

# 基于 Kane 方法的 Stewart 传感器动力学 及固有频率分析

姚裕<sup>1</sup> 吴洪涛<sup>1</sup> 张召明<sup>2</sup>

(1. 南京航空航天大学机电学院, 南京 210016)

(2. 南京航空航天大学航空宇航学院, 南京 210016)

**摘要** 通过线性化动力学方程并应用 Kane 方法, 研究了 Stewart 传感器的固有频率. 将 Stewart 传感器的上平台、上连杆、敏感元件及下连杆作为独立的子结构分别处理, 依据矢量和张量理论对其运动学方程和动力学方程进行系统的推导, 并经过简化导出 Stewart 传感器简洁的固有频率方程形式. 为验证 Kane 方法的有效性, 提供了 MATHEMATICA 数值算例. 相比于传统的牛顿-欧拉方法及拉格朗日方法, Kane 方法既简洁又高效, 特别适合于计算机计算.

**关键词** 固有频率, Stewart 传感器, Kane 方法, 动力学方程

## 引言

自从 Gaillet A, Reboulet C 首次提出基于 Stewart 平台的传感器, 该传感器由于其固有优点而受到许多学者的关注. A. Romiti<sup>[1]</sup> 和 M Sorli<sup>[2]</sup> 研究了将 Stewart 传感器用于机器人装配手的力和力矩测量; Chul-Goo Kang<sup>[3]</sup> 研究了基于 Stewart 平台的封闭形式的六维力传感器, 并给出传感器的原型样机; T A Dwarrakanath<sup>[4]</sup> 设计了具有环形敏感元件的 Stewart 传感器, 该设计应用于紧凑型力和力矩传感器; 姚裕, 吴洪涛等推导了并联风洞天平的力雅可比矩阵, 并基于力雅可比矩阵研究了其结构优化. 近年来, 已有许多关于 Stewart 平台的动力学分析, 最常用的是拉格朗日方法及牛顿-欧拉方法<sup>[5,6]</sup>. 这两种方法的计算效率低<sup>[7]</sup>, 其在动力学分析过程中需要大量的计算, 不适合于产生简洁形式的动力学方程. 而用 Kane<sup>[8]</sup> 方法推导的动力学方程, 具有形式简洁和计算效率高等优点, 且推导过程易于用计算机实现. 本文应用 Kane 方法系统地推导出 Stewart 传感器的动力学方程和固有频率方程, 并用数值算例验证该法对传感器固有频率分析的有效性.

## 1 子结构动力学方程

### 1.1 Stewart 传感器结构描述

Stewart 力传感器由子结构(上平台、下平台和 6 个弹性连杆分支)构成, 每个连杆分支两端分别通过球铰与上平台和下平台连接, 各弹性连杆分支包括上连杆、敏感元件和下连杆. 图 1 为 Stewart 传感器的结构示意图, 考虑到并联天平在实际工作中只产生微小变形, 弹性力和阻尼力可以线性化, 故并联天平系统为线性系统, 这里用弹簧替代敏感元件.

图 2 为某一连杆分支的示意图, 点  $O_u, O_s, O_l, O_m$  分别为上连杆、敏感元件、下连杆和上平台的质心,  $L_u, L_s, L_l$  分别为上连杆、弹簧、下连杆的长度, 即分别为矢量  $L_u, L_s, L_l$  的模. 对于传感器的运动学和动力学分析过程中的位置、速度和加速度等变量, 如  $a_i, L_m, v_{ai}$  等, 为研究的方便和清楚起见, 均忽略其下标. 下平台坐标系  $\{B\}$  为全局坐标系, 原点在平台质心  $O_B$ . 上平台坐标系  $\{M\}$  位于点  $O_m$ , 与下平台坐标系  $\{B\}$  姿态一致. 连杆分支坐标系详见图 2 所示.

### 1.2 位置、速度和角速度

由图 2, Stewart 传感器的位置方程

$$Le = P + RA - B \quad (1)$$

其中  $e = L / \|L\|$ ,  $\|L\| = L = L_u + L_s + L_l$ ,

$P$  为上平台位置向量;

$R$  为上平台相对下平台坐标变换矩阵;

$A, B$  为上、下平台球铰点在坐标系  $\{M\}$  和  $\{B\}$  的向量.

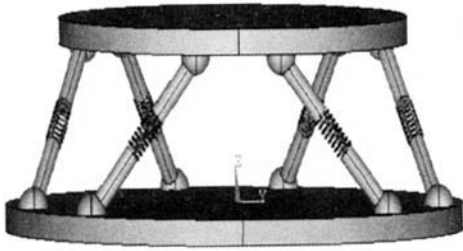


图 1 Stewart 传感器示意图  
Fig.1 The Stewart transducer

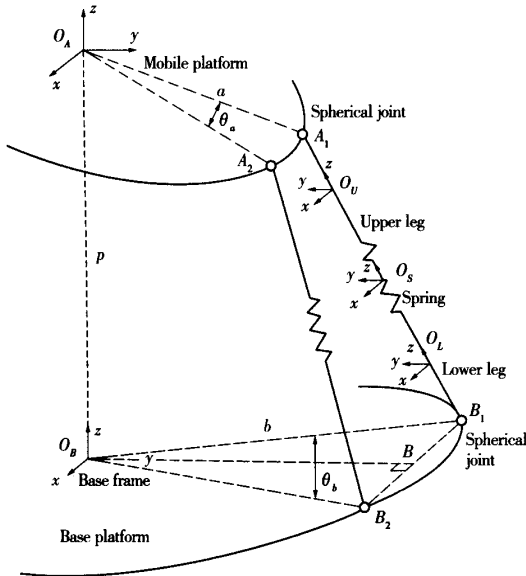


图 2 连杆分支示意图  
Fig.2 Details of one leg branch

对方程(1)进行矢量和张量运算并化简,得连杆分支关于点  $B$  的角速度  $\omega_l$ ,

$$\omega_l = [e \times v + e \times (\omega \times c)]/L \quad (2)$$

其中  $c=RA$ .

同理,可导出上平台、上连杆和下连杆的速度分别为

$$\begin{aligned} V_m &= v + \omega \times r_0, V_l = L_l(\omega_l \times e)/2, \\ V_u &= (L_s + L_l + L_u/2)(\omega_l \times e) + L_s \end{aligned} \quad (3)$$

上连杆相对下连杆的运动速度  $V_s$  为

$$V_s = e \cdot (v + \omega \times RA) \quad (4)$$

其中  $r_0$  是上平台质心点在坐标系  $\{M\}$  中的位置向量.

### 1.3 加速度和角加速度

依据方程(2),连杆分支在坐标系  $\{M\}$  中的角加速度  $\epsilon_l$  为

$$\begin{aligned} \epsilon_l &= (e \times (\dot{v} + \omega_l \times c) + \\ &e \times (\omega \times (\omega \times c)) + V_s \omega_l)/L \end{aligned} \quad (5)$$

同理,根据方程(3),(4),上平台、下连杆及上连杆的质心加速度分别为

$$\begin{aligned} a_m &= a + \epsilon \times r_0 + \omega \times (\omega \times r_0), \\ a_l &= V_l = L_l(\epsilon_l \times e)/2 + \\ &L_l(\omega_l \times (\omega_l \times e)) \\ a_s &= e \cdot (a + \epsilon \times c) + (\omega_l \times e) \cdot \\ &(v + \omega \times c) + e \cdot (\omega \times (\omega \times c)) \end{aligned} \quad (6)$$

上连杆相对下连杆运动的加速度  $a_u$  为

$$\begin{aligned} a_u &= V_u = (L_s + L_l + L_u/2) \cdot \\ &[\epsilon_l \times e + \omega_l \times (\omega_l \times e)] + \\ &a_s e + V_s(\omega_l \times e) \end{aligned} \quad (7)$$

### 1.4 偏速度和偏角速度

以上的分析表明,传感器各子结构的速度和角速度可表示为广义速度的线性表达式,也即力学家 Kane 定义的偏速度、偏角速度. 因此据方程(2),连杆分支和上平台的偏角速度  $\omega_l^{(r)}$  和  $\omega_m^{(r)}$  分别为

$$\begin{aligned} \omega_l^{(r)} &= [(e \times I_3)/L; (e \cdot c)I_3/L - ce/L], \\ \omega_m^{(r)} &= [0; I_3] \end{aligned} \quad (8)$$

同理,根据方程(3)和(4),可以推导出上平台质心的偏速度  $V_m^{(r)}$ 、上连杆相对下连杆运动的偏速度  $V_s^{(r)}$ 、下连杆质心的偏速度  $V_l^{(r)}$  和上连杆质心的偏速度  $V_u^{(r)}$  分别如下

$$\begin{aligned} V_m^{(r)} &= [0; r_0 \times I_3], V_s^{(r)} = [e; c \times e], \\ V_l^{(r)} &= [L_l(I_3 - ee)/2L; \\ &L_l(e(c \times e) - c \times I_3)/2L], \\ V_u^{(r)} &= [I_3 - (L_s + L_l + L_u/2)/L(I_3 - ee); \\ &(L_s + L_l + L_u/2)/L[e(c \times e) + c \times I_3] \end{aligned} \quad (9)$$

### 1.5 广义主动力及广义惯性力

根据 Kane 方法,Stewart 传感器的广义主动力考虑整个传感器系统得到,则整个 Stewart 传感器系统的广义主动力可表示为

$$F_i = R_i \cdot V_i^{(r)} + T_i \cdot \omega_i^{(r)} \quad (10)$$

其中  $R_i$  为第  $i$  个子结构的主动力,  $T_i$  为第  $i$  个子结构的主动力矩.

同理,取第  $i$  个子结构的参考点为质心点,则整个传感器系统的广义惯性力可表示  $F^*$  为

$$F^* = \sum_{i=1}^n (R_i^* \cdot V_i^{(r)} + T_i^* \cdot \omega_i^{(r)}) \quad (11)$$

### 1.6 动力学方程

依据 Kane 方法<sup>[8]</sup>, 广义主动力与广义惯性力之和为零, 将方程(10), (11)带入 Kane 方程, 经过简化, 可得 Stewart 传感器完整的动力学方程表达式为

$$M\ddot{q} + Cq + Kq = 0 \tag{12}$$

其中

$$M = \sum_{i=1}^{19} [V_i^{(r)}] \cdot [V_i^{(r)}]^T m_i + [\omega_i^{(r)}] \cdot I_i \cdot [\omega_i^{(r)}]^T$$
$$K = J \text{Diag}[k_1, k_2, \dots, k_6] J^T$$

$J$  是输入-输出雅可比矩阵, 传统意义上的速度雅可比矩阵为  $J^T$ .

### 2 固有频率方程

根据振动理论, 阻尼仅影响系统的振幅, 不影响系统的固有频率, 因此, 为研究方便起见, 固有频率求解过程中不考虑阻尼的影响, 则方程(12)可改写为

$$M\ddot{q} + Kq = 0 \tag{13}$$

由方程(13)和振动理论可知, Stewart 传感器的固有频率方程应为

$$|K^{-1}M - \lambda^2 I_6| = 0 \tag{14}$$

展开方程(14), 容易解得 Stewart 传感器的固有频率  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i} / 2\pi$  ( $i=1, \dots, 6$ ).

### 3 数值算例

本算例中, 上平台的初始姿态与下平台一致, 各连杆分支结构参数相同. 依据雅可比矩阵最小条件数原则, 将 Stewart 传感器的初始结构参数、运动学参数及动力学带入固有频率方程(14)的广义质量矩阵  $M$  和广义刚度矩阵  $K$ , 应用 MATHEMATICA 可得关于变量  $\lambda$  的一元六次固有频率方程

$$4.62 \times 10^{10} + 3.64 \times 10^{35} \lambda + 9.2 \times 10^{29} \lambda^2 + 7.4 \times 10^{23} \lambda^3 + 2.56 \times 10^{16} \lambda^4 + 2.83 \times 108 \lambda^5 + \lambda^6 = 0 \tag{15}$$

解此方程可得 Stewart 传感器的前六阶固有频率分别为

$$[\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3 \ \omega_4 \ \omega_5 \ \omega_6]^T = [88.9 \ 90.5 \ 128.1 \ 1185.8 \ 1672.2 \ 1710.2]^T$$

图3和图4给出了传感器的六阶固有频率随敏感单元刚度系数和上平台质量变化的曲线.

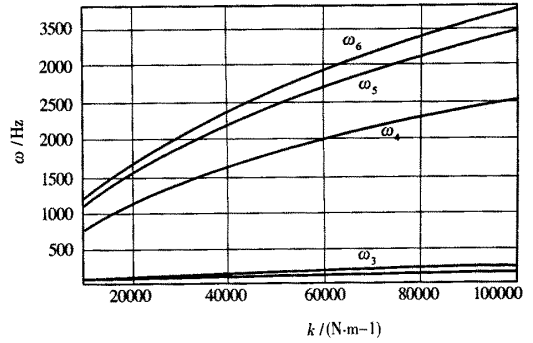


图3 固有频率随敏感元件刚度变化曲线  
Fig. 3 Natural frequencies varying with stiffness of the elastic element

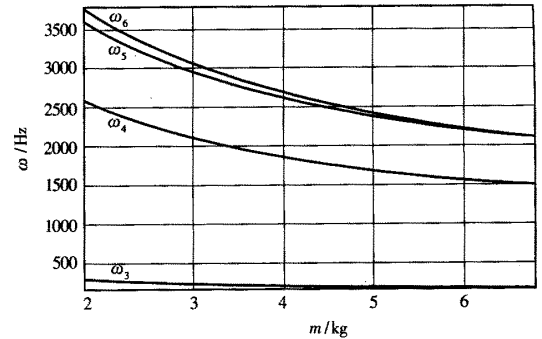


图4 固有频率随上平台质量变化曲线  
Fig. 4 Natural frequencies varying with mass of the upper platform

### 4 结论

固有频率可用于 Stewart 传感器系统的局部特性和低速特性等性能, 如系统响应时间、各种局部响应特性、确定系统的局部稳定性、何时系统振动和共振并控制其大小. 因此, 研究 Stewart 传感器的固有频率意义重要. 本文基于 Kane 方法研究了 Stewart 传感器的固有频率, 系统地推导出该传感器的运动学和动力学方程, 与传统的牛顿-欧拉方法及拉格朗日方法相比, Kane 方法包含更少的算术运算, 且可获得更简洁形式的动力学方程.

## 参 考 文 献

- 1 Romiti A, Sorli M. Force and moment measurement on a robotic assembly hand. *Sensors and Actuators A*, 1992, 32:531~538
- 2 Sorli M, Zhmud N. Investigation of force and moment measurement system for a robotic Assembly hand. *Sensors and Actuators A*, 1993, 32:651~657
- 3 Kang Chul Goo. Closed-form force sensing of a 6-axis force transducer based on the Stewart platform. *Sensors and Actuators A*, 2001, 90:31~37
- 4 Dwarrakanath TA, Bhaskar Dasgupta, Mruthyunjaya TS. Design and development of stewart platform based force-torque sensor. *Mechatronics*, 2000, 11:793~809
- 5 Dasgupta B, Prasun Choudhury. A general strategy based on the newton-euler approach for the dynamic formulation of parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 1999, 34:801~824
- 6 Wang J, Gosselin CM. A new approach for dynamic analysis fo parallel manipulators. *Multibody Syst Dyn*, 1998, 2:317~334
- 7 Silver MM. On the Equivalence of lagrangian and newton-euler dynamics for Manipulators. *International Journal of Robotics Research*, 1982, 1(2): 60~70
- 8 Kane TR, Levison DA. Dynamics: Theory and Application. New York: McGraww-Hill Book Company, 1985

## THE NATURAL FREQUENCIES ANALYSIS FOR STEWART TRANSDUCER BASED ON THE KANE'S METHOD

Yao Yu<sup>1</sup> Wu Hongtao<sup>1</sup> Zhang Zaoming<sup>2</sup>

(1. College of Mechanical and Electrical Engineering,  
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

(2. College of Aerospace Engineering,  
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract** This paper analyzed the natural frequencies for the Stewart transducer based on the Kane's method. In this method, the upper platform, the upper leg, the elastic element and the lower leg of the Stewart transducer were treated as independent substructure, and the equations of kinematics and dynamics were derived systematically according to the theory of the vector and the tensor. Moreover the equations of the natural frequencies for the Stewart transducer were obtained by simplifying the equations of kinematics and dynamics. In order to testify the validation of the Kane's method, a numerical simulation was proposed in mathematica routines. Compared with the traditional Newton-Euler method and the Lagrange method, the Kane's method is explicit and efficient, and especially suitable for calculating with computer.

**Key words** natural frequency, Stewart transducer, Kane's method, dynamic equation