变分迭代算法在非线性微分方程中的应用*

唐　杰
(东华大学理学院,上海　200051)

摘要　应用何吉欢的变分迭代算法,求解了一类强非线性振动方程. 其中一阶近似解已有非常高的精度,并且得到的近似解在全域内一致有效.

关键词　变分迭代算法,非线性振动方程,广义拉氏乘子,周期解

引言

1978 年,Inokuti 等[1]提出了求解非线性问题的拉氏乘子法(General Use of Lagrange Multiplier Method). 这种方法起初主要应用于量子力学,其主要特点是以线性化了的方程的解作为近似解,引进一拉氏乘子来校正某些特殊点的值,但不能得到近似的解析解,因此该法没能得到广泛的应用. 何吉欢对 Inokuti 方法作了改进,并发展成为一种新的非线性分析方法——变分迭代算法[2~5]. 这种方法可以有效地求解各种非线性问题. 本文讨论如何运用变分迭代算法求非线性振动方程的近似解.

1　变分迭代算法

考虑一般形式的微分方程

$$Lu + Nu = g(x) \tag{1}$$

式中 L 为线性算子,N 为非线性算子.

根据变分迭代算法,我们需要构造一个含有广义拉氏乘子的校正泛函

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda[Lu_n(\tau) + N\tilde{u}_n(\tau) - g(\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{2}$$

式中 λ 为广义拉氏乘子[1],$\tilde{u}_n$ 表示限制变分量,即 $\delta\tilde{u}_n = 0$.

然后,根据变分理论对拉氏乘子进行最优化识别,并由此得出迭代方程.

在许多非线性微分方程中不存在小参数,所以传统的摄动方法不能直接应用. 而变分迭代算法不依赖于小参数的假设,从而避免了传统摄动法的缺陷和限制.

使用该方法在一些情况下一阶精度已有非常高的精度,而且对于弱非线性系统和强非线性系统都一致有效.

2　应用举例

以下举例说明变分迭代算法在非线性微分方程中的应用.

2.1　Duffing 方程

考虑 Duffing 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + u + \varepsilon u^3 = 0 \tag{3}$$

其中初始条件为 $u(0) = A$ 和 $u'(0) = 0$.

根据变分迭代算法,我们构造以下形式的校正泛函

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda[u_n''(\tau) + u_n(\tau) + \varepsilon\tilde{u}_n^3(\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

其中 $\tilde{u}_n(\tau)$ 为限制变分量,即 $\delta\tilde{u}_n = 0$;λ 为广义拉氏乘子.

对 u_n 进行独立变分,可以得到以下驻值条件[6]

$$\begin{cases}\lambda''(\tau) + \lambda(\tau) = 0,\\ \lambda(\tau)\mid_{\tau=t} = 0,\\ 1 - \lambda'(\tau)\mid_{\tau=t} = 0.\end{cases} \tag{5}$$

由条件(5),可识别拉氏乘子

$$\lambda = \sin(\tau - t) \tag{6}$$

将识别出的拉氏乘子 λ 代入式(4)可得以下迭代公式

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \sin(\tau - t)[u_n''(\tau) + u_n(\tau) + \varepsilon u_n^3(\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{7}$$

令初始近似为

2004-08-13 收到第 1 稿,2004-09-02 收到修改稿.

$$u_0(t) = A\cos\omega t \tag{8}$$

其中 ω 为一个不为零的待定常数.

显然,式(8) 已满足所有的边界条件,由变分迭代公式(7) 得

$$u_1(t) = A\cos\omega t - \frac{A(1-\omega^2+\frac{3}{4}\varepsilon A^2)}{1-\omega^2}(\cos\omega t - \cos t) - \frac{\varepsilon A^3}{4(1-9\omega^2)}(\cos 3\omega t - \cos t) \tag{9}$$

为消除下一次迭代将会产生的长期项,可以令 $\cos t$ 的系数为零,由此可确定 ω

$$\omega = \sqrt{\frac{10+7\varepsilon A^2+\sqrt{64+104\varepsilon A^2+49\varepsilon^2A^4}}{18}} \tag{10}$$

于是得一阶近似

$$u_1(t) = -\frac{3\varepsilon A^3}{4(1-\omega^2)}\cos\omega t - \frac{\varepsilon A^3}{4(1-9\omega^2)}\cos 3\omega t \tag{11}$$

其周期当 $\varepsilon \to \infty$ 时

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon A^2}} \tag{12}$$

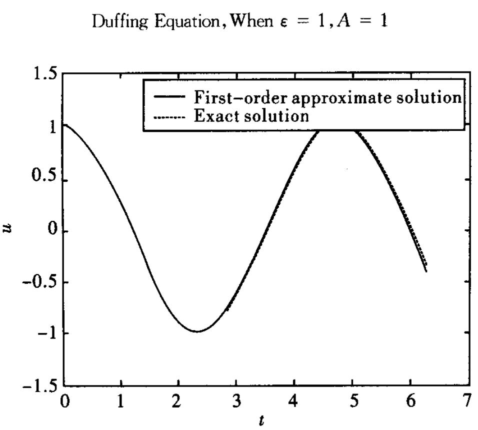
而 Duffing 方程(3) 的精确周期[5] 为

$$T_{ex} = \frac{2}{\sqrt{1+\varepsilon A^2}}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-k\sin^2 x}}\mathrm{d}x \tag{13}$$

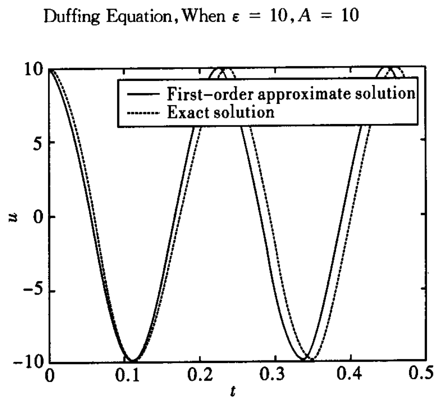
式中 $k = \dfrac{\varepsilon A^2}{2(1+\omega A^2)}$. 当 $\varepsilon \to \infty$ 时,有

$$T_{ex} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon A^2}} \tag{14}$$

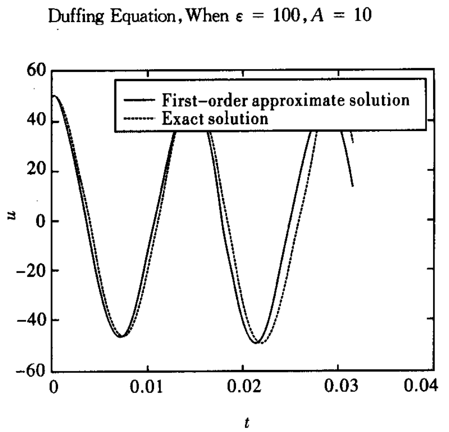
比较式(12) 与式(14) 可见,近似解对任意大的参数 ε 都有效. 图 1 显示了在不同情况下精确解与一阶近似解的比较.



(a)$\varepsilon = 1, A = 1$



(b)$\varepsilon = 10, A = 10$



(c)$\varepsilon = 100, A = 50$

图 1　精确解与一阶近似解的比较

Fig. 1　Comparison between exact solution and first-order approximate solution

由图可见,该法得到的一阶近似解精度就相当理想.

2.2　其他方程

再考虑以下非线性振动方程

$$\ddot{u} + \frac{u}{1+u^2} = 0, \tag{15}$$

其中初始条件为 $u(0) = A$ 和 $u'(0) = 0$.

式(15) 可改写成以下形式

$$\ddot{u} + u^2\ddot{u} + u = 0. \tag{16}$$

构造以下形式的校正泛函

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda[u_n''(\tau) + \omega^2 u_n(\tau) + F(\tilde{u}_n(\tau))]\mathrm{d}\tau \tag{17}$$

其中 $F(\tilde{u}_n(\tau)) = \tilde{u}_n(\tau) + \tilde{u}_n^2(\tau)\cdot\tilde{u}_n''(\tau) - \omega^2\tilde{u}_n(\tau)$,$\tilde{u}_n(\tau)$ 为限制变分量;λ 为广义拉氏乘子.

对 u_n 进行独立变分，可以得到以下驻值条件[6]

$$\begin{cases} \lambda''(\tau) + \omega^2\lambda(\tau) = 0 \\ \lambda(\tau)\mid_{\tau=t} = 0 \\ 1 - \lambda'(\tau)\mid_{\tau=t} = 0 \end{cases} \tag{18}$$

由条件(18)，可识别拉氏乘子

$$\lambda(\tau) = \frac{1}{\omega}\sin\omega(\tau - t). \tag{19}$$

将识别出的拉氏乘子 λ 代入式(17) 可得以下迭代公式

$$u^{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \sin\omega(\tau - t)[u_n''(\tau) + u_n^2(\tau)\cdot u_n''(\tau) + u_n(\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{20}$$

令初始近似为

$$u_0(t) = A\cos\omega t \tag{21}$$

则由式(20) 可得

$$u_1(t) = (1 + \frac{A^2}{32})A\cos3\omega t - \frac{A^3}{32}\cos3\omega t - [1 - \omega^2(1 + \frac{3}{4}A^2)]\frac{A}{2\omega}t\sin\omega t \tag{22}$$

为消除式(22) 中的长期项，令

$$1 - \omega^2(1 + \frac{3}{4}A^2) = 0, \tag{23}$$

从而可得频率 ω 为

$$\omega = (1 + \frac{3}{4}A^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{24}$$

因此，一阶近似解可得

$$u_1(t) = (1 + \frac{A^2}{32})A\cos[t(1 + \frac{3}{4}A^2)^{-\frac{1}{2}}] - \frac{A^3}{32}\cos[3t(1 + \frac{3}{4}A^2)^{-\frac{1}{2}}] \tag{25}$$

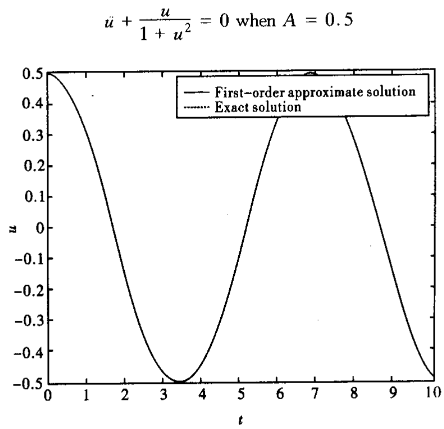
其周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{1 + \frac{3}{4}A^2}. \tag{26}$$

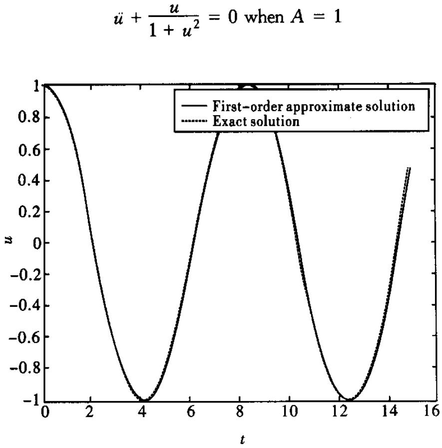
式(15) 的精确周期是[5]

$$T_{ex} = 4\int_0^A \ln^{-\frac{1}{2}}(\frac{1 + A^2}{1 + u^2})\mathrm{d}u. \tag{27}$$

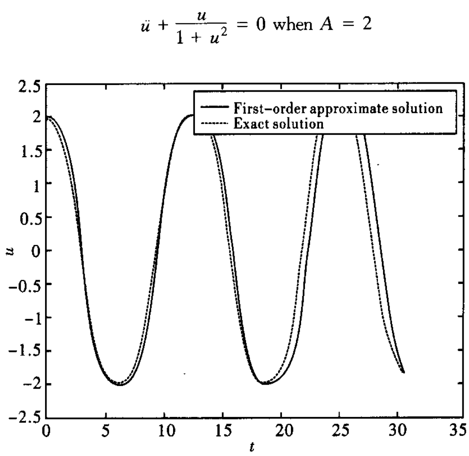
当 $A \to \infty$ 时，近似误差约为8.54%，对于一阶近似解来说这个误差是相当理想的. 图2显示了在不同情况下精确解与一阶近似解的比较.



(a)$A = 0.5$



(b)$A = 1$



(c)$A = 2$

图2 精确解与一阶近似解的比较

Fig.2 Comparison between exact solution and first-order approximate solution

3 结论

变分迭代算法是求解非线性微分方程近似解的一个强大的数学工具,该方法具有较高的精度,并且近似解在整个定义域内都一致有效.

参 考 文 献

1 Inokuti M, et al. General Use of the Lagrange Multiplier in Nonlinear Mathematical Physics. In: Nemat - Nasser S. ed. Variational Method in the Mechanics of Solids. New York: Pergamon Press, 1978. 156～162

2 He JH. Variational iteration method: a kind of nonlinear analytical technique: some examples. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1999, 34(4): 699～708

3 He JH. Variational iteration method for autonomous ordinary differential system. *Applied Math and Computer*, 2000, 114(2/3): 115～123

4 Draganescu GE, Capalnasan V. Nonlinear relaxation phenomena in polycrystalline solids. *Int J Nonlinear Sci and Num Simulation*, 2003, 4(3): 219～225

5 何吉欢.工程和科学计算中的近似非线性分析方法.河南:河南科学技术出版社,2002. 129～141(Je JH. Approximate analytical Methods in Engineering and Science. Henan: Henan Seience and Technology Press, 2002. 129～141(in Chinese))

6 何吉欢.流体力学广义变分原理.香港:中国科学文化出版社,2003. 222～225(He JH. Generalized Variational Principles in Fluids. HK: Science and Culture Publishing House of China, 2003. 222～225(in Chinese))

APPLICATION OF VARIATIONAL ITERATION METHOD TO NONLINEAR OSCILLATORS*

Tang Jie

(*College of Science, Donghua University, Shanghai* 200051, *China*)

Abstract The variational iteration method proposed by Ji-huan He was applied to a kind of strongly nonlinear oscillators. The obtained solutions are valid for the whole solution domain, and the first order approximation has high accuracy.

Key words variational iteration method, nonlinear oscillator, general Lagrange multiplier, period solution

Received 13 August 2004, revised 02 September 2004