *Int J Non-lin Mech*, 1980, 15:449~458
- 14 Zhu WQ, Huang ZL, Suzuki Y. Response and stability of strongly non-linear oscillators under wide-band random excitation. *Int J Non-lin Mech*, 2001, 36:1235~1250
- 15 Rong HW, Meng G, Wang XD. Response of a strong non-linear oscillator to narrowband random excitations. *Journal of sound and vibration*, 2003, 266:875~887
- 16 Borwein P, Erdélyi T. Polynomials and Polynomials Inequality. New York: Springer, 1995

THE ORTHOGONAL POLYNOMICAL APPROXIMATION FOR RESPONSE PROBLEM OF STOCHASTIC DUFFING-VAN DER POL SYSTEM*

Ma Shaojuan Xu Wei Lei Youming

(Department of Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract The Chebyshev polynomial approximation was applied to the dynamical response problem of the stochastic Duffing-van der Pol system with random parameters. First, the stochastic Duffing-van der Pol system was reduced into an equivalent deterministic one for substitution. Then, the response of the stochastic Duffing-van der Pol system can be obtained by numerical methods for this equivalent deterministic system. Moreover, the symmetry-breaking bifurcation and period-doubling bifurcation of the stochastic Duffing-van der Pol system were presented while the excitation frequency vary. Numerical simulation implies that the proposed method is a new effective approach to dynamical responses of stochastic nonlinear systems.

Key words Chebyshev polynomial, stochastic Duffing-van der Pol system, symmetry-breaking bifurcation, period-doubling bifurcation

Received 03 July 2004, revised 05 September 2004.

* The project support by the National Natural Science Foundation of China(10032030)