

# Bonhoeffer-van der Pol 方程的混沌控制

梁建术 陈予恕

(1. 河北科技大学机械电子工程学院, 石家庄 050054) (2. 天津大学机械工程学院, 天津 300072)

**摘要** 基于延时反馈混沌控制方法和相空间压缩法, 提出了一种改进的延时控制方法, 即: 将空间压缩作为系统状态变量的一种约束施加到延时反馈混沌控制中. 以 Bonhoeffer-van der Pol 系统为例, 数值验证了此改进方法的有效性. 结果表明: 对于具有单个吸引子的混沌系统, 此方法可以将混沌系统很快控制到一个期望的周期轨道上, 与原始的延时反馈方法相比减少了恢复时间. 对于具有多个混沌吸引子的系统, 通过增加适当的相空间限制器, 可以快捷地将系统稳定在嵌入于不同混沌吸引子中的期望周期轨道上.

**关键词** 延时自反馈, 混沌控制, 限制器, 吸引子

## 引言

Bonhoeffer-van der Pol (BVP) 振子是一个重要的生物、机械动力系统. 在不同的系统参数下, 系统会表现出不同的动力学行为, 如倍周期分岔导致混沌运动<sup>[1]</sup>, 锁相和 Devil's 阶梯<sup>[2]</sup>, 以及间歇行为和马蹄型混沌<sup>[3]</sup>. 在混沌控制方面, Rajasekar<sup>[4,5]</sup> 应用不同的方法研究了该系统的周期轨道的控制, 给出了控制结果以及增益系数与恢复时间的关系, 并对结果进行了比较. 结果表明, Pyragas 方法与其它方法相比较, 能够有效地将系统稳定在期望的周期轨道上.

值得注意的是, 当系统参数在某一范围内时, BVP 系统具有双混沌吸引子. Rajasekar<sup>[5]</sup> 应用 Pyragas 方法研究了这种情况下的混沌控制. 即在零初始条件下, 在 50 倍周期或 250 倍周期时刻对系统施加反馈控制策略, 可以将系统分别稳定在不同吸引子中的期望周期轨道上 (周期 1). 此结果仅仅说明了在适当的时刻施加反馈控制可以将混沌系统稳定在不同吸引子中的周期轨道上.

对于具有多个吸引子的系统, 由混沌吸引子的遍历性可知, 在不同的初始条件、不同的施加控制时间情况下, 控制结果可能是不一样的. 因此应用 Pyragas 延时反馈控制方法不能够处理多吸引子混沌系统中的确定性混沌控制问题.

在本文中, 以 BVP 系统为研究对象, 根据文献 [6] 提出的相空间限制器的方法, 结合 Pyragas 的延时反馈控制方法<sup>[7]</sup>, 提出了一种改进的延时反馈控制方法, 该方法与原始的延时反馈方法相比能够

在较短的时间内将系统稳定在期望的轨道上, 另外该方法也可以解决多吸引子系统混沌控制问题, 能够将系统稳定在嵌入于不同混沌吸引子内的期望周期轨道上.

## 1 延时控制方法的改进

对于  $n$  维动力学系统, 如果在一定参数空间内其动力学行为表现为混沌, 则系统解  $X$  的轨线在相空间中表现为奇怪吸引子. 由奇怪吸引子的特性可知, 解的轨线将被限制在一个有界的空间  $V$  内, 若选取一个非空子集  $W$ , 有  $W \subset V$ , 将动力系统的解限制在空间  $W$  内, 则对于某个系统变量  $x_i \in X$ , 可按下列公式对其轨道的演化进行控制.

$$x_i = \begin{cases} x_{i\max}, & x_i \geq x_{i\max} \\ x_i, & x_{i\min} < x_i < x_{i\max} \\ x_{i\min}, & x_i \leq x_{i\min} \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x_{i\max}, x_{i\min} \in W$ .

该方法称之为相空间压缩法<sup>[6]</sup>, 方程(1)为相空间限制器. 该方法实质上是限制了其相轨道在空间中的自由伸缩和扩张. 众所周知, 具有正的 Lyapunov 指数是非线性系统具有混沌或超混沌解的本质特征, 而正的 Lyapunov 指数值反映了非线性系统的轨道在某个方向或环面上产生的发散或扩张. 对非线性系统解的轨道演化空间作限制, 限制其自由发散或扩张, 就可能影响正的 Lyapunov 指数值, 若该值由正值转变为负值, 则非线性系统将由混沌或超混沌态转变为周期态或概周期态.

梁建术<sup>[8,9]</sup> 基于 Pyragas 延时反馈控制思想和相空间压缩方法的原理,提出了一种缩短控制时间、改进控制质量的延时控制方法.其主要思想为把空间压缩作为状态变量的一种约束施加到 Pyragas 的控制回路中,这样可以大大地减少了控制时间.图 1 为改进 Pyragas 控制方法的控制框图,即混沌系统产生的可测量信号,首先由限制器(公式(1)) 来对混沌信号进行约束限制,然后再通过延时反馈对混沌系统进行反馈控制.

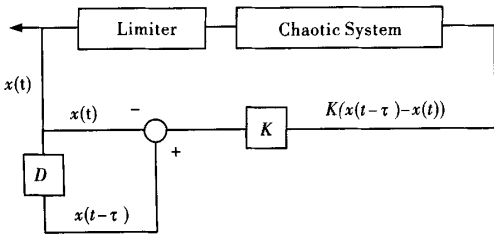


图 1 改进延时反馈控制方法的框图  
Fig. 1 Block diagram of the improved method

## 2 BVP 系统的混沌控制

### 2.1 单吸引子混沌系统的控制

BVP 系统<sup>[4]</sup> 为

$$\dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y + A_0 + A_1 \cos \omega t \quad (2)$$

$$\dot{y} = c(x + a - by) \quad (3)$$

当系统参数  $a = 0.7, b = 0.8, c = 0.1, A = 0.74, A_0 = 0.0, \omega = 1.0$  时,系统呈现混沌特征.相图和混沌吸引子如图 2 所示.

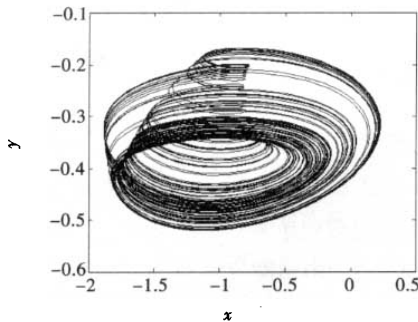


图 2 相图  
Fig. 2 The space diagram

在控制过程中,如果变量  $X, Y$  均作为可测系统变量,那么延时反馈信号或者反馈摄动力可分别

写为

$$F(t) = K(x(t - \tau) - x(t)) \quad (4)$$

或

$$F(t) = K(y(t - \tau) - y(t)) \quad (5)$$

其中  $K$  为控制增益系数,  $\tau$  为延时时间.对于自治系统,  $\tau$  等于期望周期轨道的周期,对于非自治系统,  $\tau$  等于系统外激励项的周期.

若将延时反馈摄动力作用于方程(2),那么受控的 BVP 系统可写成

$$\dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y + A_0 + A_1 \cos \omega t + F(t) \quad (6)$$

$$\dot{y} = c(x + a - by) \quad (7)$$

$$x_i = \begin{cases} x_{i\max}, & x_i \geq x_{i\max} \\ x_i, & x_{i\min} < x_i < x_{i\max} \\ x_{i\min}, & x_i \leq x_{i\min} \end{cases} \quad (8)$$

其中  $x_i = x, y, x_{i\max}, x_{i\min} \in W, F(t)$  为方程(4)或(5) 给出的形式.

选取相空间限制器  $W$  为

$$W = \{(x, y) \mid x \in [-1.8, -0.2], y \in [-0.48, -0.32]\} \quad (9)$$

在控制过程中初始条件为  $(x, y) = (0, 0)$ ,施加控制的时间均为  $t = 50.0$  s,采用四阶龙格-库塔方法进行数值计算,积分步长为 0.02(在以下控制过程中初始条件,积分步长均为相同).控制结果分别如图 3 所示.由控制结果可以看出,在不增加相空间限制器时,恢复时间分别为 133.68, 203.98.而当增加了相空间限制器后,恢复时间为 89.68, 90.88.所以,增加了限制器可以大大减少控制时间,使混沌系统很快的被稳定在一个期望的周期轨道上.该方法在实际应用时易于操作简便.值得注意的是在选择限制器时,要考虑到混沌吸引子的一些性质,例如低周期(或者简单)的不稳定周期轨道一般处在吸引子的深处,而高周期(或者复杂)的不稳定轨道距离吸引子的边界较近.也就是说,当控制复杂周期轨道时,不能把限制选择得太小,否则就达不到期望的控制效果.

### 2.2 双吸引子的混沌控制

当系统参数为  $a = 0.0, b = 0.5, c = 0.2, A = 0.31, A_0 = 0.0, \omega = 1.0$  时,系统出现两个混沌吸引子,如图 4 所示.为了下面叙述方便,相图中下面的混沌吸引子记作吸引子 1,上面的记作吸引子 2.在这两个吸引子中均存在着不稳定的周期 1

轨道<sup>[7]</sup>.

对于此系统,若欲将系统稳定到吸引子1嵌入的周期轨道上,那么约束相空间范围  $W$  属于混沌吸引子1的有界相空间  $V_1$  内,即  $W \subset V_1$ .同理,

欲将系统稳定到吸引子2中嵌入的周期轨道上,有  $W \subset V_2$ .

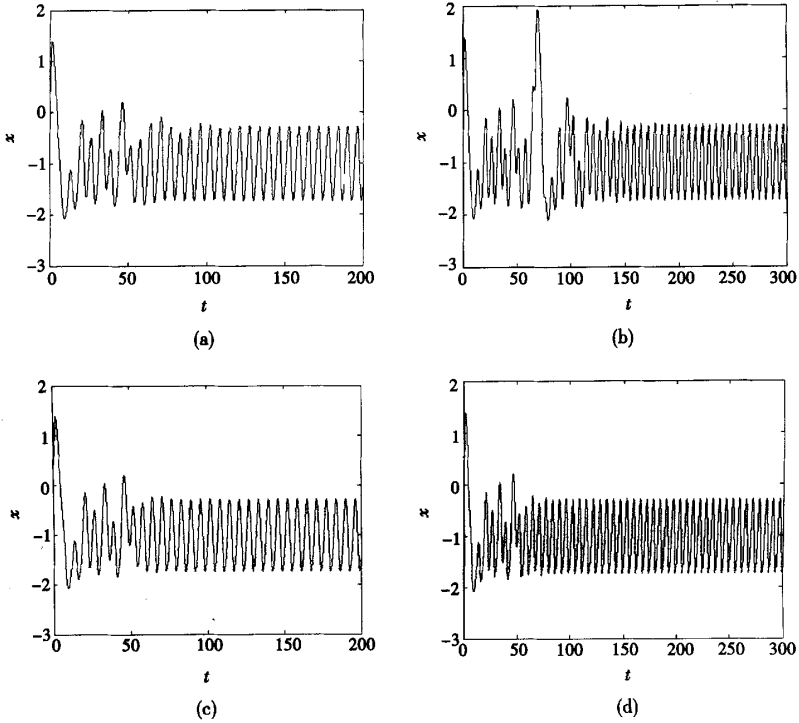


图3 周期1轨道控制结果

(a),(b)应用Pyragas控制策略, $x,y$ 分别为可测状态变量.  
(c),(d)应用改进控制方法, $x,y$ 分别为可测状态变量.

Fig.3 The results of stabilizing the period-1

(a),(b) By Pyragas's scheme,  $x, y$  is the accessible state variable of BVP equation, respectively.  
(c),(d) By the improved method,  $x, y$  is the accessible state variable of BVP equation, respectively.

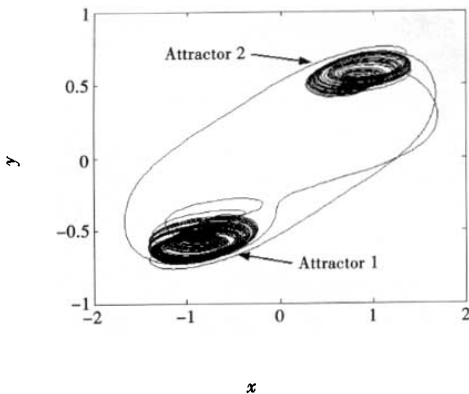


图4 相图

Fig.4 The space diagram

### 2.2.1 嵌入于混沌吸引子1内期望轨道的控制

如果将系统稳定在吸引子1所嵌入的周期1轨道上,选取相空间限制器  $W$  为

$$W = \{(x, y) \mid x \in [-1.274, -0.225], y \in [-0.657, -0.369]\} \quad (10)$$

控制结果分别如图5所示.从图5中可以看出,无论增加相空间限制器与否,系统总是稳定在吸引子1中所嵌入的周期1轨道上.但增加相空间限制器,能够在相对较短的时间内稳定系统于期望的周期轨道上.

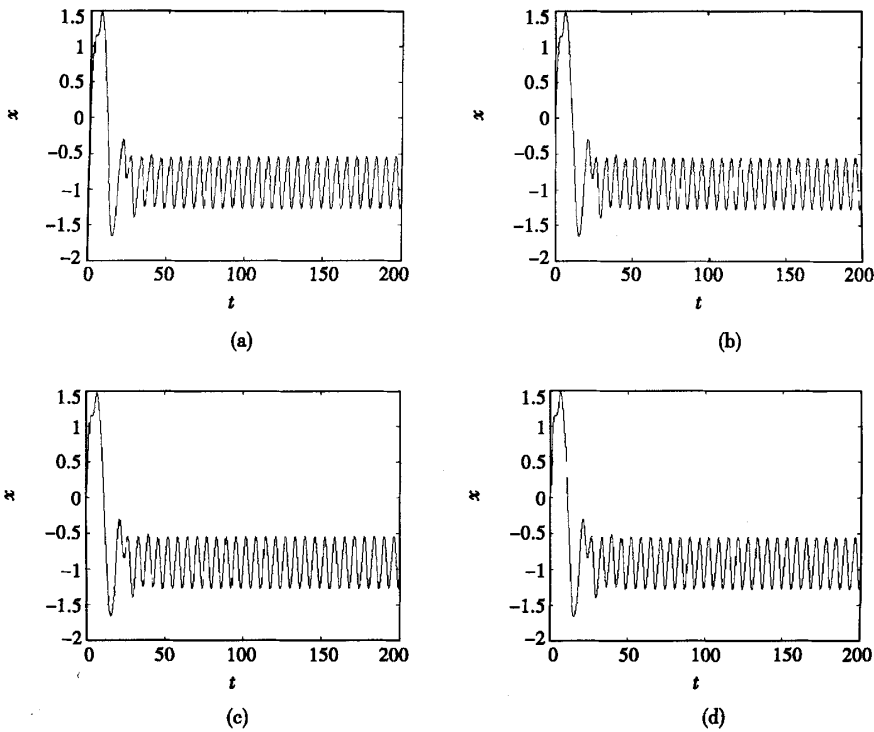


图 5 嵌入于吸引子 1 的周期 1 轨道控制结果

(a),(b) 应用 Pyragas 控制策略,  $x, y$  分别为可测状态变量.

(c),(d) 应用改进控制方法,  $x, y$  分别为可测状态变量.

Fig.5 The results of stabilizing the period-1 embedded in attractor-1

(a), (b) By Pyragas's scheme,  $x, y$  is the accessible state variable of BVP equation, respectively.

(c), (d) By the improved method,  $x, y$  is the accessible state variable of BVP equation, respectively.

### 2.2.2 嵌入于混沌吸引子 2 内期望轨道的控制

若将系统稳定在吸引子 2 所嵌入的周期 1 轨道上,那么选取相空间限制器  $W$  为

$$W = \{(x, y) \mid x \in [-0.234, -1.340], y \in [-0.375, -0.684]\} \quad (11)$$

控制结果如图 6 所示.当不施加限制器时,系统会稳定到(不期望的)吸引子 1 内的周期轨道上;而增加限制器后,系统会稳定到吸引子 2 内的(期望)周期轨道上.

由控制结果可以看出,在 Pyragas 的延时反馈方法回路中,增加适当的相空间限制器可以非常有效地将具有双吸引子的混沌系统稳定在期望的周

期轨道上.

## 3 结论

本文根据相空间压缩方法,在 Pyragas 的延时反馈控制方法中增加相空间限制器,改善了混沌控制的效果.对于具有单个混沌吸引子的系统而言,这种改建方法可以减少恢复时间;对于具有双混沌吸引子的系统,可将系统稳定到嵌入在不同吸引子内的期望周期轨道上.解决了在双吸引子混沌系统控制中,必须选取适当的施加控制时间才能达到理想的控制效果这一缺点.

另外,该改进方法可以进一步推广到具有多个混沌吸引子系统的混沌控制.

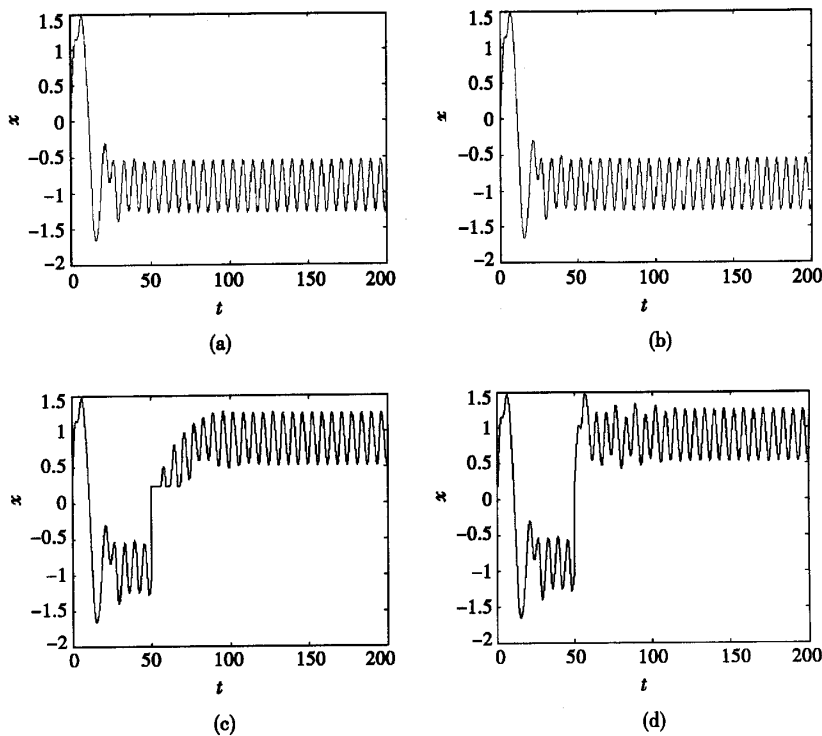


图6 嵌入于吸引子2的周期1轨道控制结果

(a),(b)应用Pyragas控制策略, $x,y$ 分别为可测状态变量.

(c),(d)应用改进控制方法, $x,y$ 分别为可测状态变量.

Fig. 6 The results of stabilizing the period-1 embedded in attractor-2

(a),(b) By Pyragas's scheme,  $x, y$  is the accessible state variable of BVP equation, respectively.

(c),(d) By the improved method,  $x, y$  is the accessible state variable of BVP equation, respectively.

## 参 考 文 献

- Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *PhysLett A*, 1992, 170: 421~428
- 罗晓曙. 利用相空间压缩实现混沌和超混沌控制. 物理学报, 1999, 48(3): 402~407 (Luo Xiaoshu. Using phase space compression to control chaos and hyperchaos. *Acta Physica Sinica*, 1999, 48(3): 402~407 (in Chinese))
- Wang W. Bifurcations and chaos of the Bonhoeffer-van der Pol model. *J Phys A: Math Gen*, 1989, 22(13): 627~632
- Rajasekar S, Lakshmanan M. Period-doubling bifurcations, chaos, Phase-locking and devil's staircase in a Bonhoeffer-van der Pol oscillator. *Physica D*, 1988, 32(1): 146~152
- Rajasekar S, Parthasarathy S, Lakshmanan M. Prediction of horseshoe chaos in BVP and DVP oscillator. *Chaos, Solitons and Fractals*, 1992, 2(3): 271~280
- Rajasekar S, Lakshmanan M. Algorithms for controlling chaotic motion: Application for the BVP oscillator. *Physica D*, 1993, 67(1~3): 282~300
- Rajasekar S. Controlling unstable periodic orbits in a Bonhoeffer-van der Pol equation. *Chaos Solit Fract*, 1995, 5(11): 2135~2144
- 梁建术, 陈予恕. 一种改进的延时反馈混沌控制方法. 非线性动力学报, 2002, 9(1): 88~92 (Liang Jianshu, Chen Yushu. An improved method of control of chaos by delayed self-controlling feedback. *J Nonlinear Dynamics in Science and Technology*, 2002, 9(1): 88~92 (in Chinese))
- 梁建术. 高维非线性系统的分岔和混沌控制 [博士论文]. 天津: 天津大学, 2003 (Liang Jianshu. The bifurcations and chaos control in higher dimensional nonlinear systems [Ph D Thesis]. Tianjin: Tianjin university, 2003 (in Chinese))

## CONTROL OF CHAOTIC BONHOEFFER-VAN DER POL EQUATION

Liang Jianshu<sup>1</sup> Chen Yushu<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050054, China)

(2. School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

**Abstract** According to the delayed feedback control method and the phase space compression method, an improved delayed feedback scheme was proposed, which took phase space compression as restriction on state variables in the delayed feedback control. The method was testified in Bonhoeffer-van der Pol system. The results indicated that the chaotic system with only one chaotic attractor can be controlled into a desired periodic orbit immediately. Compared with the Pyragas's method, the improved method reduced the recovery time. For a system with double attractors, it can be stabilized simply into a desired periodic orbit embeded in different attractor by using the appropriate phase space limiter.

**Key words** delayed feedback control, chaotic control, limiter, attractor