关于多尺度法的一个注记*

王怀磊 胡海岩
(南京航空航天大学振动工程研究所,南京 210016)

摘要 以 van der Pol 系统为例,揭示了多尺度法在求解非线性系统三次以上近似解时似乎存在的二义性问题.通过将多尺度法的结果与 KBM 法所得结果进行比较,指出了如何利用多尺度法求解非线性系统三次以上近似解的正确步骤.

关键词 多尺度法,二义性,KBM 方法

引言

自从1957年 Sturrock 提出多时间尺度的概念,经过 Nayfeh 等人的发展和完善,多尺度法已经成为一种十分有效的非线性动力学定量分析方法[1].多尺法不仅能计算周期运动,而且能计算耗散系统的衰减振动;不仅能计算稳态响应,而且能计算非稳态过程;并可以分析稳态响应的稳定性,描绘非自治系统的全局运动性态[2,3].由于二次近似解可以为大部分实际问题提供精度足够的信息,现有文献通常只求得非线性系统的二次近似解.至今,作者尚未发现采用多尺度法求解非线性系统三次以上近似解的先例.

在文[4]中,由于某些特殊系统参数的需要,作者利用多尺度法研究了一类非线性时滞系统的三次近似解,发现该方法在求解三次以上近似解时存在内在的矛盾,遵循不同的步骤可以得到两组不同的结果,产生了二义性.本文以经典的 van der Pol 系统为例,将多尺度法得到的两种不同结果与 KBM 方法所得结果进行比较,以揭示这种矛盾存在的原因以及解决方法.

1 多尺度法的二义性

经典的 van der Pol 系统满足

$$\ddot{x}-\varepsilon(1-x^2)\dot{x}+x=0,\varepsilon>0 \tag{1}$$

鉴于许多教科书中已有该系统周期运动二次近似的结果,本文只介绍采用多尺度法计算三次近似解的过程及产生的矛盾.为了得到三次近似解,需要用四个时间尺度 T_0,T_1,T_2,T_3.设解为

$$x(t)=x_0(T_0,T_1,T_2,T_3)+\varepsilon x_1(T_0,T_1,T_2,T_3)+\varepsilon^2x_2(T_0,T_1,T_2,T_3)+\varepsilon^3x_3(T_0,T_1,T_2,T_3) \tag{2}$$

将式(2)代入方程(1),比较 ε 的同次幂系数,得到一系列线性偏微分方程

$$D_0^2x_0+x_0=0, \tag{3a}$$

$$D_0^2x_1+x_1=-2D_0D_1x_0+(1-x_0^2)D_0x_0 \tag{3b}$$

$$D_0^2x_2+x_2=-(D_1^2+2D_0D_2)x_0-2D_0D_1x_1-2x_0x_1D_0x_0+(1-x_0^2)(D_1x_0+D_0x_1) \tag{3c}$$

$$D_0^2x_3+x_3=(-2D_{1,2}+2D_{0,3}+D_2)x_0-2x_0x_1D_1x_0-2x_0x_2D_0x_0-x_0^2D_2x_0-x_1^2D_0x_0+(-2D_{0,2}+D_1-D_1^2)x_1-x_0^2D_1x_1-2x_0x_1D_0x_1+(D_0-2D_0D_1)x_2-x_0^2D_0x_2 \tag{3d}$$

式(3a)的近似解为

$$x_0=A(T_1,T_2,T_3)e^{iT_0}+cc \tag{4}$$

将上式代入式(3b,3c)并依次求解,得到三个消除永年项的条件

$$-2D_1A+A-A^2\overline{A}=0 \tag{5a}$$

$$2iD_2A+D_1^2A+2A\overline{A}D_1A+A^2D_1\overline{A}-D_1A-\frac{1}{8}\overline{A}^2A^3=0 \tag{5b}$$

$$2iD_3A-D_2A+2A\overline{A}D_2A+2D_{1,2}A+\frac{7}{32}i\overline{A}^2A^2D_1A+\frac{1}{4}iA^3\overline{A}D_1\overline{A}+\frac{3}{64}iA^3\overline{A}^2-\frac{1}{16}iA^4\overline{A}^3=0 \tag{5c}$$

由式(5a)及(5b)可得

$$D_1A=\frac{A-A^2\overline{A}}{2} \tag{6a}$$

2004-07-31收到第1稿,2004-08-15收到修改稿.
*国家自然科学基金资助项目(10372116,50135030)

$$D_2A = -\frac{i}{2}\left(\frac{1}{4}A - A^2\overline{A} + \frac{7}{8}A^3\overline{A}^2\right) \quad (6b)$$

系统的三次近似解为

$$x_0 = a\cos(\psi) - \frac{1}{32}\varepsilon a^3\sin(3\psi) - \frac{1}{3072}\varepsilon^2a^3[(24+3a^2)\cos(3\psi) + 5a^2\cos(5\psi)] + \frac{1}{294912}\varepsilon^3a^3[(-261a^4 - 576 + 1512a^2)\sin(3\psi) + (280a^2 + 15a^4)\sin(5\psi) + 28a^4\sin(7\psi)] \quad (7)$$

其中

$$\psi = t + \varphi \quad (8)$$

将式(5a)和(5b)代入式(5c)中求解 D_3A 时需用到 $D_{1,2}A$,因此有必要将其求出.

由式(6a)可得

$$D_{1,2}A = \frac{1}{32}iA(10A\overline{A} - 15A^2\overline{A}^2 + 7A^3\overline{A}^3 - 2) \quad (9a)$$

而由式(6b)可得

$$D_{2,1}A = \frac{1}{32}iA(26A\overline{A} - 59A^2\overline{A}^2 + 35A^3\overline{A}^3 - 2) \quad (9b)$$

由式(9a)与(9b)可以看出,

$$D_{1,2}A \neq D_{2,1}A \quad (10)$$

这与 $A(T_1,T_2,T_3)$ 关于 T_1,T_2 的连续可微性矛盾.此外,根据方程(5c)求解 D_3A 时,采用式(9a)或(9b)会得到两个不同的结果.对应于式(9a)和(9b),分别有

$$D_3A = \frac{1}{128}A^3\overline{A}^2(19A\overline{A} - 18) \quad (11a)$$

$$D_3A = -\frac{1}{128}A^2\overline{A}^2(64 + 93A^2\overline{A}^2 - 158A\overline{A}) \quad (11b)$$

令

$$A(T_1,T_2,T_3) = \frac{a(T_1,T_2,T_3)}{2}e^{i\varphi(T_1,T_2,T_3)} \quad (12)$$

将上式代入式(6a),(6b),(9a)或(9b),分离实部与虚部可分别得到关于 a 与 φ 的方程组

$$D_1a = \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a^3, D_1\varphi = 0 \quad (13)$$

$$D_2a = 0, D_2\varphi = -\frac{1}{256}(7a^4 - 32a^2 + 32) \quad (14)$$

$$D_3a = -\frac{1}{8192}a^5(19a^2 - 72), \quad D_3\varphi = 0 \quad (15a)$$

或

$$D_3a = -\frac{1}{8192}a^3(93a^4 - 632a^2 + 1024), \quad D_3\varphi = 0 \quad (15b)$$

由此可得

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon D_1\varphi + \varepsilon^2D_2\varphi + \varepsilon^3D_3\varphi = -\frac{\varepsilon^2}{256}(7a^4 - 32a^2 + 32) \quad (16)$$

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon D_1a + \varepsilon^2D_2a + \varepsilon^3D_3a = \frac{\varepsilon}{2}a\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{\varepsilon^3}{8192}a^3(19a^2 - 72) \quad (17a)$$

或

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon D_1a + \varepsilon^2D_2a + \varepsilon^3D_3a = \frac{\varepsilon}{2}a\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{\varepsilon^3}{8192}a^3(93a^4 - 632a^2 + 1024) \quad (17b)$$

2 KBM 法的结果

多尺度法产生的二义性使人无法判定式(17a)与(17b)的正确性.鉴于 KBM 法有严格的数学依据,现用 KBM 法计算方程(1)的三次近似解,与多尺度法的结果进行比较.为此,将方程(1)的解表示成如下三次近似解形式

$$x = a\cos(\psi) + \varepsilon x_1(a,\psi) + \varepsilon^2x_2(a,\psi) + \varepsilon^3x_3(a,\psi) \quad (18a)$$

$$\dot{a} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2A_2(a) + \varepsilon^3A_3(a) \quad (18b)$$

$$\dot{\psi} = 1 + \varepsilon\omega_1(a) + \varepsilon^2\omega_2(a) + \varepsilon^3\omega_3(a) \quad (18c)$$

将式(18a)代入方程(1),比较方程两端 ε 的同次幂的系统,并充分利用式(18b)及(18c)的信息可得如下一组关于相位 ψ 的线性偏微分方程.第一阶方程为

$$\frac{\partial x_1^2}{\partial\psi^2} + x_1 = \left(\frac{1}{4}a^3 + 2A_1 + a\right)\sin(\psi) + 2a\omega_1\cos(\psi) + \frac{1}{4}a^3\sin(3\psi) \quad (19a)$$

$$\frac{\partial x_2^2}{\partial\psi^2} + x_2 = \left(\frac{1}{4}\omega_1a^3 + 2\omega_1A_1 + 2A_2 - \omega_1a + A_1aD\omega_1\right)\sin(\psi) + \left(\omega_1^2a - A_1DA_1 + 2\omega_2a + A_1 - \frac{3}{4}A_1a^2\right)\times\cos(\psi) + a^2x_1\sin(2\psi) -$$

$$\frac{1}{2}a^2\mathrm{D}_2x_1\cos(2\psi)+\frac{1}{4}\omega_1a^3\sin(3\psi)-\frac{1}{4}A_1a^2\cos(3\psi)-\frac{1}{2}a^2\mathrm{D}_2x_1+\mathrm{D}_2x_1-2A_1\mathrm{D}_{1,2}x_1-2\omega_1\mathrm{D}_{2,2}x_1 \tag{19b}$$

$$\frac{\partial x_3^2}{\partial\psi^2}+x_3=(-\omega_2a+2\omega_1A_2+2A_3+\frac{1}{4}\omega_2a^3+2\omega_2A_1+ax_1^2+A_1a\mathrm{D}\omega_2+A_2a\mathrm{D}\omega_1)\sin(\psi)+(-2ax_1\mathrm{D}_2x_1-\frac{3}{4}A_2a^2-A_2\mathrm{D}A_1+2\omega_1\omega_2a+2\omega_3a+A_2)\cos(\psi)+(a^2x_2+\omega_1a^2x_1)\sin(2\psi)+\frac{1}{4}\omega_2a^3\sin(3\psi)+(-\frac{1}{2}a^2\mathrm{D}_2x_2-\frac{1}{2}A_1a^2\mathrm{D}_1x_1-\frac{1}{2}\omega_1a^2\mathrm{D}_2x_1-A_1ax_1)\cos(2\psi)-\frac{1}{4}A_2a^2\cos(3\psi)-\omega_1^2\mathrm{D}_{2,2}x_1-2A_1\mathrm{D}_{1,2}x_2-2\omega_1\mathrm{D}_{2,2}x_2-2\omega_2\mathrm{D}_{2,2}x_1-2\omega_1A_1\mathrm{D}_{1,2}x_1-2A_2\mathrm{D}_{1,2}x_1-A_1^2\mathrm{D}_{1,1}x_1+\mathrm{D}_2x_2+A_1\mathrm{D}_1x_1-A_1\mathrm{D}A_1\mathrm{D}_1x_1-A_1\mathrm{D}\omega_1\mathrm{D}_2x_1-\frac{1}{2}a^2\mathrm{D}_2x_2-\frac{1}{2}A_1a^2\mathrm{D}_1x_1-\frac{1}{2}\omega_1a^2\mathrm{D}_2x_1+\omega_1\mathrm{D}_2x_1-A_1ax_1 \tag{19c}$$

依次求解,可得到一组消除永年项的条件

$$-\frac{1}{4}a^3-2A_1+a=0,\ -2\omega_1a=0 \tag{20a}$$

$$-2A_2=0,\quad -\frac{7}{128}a^5+\frac{1}{4}a^3-\frac{1}{4}a-2\omega_2a=0 \tag{20b}$$

$$\frac{1}{12288}(840a^5-1536a^3-111a^7-245764A_3)=0,\quad -2\omega_3a=0 \tag{20c}$$

由以上诸式容易求得

$$A_1=\frac{1}{2}a-\frac{1}{8}a^3,\quad \omega_1=0 \tag{21a}$$

$$A_2=0,\omega_2=-\frac{1}{256}(7a^4-32a^2+32) \tag{21b}$$

$$A_3=-\frac{1}{8192}a^3(-280a^2+512+37a^4),\omega_3=0 \tag{21c}$$

因此,可以得到

$$\dot{a}=\varepsilon A_1+\varepsilon^2A_2+\varepsilon^3A_3=\frac{\varepsilon}{2}a(1-\frac{a^2}{4})-\frac{\varepsilon^3}{8192}a^3\times(-280a^2+512+37a^4) \tag{22a}$$

$$\dot{\psi}=1+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\varepsilon^3\omega_3=-\frac{\varepsilon^2}{256}(7a^4-32a^2+32) \tag{22b}$$

同时求得 van der Pol 系统的三次近似解为

$$x_0=a\cos(\psi)-\frac{1}{32}\varepsilon a^3\sin(3\psi)-\frac{1}{3072}\varepsilon^2a^3[(24+3a^2)\cos(3\psi)+5a^2\cos(5\psi)]+\frac{1}{294912}\varepsilon^3a^3[(-261a^4-576+1512a^2)\sin(3\psi)+(280a^2+15a^4)\sin(5\psi)+28a^4\sin(7\psi)] \tag{23}$$

将式(7)与式(23)进行比较可看出,多尺度法与KBM法所求得的系统的三次近似解形式是完全相同的.然而,将式(17a)和(17b)与式(22a)相比较可看出,多尺度法所得的两种结果均与KBM法不相同.经过仔细研究,可以发现产生上述问题的原因并非多尺度法存在缺陷,而是由于在实施过程中忽略了一些技术细节.

3 多尺度法的正确实施方法

在第1节已经提到,虽然 $A(T_1,T_2,T_3)$ 可以表示为 T_1,T_2,T_3 的连续可微函数,但 $\mathrm{D}_{1,2}A\neq\mathrm{D}_{2,1}A$.因此,在利用方程(5c)求解 D_3A 时,不能简单地将 $\mathrm{D}_{1,2}A$ 或 $\mathrm{D}_{2,1}A$ 代入其中,而应将其区别对待.事实上,方程(5c)中的 $2\mathrm{D}_{1,2}A$ 是在导出方程(3d)时习惯地将 $\mathrm{D}_{1,2}A$ 和 $\mathrm{D}_{2,1}A$ 合并而来.鉴于此,在方程(5c)中,令

$$2\mathrm{D}_{1,2}A=\mathrm{D}_{1,2}A+\mathrm{D}_{2,1}A \tag{24}$$

并将式(9a)和(9b)分别代入式(5c),经计算得到 D_3A 为

$$\mathrm{D}_3A=-\frac{1}{128}A^2\overline{A}(37A^2\overline{A}^2-70A\overline{A}+32) \tag{25}$$

将式(12)代入式(25),分离实部与虚部可得到

$$\mathrm{D}_3a=-\frac{1}{8192}a^3(37a^4-280a^2+37a^4),\quad \mathrm{D}_3\varphi=0 \tag{26}$$

这一结果与 KBM 法所得结果完全相同.

上述结果表明,对于微分算子

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}T_r}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial T_r} = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \mathrm{D}_r \tag{27a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \mathrm{D}_r \left(\sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^s \mathrm{D}_s \right) \tag{27b}$$

有必要将高阶导算子的不同次序分别保留,即不要将 $\mathrm{D}_{r,s}$ 与 $\mathrm{D}_{s,r}$ 合并.这样在计算系统三次以上高阶近似解时,利用多尺度法就可以得到正确的结果.

4 结论

多尺度法是一种十分有效的非线性动力学定量分析方法,但可能导致计算非线性系统的三次以上高阶近似解时碰到二义性问题.本文以一个经典的非线性动力学方程为例,揭示了二义性问题存在的原因以及解决方法.研究表明,产生二义现象的原因是人们将高阶导算子中的不同次序的混合导数习惯性地进行了合并,解决的办法是将它们分别保留.但是目前作者还尚未找出这种混合偏导数不能交换的原因,故此问题尚有待进一步研究.

参 考 文 献

1 Nayfeh AH, Mook DT. Nonlinear Oscillations. New York: John Wiley & Sons, 1979

2 胡海岩. 应用非线性动力学. 北京:航空工业出版社, 2000(Hu Haiyan. Applied Nonlinear Dynamics. Beijing: Aviation Industry Press, 2000 (in Chinese))

3 刘延柱,陈立群. 非线性振动. 北京:高等教育出版社, 2001(Liu Yanzhu, Chen Liqun. Nonlinear Dynamics. Beijing: High Education Press, 2001 (in Chinese))

4 Wang Huailei, Hu Haiyan. Remarks on the perturbation methods in solving the second-order delay differential equations. *Nonlinear Dynamics*, 2003, 33(4): 379~398

A NOTE ON THE METHOD OF MULTIPLE SCALES*

Wang Huailei　Hu Haiyan

(*Institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing* 210016, *China*)

Abstract This paper revealed the seemingly ambiguious problem of the multiple scales method in solving the third or higher order approximate solutions of nonlinear systems through an example of the famous van der Pol equation. By comparing the results obtained from the multiple scales method with that of the KBM method, this paper pointed out a proper way about how to apply the multiple scales method to solving the third or higher order approximate solutions of nonlinear systems.

Key words method of multiple scales, ambiguity, KBM method

Received 31 July 2004, revised 15 August 2004

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10372116, 50135030)