

# 转子通过临界转速时碰摩热效应对振动特性的影响\*

王士敏 陆启韶

(北京航空航天大学理学院,北京 100083)

**摘要** 转子-定子之间的碰撞与摩擦是一个危害性很大的现象,也是十分复杂的物理过程.这一过程消耗的机械能,绝大部分生成热能.尽管每次碰撞与摩擦的热效应对转子影响很小,但是由于热量的散失相对于转子的振动来说是一个较慢的过程,一旦出现较频繁的碰摩,热载荷的累积效应是不容忽视的.转子通过临界转速时,如果振动幅度过大就会导致碰摩.碰撞引起转子振动相位的变化,而碰摩产生的热挠曲将会延长碰摩过程.在建立了转子与定子之间的弹性碰撞接触、摩擦和热传导的简化模型的基础上,应用数值方法分析了转子通过临界转速时上述碰摩过程的一个简单例子.

**关键词** 转子,振动,临界转速,碰摩,热效应

## 引言

转子与定子间的碰撞与摩擦是旋转机械中最具危害性的故障之一,导致碰摩的直接原因是转子振动幅度过大,尤其是通过其临界转速时.影响转子振动的因素很多,其中由于转子质量偏心、安装误差、流固耦合等因素引起的碰摩已有很多研究工作.碰摩的危害不仅是引起转子与定子间的机械磨损,也会影响到转子的振动特性.热冲击使转子受热不均而引起转子热挠曲.尽管每次碰摩产生的热挠曲很小,但是由于热传导过程相对于转子振动较慢,如果热挠曲尚未减小时又出现下一次碰摩,在一些情况下,热挠曲会在转子的一定方向不断加剧,从而引起新的不平衡,进一步又引起更大或更频繁的碰摩.因此,碰摩及其热效应带来影响不容忽视.文献[1,2]对连续摩擦热冲击问题进行了一些研究.

碰摩问题的困难在于碰撞接触以及摩擦的机理尚未完全清楚.众所周知,固体的接触与摩擦问题是机械工程中最复杂且难以建模的过程之一,它主要涉及固体表面的复杂结构、急剧的弹塑性变形、破坏、热以及原子级的相互作用甚至化学作用.润滑学的主要任务之一便是建立摩擦面的基本模型.过去的40年中,关于各种碰撞现象的研究的大量工作主要是从磨损、接触与润滑的角度出发的.

转子与定子间的相对法向速度较切向速度小,且它们之间的碰撞是斜碰撞. Maw 等研究了两个弹性球之间的斜碰撞<sup>[3]</sup>,应用 Hertz 接触理论得到

接触区域的正应力.文献[3~6]对含摩擦的斜碰撞问题进行了研究.上述理论分析与实验研究的工况和转子与定子间的碰摩情况仍有一些差别,因此本文对转子与定子之间的碰摩过程的力学模型进行了一定的简化.

转子通过临界频率时,由于非平衡惯性力,其振动幅度远大于稳态振幅.容易导致与定子之间的碰摩.参照已有的理论与实验研究,在弹性碰撞接触、摩擦和热传导的简化模型基础上,建立转子与定子之间考虑摩擦热冲击的作用的碰撞接触过程的模型,研究了转子通过临界转速时,碰摩及其热效应对其振动特性的影响,并应用数值方法分析了一个简单的算例.

## 1 碰撞接触模型

由于切向力不影响法向运动,若不考虑碰撞过程中产生的弹性波,在碰撞过程中转子的法向运动可表示为

$$m\ddot{\delta} + c\dot{\delta} = P \quad (1)$$

其中  $m$  为转子系统的等效质量;  $\delta$  为转子与定子碰撞接触过程中相对弹性位移;  $c$  为转子材料的粘滞阻尼系数,它描述碰撞过程的能量损耗;  $P$  为碰撞过程的法向接触力.

按照 Hertz 接触理论,对于同曲圆柱接触,即接触物体的表面的弯曲方向相同<sup>[7]</sup>时,接触物体之间的相对弹性位移为

$$\delta = b^2 \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \quad (2)$$

2004-03-05 收到第1稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(10172011)

其中  $R_1, R_2$  分别为定子和转子上圆盘的半径;  $b$  为接触部分的弦长, 它与法向接触力  $P$  的关系是

$$b = 1.52 \left[ \frac{P}{BE} \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \right) \right]^{1/2} \quad (3)$$

$B$  为接触部分的轴向长度;  $E$  为弹性模量. 由式(2)和式(3)可得

$$P = K\delta \quad (4)$$

其中  $K = BE/1.52^2$  为接触刚度.

将式(4)代入方程(1)可得

$$m\ddot{\delta} + c\dot{\delta} = K\delta \quad (5)$$

因此在碰撞过程中, 转子与定子间的法向运动可看作是一个线性弹性振子, 如图1所示.

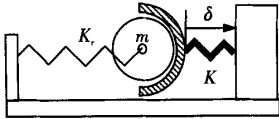


图1 碰撞过程的等效模型  
Fig.1 A simplified model in the collision process

图中  $K_c$  表示转子振动的弹簧刚度. 在碰撞过程的压缩阶段, 弹性位移  $\delta$  由0变到最大, 其初始变形速度为转子在碰撞前振幅增加的速度. 即式(5)的初始条件为

$$\delta_0 = 0, \dot{\delta}_0 = \rho_{\rho < c_r} \quad (6)$$

其中  $\rho$  和  $\rho_c$  分别为转子的振幅和振幅的变化率,  $c_r = R_1 - R_2$  为转盘与定子间的平均间隙.  $\rho_{\rho < c_r}$  表示当振幅增加到转子-定子间隙之后, 将要发生碰撞时转子和定子的相对法向速度. 在压缩阶段, 转子振动的动能一部分转化为弹性势能, 另一部分由粘滞阻力消耗

$$w_1 = \int_0^{\delta_{\max}} c\dot{\delta} d\delta \quad (7)$$

在碰撞变形恢复阶段粘滞阻力所作的功也可近似地由上式给出. 此模型用于计算出碰撞过程所需要的时间、转子振动相位在碰撞前后的变化, 以及接触力  $P$ .

碰摩过程的摩擦力  $F$  则由简单的库伦摩擦定律给出

$$F = fP \quad (8)$$

而接触的时间近似为  $t_c = 2\pi/\omega$ , 其中  $\omega^2 = K/m$ . 由于碰撞刚度远远大于转子振动的等效弹簧刚度, 碰撞的影响使得转子振动的相位提前.

接触过程摩擦力的功为

$$w_2 = F \cdot (\dot{\varphi} R_2 + \dot{\psi} \rho) \cdot t_c =$$

$$fP \cdot (\dot{\varphi} R_2 + \dot{\psi} \rho) \cdot 2\pi/\omega \quad (9)$$

其中  $\dot{\varphi}$  和  $\dot{\psi}$  分别为转子自转与涡动的角速度,  $R_2$  为转盘的半径.

## 2 碰摩产生的热弯曲

### 2.1 碰摩处的温度分布及热弯曲

转子与定子碰摩过程产生的热包括两部分: 碰撞产生的热  $2w_1$  和摩擦产生的热  $w_2$ . 其热流密度为

$$q = (2w_1 + w_2)/Bb \quad (10)$$

这里忽略温度沿转盘轴向的变化. 由热传导理论, 转盘横截面上的非稳态热传导方程为

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (11)$$

初始条件为

$$T_{t=0} = T_0(r, \theta) \quad (12)$$

不计及对流换热, 边界条件为

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_2} = q(\theta_c, t) \quad (13)$$

其中  $T(r, \theta, t)$  为在时刻  $t$  转盘横截面上的温度分布,  $\alpha = \lambda/\beta c_p$ ,  $\lambda, \beta, c_p$  分别为导热系数、密度和比热.  $q(\theta_c, t) = (2w_1 + w_2)/Bb$  为热流密度,  $\theta_c$  为转盘上发生碰摩的位置. 由于这里主要关心转子受热不均匀而出现的热弯曲, 下面导出温度分布与热弯曲的关系. 假设转轴为简支 Euler 梁, 受热后转轴的轴向正热应力为

$$\sigma = \chi_T E T(r, \theta, t) \quad (14)$$

其中  $\chi_T$  为热膨胀系数.

截面上温度分布不均匀将在该截面产生弯矩<sup>[1,2]</sup>

$$\begin{aligned} M_x &= \chi_T \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R_2} E T r^2 \cos\theta dr, \\ M_y &= \chi_T \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R_2} E T r^2 \sin\theta dr \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $R_3$  为转轴的半径,  $x, y$  为转轴横截面上两个正交的随体坐标轴;  $M_x$  和  $M_y$  分别为热应力对  $x$  和  $y$  之矩. 应用 Castigliano 定理<sup>[1,8]</sup> 以及关系式(15)可以得到转子截面随体坐标下, 热弯曲表达式为

$$\begin{aligned} \rho_T(l, t) e^{i\psi} &= \frac{\chi_T L}{I} \int_0^L \left( \frac{l+z}{2L} - \frac{l-z}{L^2} \right) \times \\ &\quad \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R_3} T e^{i\theta} r^2 dr \right] dz \end{aligned} \quad (16)$$

为了方便起见, 其中将  $x, y$  两个方向的挠曲变形用复数的形式表示.  $L$  是转轴的总长度,  $\rho_T(l, t)$  表

示转轴在距离其左端点  $l$  处的挠度.  $\psi$  为挠曲面与  $xoz$  面的夹角.  $I$  为转轴的抗弯截面模量;  $x$  为积分变量, 从 0 变化到  $L$ . 考虑到碰摩点附近很小范围内温度的急剧变化, 假设转轴上温度分布如下: 在转盘的安装部位为  $T(r, \theta, t)$ , 其它各处均为 0. 转子的热挠曲可近似表示为二次曲线形式

$$\rho_T(l, t)e^{j\psi} = \frac{4\chi_T L}{\pi R_3} \left( \frac{l + l_d - |l - l_d|}{2L} - \frac{ll_d}{L^2} \right) \tilde{T}_1, \quad \tilde{T}_1 = \int_0^L \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R_3} T e^{j\theta} \frac{r^2 dr}{R_3^3} \right] dx \quad (17)$$

$l_d$  为转盘到转轴左端点的距离. 即热挠曲在转轴的两端为 0, 在碰摩点处最大.

温度分布  $T$  可由热传导方程(11)、初始条件(12)以及边界条件(13)通过差分方法或用 MATLAB 数值求出. 其中每次碰摩的初始条件(12)为该次碰摩前在转轴碰摩截面上的温度分布. 碰摩产生的热挠曲可由方程(17)近似求出.

### 2.2 两次碰摩期间转子热弯曲的变化

由方程(14)可看出热弯曲随时间的变化取决于温度分布随时间的变化. 为了找出这一规律, 首先要求出转盘的温度分布  $\tilde{T}$ , 它与式(14)的形式相同, 交换右端的积分次序后为

$$\tilde{T} = \int_0^{R_2} \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L T e^{j\theta} dz \right] \frac{r^2 dr}{R_2^3} \quad (18)$$

并令

$$\hat{T}(r, t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L T e^{j\theta} dz \quad (19)$$

方程(19)反映的是在碰摩处的温度径向分布随时间的变化情况. 考虑到方程(11), 并对(19)式求时间偏导数, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{T}(r, t)}{\partial t} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) e^{j\theta} dz = \\ &\alpha \left( \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{T}}{\partial r} + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} e^{j\theta} dz \right) \quad (20) \end{aligned}$$

利用下面的分部积分计算

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} &= e^{j\theta} d\theta = e^{j\theta} \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_0^{2\pi} - j e^{j\theta} T \Big|_0^{2\pi} - \\ &\int_0^{2\pi} e^{j\theta} T d\theta = - \int_0^{2\pi} e^{j\theta} \varphi T d\theta \end{aligned}$$

并令  $l = z/L, \tau = \Omega t, r = R_2 \bar{r}$ , 将方程(20)改写为无量纲形式

$$\frac{\partial \hat{T}(\bar{r}, \tau)}{\partial \tau} = \epsilon \left( \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \bar{r}} - \frac{\hat{T}}{\bar{r}^2} \right) \quad (21)$$

其中  $\epsilon = \alpha/\Omega R^2$ . 为了简便起见, 这里仍然用  $\hat{T}$  表示其相应的无量纲量  $\tilde{T}$ .

由式(18)和式(19)可得

$$\tilde{T} = \int_0^1 \hat{T}(\bar{r}, \tau) \bar{r}^2 d\bar{r} \quad (22)$$

将式(22)对时间求导, 并利用式(20)得

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{T}}{d\tau} &= \int_0^1 \frac{\partial \hat{T}(\bar{r}, \tau)}{\partial \tau} \bar{r}^2 d\bar{r} = \\ &\int_0^1 \epsilon \left[ \frac{\partial(\bar{r}^2 \frac{\partial \hat{T}}{\partial \bar{r}})}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial(\bar{r} \hat{T})}{\partial \bar{r}} \right] d\bar{r} = \\ &\epsilon \left( \frac{\partial \hat{T}}{\partial \bar{r}} - \hat{T} \right) \Big|_{\bar{r}=1} \quad (23) \end{aligned}$$

利用边界条件(13)有

$$\frac{d\tilde{T}}{d\tau} = \epsilon q(\theta_c, t) - \epsilon \hat{T} \Big|_{\bar{r}=1} \quad (24)$$

由于热传导是一个相对较慢的过程, 即  $\epsilon = \frac{\alpha}{\Omega R^2} \ll$

1, 因此  $\frac{d\tilde{T}}{d\tau}$  变化非常缓慢. 由式(22)可以看出,  $\hat{T}(\bar{r}, \tau)$  亦相应地随时间缓慢变化. 若近似地认为其与时间无关, 式(21)的右端等于 0, 由此可以估计出温度沿转轴径向的变化为:  $\hat{T} \approx \bar{r}(\hat{T} \Big|_{\bar{r}=1})$ , 即温度沿径向线性地变化. 代入式(15)可得

$$\hat{T} \Big|_{\bar{r}=1} \approx 4\tilde{T} \quad (25)$$

通过  $\tilde{T}$  可以求出  $\tilde{T}_1$ , 再由式(16)可得到热弯曲随时间的变化规律

$$\rho_T(l, t)e^{j\psi} = \frac{4\chi_T L}{\pi R} \left( \frac{l + l_d - |l - l_d|}{2L} - \frac{ll_d}{L^2} \right) \tilde{T}_1 \quad (26)$$

### 3 碰摩及其热挠曲对转子振动特性的影响

对于转轴来说, 其热挠曲取决于碰摩处的径向和周向的温度分布. 它与碰摩频率和碰摩点的位置有关, 碰摩点的分布越是集中, 引起的热挠曲也就越大. 最坏的工况是碰摩频繁且碰摩点又非常集中. 在转子通过临界转速时, 由于转子的转动与涡动频率接近, 容易遇到这种不利工况. 下面首先建立转子的动力学方程, 并在方程中考虑了碰摩引起的热挠曲.

3.1 转子振动方程

图2所示为单盘转子-定子系统.转子的圆盘质量为  $m$ , 质量偏心距为  $e$ ; 圆盘处等效刚度为

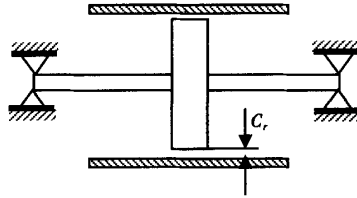


图2 转子振动模型  
Fig.2 A model of rotor vibration

设转子中心的位移为  $\rho$ , 相位角为  $\psi$ ;  $n$  次碰摩后总的热弯曲为  $\rho_n$ , 相对相位角为  $\theta_n$ ; 转子旋转的角度为  $\phi$ . 则转子在两次碰摩之间的动力学方程为

$$m\ddot{\rho} + c\dot{\rho} - m\dot{\psi}^2\rho + K_r[\rho - \rho_n \cos(\phi - \dot{\psi} + \theta_n)] - me\dot{\phi}^2 \cos(\psi - \phi) = 0$$

$$m\rho^2\ddot{\psi} + c\rho\dot{\psi} - 2\rho\dot{\psi}\dot{\rho} - K_r\rho\rho_n \sin(\phi - \psi + \theta_n) + me\dot{\phi}^2 \sin(\psi - \phi) = 0 \quad (27)$$

3.2 转子通过临界频率时的幅频与相频特性

偏心质量转子通过临界频率时,在非平衡惯性力的作用下,其振幅随着转速的增加而不断增加,直至达到最大振幅,如图3所示.最大振幅以及达到最大振幅时的转速,取决于转速的增加率,即转子的角加速度.角加速度越大,最大振幅越小,出现最大振幅时的转速越高.

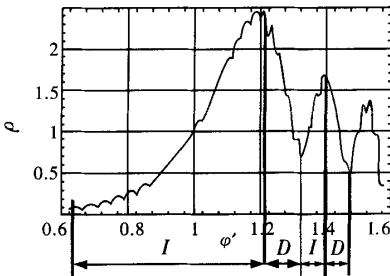
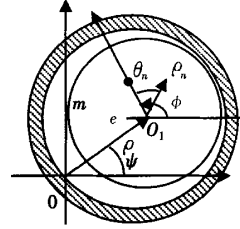


图3 无碰撞时,非平衡转子通过临界转速时的幅频曲线  
Fig.3 The amplitude - frequency curve for unbalance rotor passing through the critical speed

当不发生碰撞通过临界转速时,转子涡动速度的相位与非平衡惯性力的相位之差  $\beta^*$  如图4所示  $|\beta^*| < \frac{\pi}{2}$ , 此时惯性力做正功  $dW = F_n \cdot V dt = F_n V \cos\beta^* > 0$ , 使得振幅不断增加.且随着转速的

$K_r$ ; 转轴长为  $L$ , 半径为  $R_3$ . 为了便于分析,在动力学方程中不计转轴质量,并假设圆盘安装在转轴中央;转子与定子材料的弹性模量均为  $E$ .



增加,  $\beta^*$  由  $\frac{\pi}{2}$  不断减小,当减小到  $-\frac{\pi}{2}$  时,振幅达到最大振幅.此后惯性力开始做负功,振幅开始减小.此相位差随着转速增加而变化的仿真结果如图5所示.更详细的关系在我们前面的工作中进行了研究<sup>[9]</sup>,这里不作深入讨论.根据转子上述振动特性,发生碰撞时,转盘上的碰摩点将沿转盘边缘顺时针逐渐移动,且分布在夹角  $\theta_c < \pi$  的范围内.同时,碰撞使得振动相位不断前移.

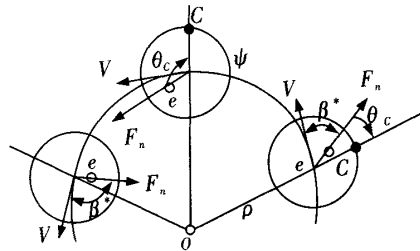


图4 转子惯性力与涡动速度的相位差,以及碰摩点的分布  
Fig.4 The phase difference between the inertia force and the whirling velocity of rotor, with the collision positions against stator.

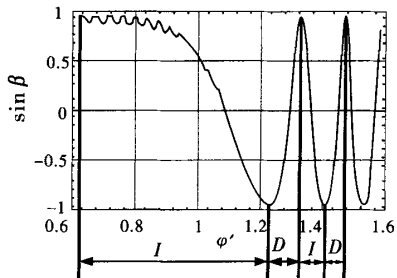


图5 有碰撞时,非平衡转子通过临界转速时的相频曲线  
Fig.5 The phase-frequency curve for unbalance rotor passing through the critical speed

### 3.3 热挠曲对通过临界转速的影响

每发生一次碰摩,即当  $\rho > c_r$  时,首先由  $\delta_0 = \rho$  作为初始条件,通过方程(5)解出接触力以及接触时间,并由式(6)~式(14)求出转子的热挠曲.然后按式(20)求出下一次碰摩前转子挠曲的变化规律.最后由方程(22)解出相继的碰摩位置及时间,并重复上述过程.

在下面的算例将热冲击和不计热冲击两种情况进行了比较.计算中选择参数如下: $\alpha = 1.17 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\lambda = 45 \text{ W/m} \cdot \text{C}$ ,  $\beta = 7833 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_p = 465 \text{ J/kg} \cdot \text{C}$ ,  $\chi_T = 1.2 \times 10^{-5} \text{ m/m} \cdot \text{C}$ ,  $L = 2.5 \text{ m}$ ,  $B = 0.1 \text{ m}$ ,  $R_1 = 0.38 \text{ m}$ ,  $R_2 = 0.3795 \text{ m}$ ,  $R_3 = 0.08 \text{ m}$ ,  $R_4 = 0.0795 \text{ m}$ ,  $m = 450 \text{ kg}$ ,  $e = 0.0008 \text{ m}$ ,  $K_r = 25 \times 10^6 \text{ N/m}$ .

图6所示曲线为不考虑热效应且转子通过其临界转速时,由于碰摩引起的转子振动幅度变化的时间历程.当激励频率在转子自然频率的0.9~1.15倍之间时,碰摩发生.与无碰摩情况(见图3)比较,此时振幅变化趋于平缓,这是由于非完全弹性碰撞过程消耗了部分振动能量.

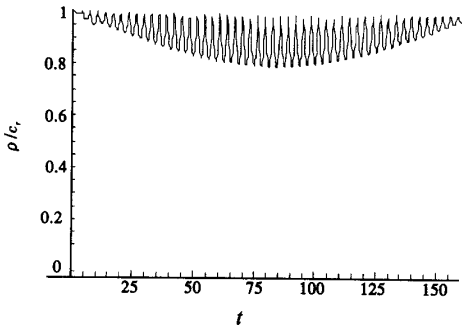


图6 未考虑热效应时,碰摩转子振动幅度的时间历程  
Fig.6 The rub-impact amplitude histogram of rotor without thermal effect

图7所示曲线为考虑热效应时的情形,转子与定子之间发生碰摩的次数增加,碰摩出现在转子自然频率的0.9~1.18倍之间.在转子通过临界转速时,转子每旋转一周,转轴也涡动一周.这样,转子上的碰摩点总是出现固定的局部范围内.转轴在不对称的热载荷作用下,热挠曲朝着一个固定的方向不断加剧.其结果是使得转子与定子之间的间隙减小,非平衡惯性力也随之增加,从而上述耦合作用使得碰摩历程增加.因此,转子通过临界转速时,碰摩热效应产生的转轴热挠曲,将加重碰撞程度和增加碰撞次数.

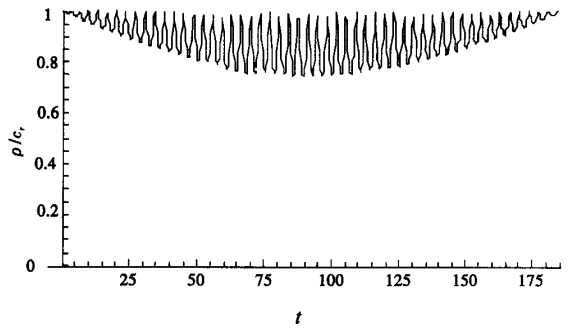


图7 考虑热效应时,碰摩转子振动幅度的时间历程  
Fig.7 The rub-impact amplitude histogram of rotor with thermal effect

上面研究的是在转子通过临界转速时,碰摩的热效应对振动特性的影响.当转子在稳态振动时,碰摩的热效应会引起更为复杂动力学现象,我们将另文讨论.

### 参 考 文 献

- 1 Goldman P, Muszynska A. Rotor-to-stator, rub-related, thermal/mechanical effects in rotating machinery. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1995, 9(5): 1579~1601
- 2 杨建刚,黄葆华,高伟.摩擦热冲击问题的建模、仿真与振动特性分析.中国电机工程学报,1999,19(6):25~31(Yang Jiangan, Huang Baohua, Gao Wei. Modeling, simulating and analyzing of frictional thermal impact. *Proceedings of the Chinese Society for Electrical Engineering*, 1999, 19(6): 25~31(in Chinese))
- 3 Branch RM. Friction, restitution, and energy loss in planar collisions. *ASME J Applied Mechanics*, 1984, 51: 164~170
- 4 Keller JB. Impact with friction. *J Applied Mechanics*, 1986, 1(53): 1~4
- 5 Nobra JP, Dias AM, Gras R. A study on elasto-plastic impact friction. *Wear*, 1999, 230: 133~145
- 6 Tworzydło WW, Cecot W, Oden JT, Yew CH. Computational micro- and macroscopic models of contact and friction: formulation, approach and applications. *Wear*, 1998, 220: 113~140
- 7 Johnson KL. *Contact Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985
- 8 Nowinski JL. *Theory of Thermoelasticity with Applications*. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1978
- 9 Wang SM, Lu QS, Twizell EH. Reducing lateral vibrations of a rotor passing through critical speeds by phase modulating. *ASME J of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2003, 125: 615~620

## THE EFFECT OF RUB-IMPACT THERMAL EFFECTS ON VIBRATION CHARACTERISTICS OF A ROTOR PASSING THROUGH CRITICAL SPEED\*

Wang Shimin Lu Qishao

(*Science School, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China*)

**Abstract** The collision and friction between rotor and stator is a complex physics process, in which most of the mechanical energy caused by collision and friction is converted into heat. Even though each collision does not affect the rotor significantly, and the decreasing of temperature takes a longer time compared with the vibration period of rotor, the accumulated thermal effects must be taken into account. When the rotor passes through the critical speed, rub-impacts are liable to happen because of the larger vibration amplitude. Collisions cause the variation of vibration phase, and the corresponding thermal bending prolongs the process of collisions. In this paper, a simplified model was set up to describe the elastic collision contact and friction between rotor and stator, and then an example was numerically computed and analyzed in order to examine the effect of rub-impact thermal effects on the vibration characteristics of a rotor passing the critical speed.

**Key words** rotor, vibration, critical speed, rub-impact, thermal effect