

大型陀螺系统的模态综合方法

隋永枫 钟万勰

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

摘要 在陀螺系统辛子空间迭代法基础上, 发展出了陀螺系统的模态综合方法(MSMGS). 此方法将一个整体的大的陀螺系统化为几个小的陀螺系统. 在各子结构中, 应用辛子空间迭代法对其进行前几阶的模态计算, 并合并各个子结构, 以组装成整体系统的转换矩阵, 然后将其代入整体陀螺系统, 得到缩减后的整体陀螺系统. 算例证明了缩减后的系统能够比较好地近似原来的整体陀螺系统.

关键词 辛子空间迭代法, 模态综合法, 陀螺系统, 有限元, 本征解

引言

随着近代工程技术的发展, 特别是复杂转子系统的出现, 使模态综合法在转子动力学中有了广泛的应用, 但同时计算精度又有了进一步的要求^[1~4]. 而传统的子结构方法是以位移法为基础的^[2], 但陀螺本征值问题的处理通常是在状态空间中进行的^[1], 所以陀螺系统的模态综合法也应该在状态空间内进行. 由专著^[5]可以看到, 陀螺动力系统可以很容易导入 Hamilton 体系, 这就为陀螺系统特性的分析与计算构造了一个完善的理论框架. 文献[1, 3, 4]相继把模态综合法的思想应用到复杂转子系统上来, 已经有了丰硕的成果. 本文基于陀螺矩阵的辛子空间迭代法, 结合文献[6, 7]的思想, 提出了一种计算大型陀螺系统的模态综合方法(MSMGS), 对于大型陀螺系统特别当系统矩阵 K 不正定是很好的处理方法. 可以看到此方法很好的保持了系统的 Hamilton 框架, 有很好的工程应用前景. 算例证明了此方法的有效性.

1 动力系统的自由度的缩减

对于陀螺系统而言, 可以导出动力方程

$$M\ddot{q} + G\dot{q} + Kq = f_1(t) \quad (1)$$

其中 $f_1(t)$ 为外力向量. 这个动力方程与以前相比, 多了一个陀螺项 $G\dot{q}$, 其 G 中为反对称矩阵. 式(1)依然是二阶微分方程, 按常微分方程的理论, 应当先求解其齐次方程的通解, 得到脉冲响应函数, 然后再用

Duhamel 积分来处理其非齐次项. 齐次方程

$$M\ddot{q} + G\dot{q} + Kq = 0 \quad (2)$$

有 3 项, 直接对该方程用分离变量法将有困难.

其实分离变量法对陀螺系统也是可以发挥作用的. 其关键的一步是要采用状态空间法. 现采用哈密顿正则方程体系, 引入对偶向量, 即动量

$$p = \partial L / \partial \dot{q} = M\dot{q} + Gq/2 \quad (3)$$

$$\text{或 } \dot{q} = -M^{-1}Gq/2 + M^{-1}p \quad (4)$$

并引入哈密顿函数

$$\begin{aligned} H(q, p) &= p^T \dot{q} - L(q, \dot{q}) = \\ &= \dot{q}^T M \dot{q} / 2 + q^T K q / 2 = \\ &= p^T M^{-1} p / 2 - p^T M^{-1} G q / 2 + \\ &= q^T (K + G^T M^{-1} G / 4) q / 2 \end{aligned} \quad (5)$$

可以写为

$$\begin{aligned} H(q, p) &= p^T D p / 2 = p^T A q + q^T B q / 2 \\ D &= M^{-1}, \quad A = -M^{-1} G / 2, \\ B &= K + G^T M^{-1} G / 4 \end{aligned} \quad (6)$$

注意, D, B 阵为对称, D 为正定; 而 B 阵未必能保证为正定, 因为 K 阵未必能保证正定. 变分原理依然为

$$\delta \int_0^T [p^T \dot{q} - H(q, p)] dt = 0 \quad (7)$$

完成变分推导, 得到一对正则方程

$$\dot{q} = \partial H / \partial p = Aq + Dp \quad (8a)$$

$$\dot{p} = +\partial H / \partial q = -Bq - A^T p \quad (8b)$$

将 q, p 合在一起组成状态向量 $v(t)$

$$v = \{q^T, p^T\}^T \quad (9)$$

于是对偶正则方程便成为

$$\dot{v} = H v, H = \begin{bmatrix} A & D \\ -B & -A^T \end{bmatrix} \quad (10)$$

2 模态综合法以及本征问题的求解

大系统的模态综合应该建立在变分原理基础上,将其分成 m 个子系统. 在子系统的本征解空间分析可以使问题得到简化,但在原有的状态空间里分析问题比较复杂,所以子系统的划分规则是使子系统的状态向量互相独立,全系统的状态向量 v 则成为子系统状态向量的直和.

不失一般性,这里以两个子结构为例,介绍系统整体转换矩阵的形成. 对于动力系统的第 s_1 和 s_2 子结构的动力方程分别为

$$\dot{v}^{s_1} = H^{s_1} v^{s_1} \quad \text{和} \quad \dot{v}^{s_2} = H^{s_2} v^{s_2} \quad (11)$$

利用陀螺系统的辛子空间迭代法可以分别求得以上两个子结构的前 m_1 和 m_2 阶本征向量,组成本征向量矩阵,分别为

$$\Psi^{s_1} = \begin{bmatrix} \Psi_{11}^{s_1} & \Psi_{12}^{s_1} \\ \Psi_{21}^{s_1} & \Psi_{22}^{s_1} \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \Psi^{s_2} = \begin{bmatrix} \Psi_{11}^{s_2} & \Psi_{12}^{s_2} \\ \Psi_{21}^{s_2} & \Psi_{22}^{s_2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

组合整体转换矩阵

$$\begin{Bmatrix} q^{s_1} \\ p^{s_1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{11}^{s_1} & \Psi_{12}^{s_1} \\ \Psi_{21}^{s_1} & \Psi_{22}^{s_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a^{s_1} \\ b^{s_1} \end{Bmatrix}$$

和

$$\begin{Bmatrix} q^{s_2} \\ p^{s_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{11}^{s_2} & \Psi_{12}^{s_2} \\ \Psi_{21}^{s_2} & \Psi_{22}^{s_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a^{s_2} \\ b^{s_2} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

即相当于

$$v = \Psi \bar{v} \quad (14)$$

其中

$$v = \begin{Bmatrix} q^{s_1} \\ q^{s_2} \\ p^{s_1} \\ p^{s_2} \end{Bmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{Bmatrix} a \\ a \\ b \\ b \end{Bmatrix}$$

和

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11}^{s_1} & 0 & \Psi_{12}^{s_1} & 0 \\ 0 & \Psi_{11}^{s_2} & 0 & \Psi_{12}^{s_2} \\ \Psi_{21}^{s_1} & 0 & \Psi_{22}^{s_1} & 0 \\ 0 & \Psi_{21}^{s_2} & 0 & \Psi_{22}^{s_2} \end{bmatrix} \quad (15)$$

可以证得转换矩阵 Ψ 是辛矩阵,即

$$\Psi^T J \Psi = J \quad (16)$$

其中 J 为单位辛矩阵定义见文献[5].

对整体系统进行分析,得到(7)式的变分原理

$$\delta \int_0^{t_f} [p^T \dot{q} - H(q, p)] dt = 0 \quad (17)$$

将(14)式代入(17)式,并对未知向量 a, b 分别变分,可以得到缩减后的陀螺系统对应的齐次方程为

$$\dot{\bar{v}} = \bar{H} \bar{v} \quad (18)$$

由于转换矩阵 Ψ 为辛矩阵,则缩减后的陀螺系统仍保持了 Hamilton 结构,即 $\bar{H} = \Psi^{*T} H \Psi$ 亦为 Hamilton 矩阵,这里 Ψ^* 为转换矩阵 Ψ 的共轭矩阵 $\Psi^* = -J \Psi J$. 这样,对于缩减后的陀螺系统,同样可以应用陀螺系统的辛子空间迭代法求出前 m 阶的本征值和本征向量.

3 算例

对于涡轮转子^[8],见示意图 1,材料参数见文献[8]算例 1,盘的质量为

$m_1 = 0.1764 \text{ kg}, m_2 = 2.0678 \text{ kg}, m_3 = 0.11927 \text{ kg}$
 轴截面二次轴矩为 $I_d = 4.952 \times 10^{-9} \text{ m}^4$ 盘的转动惯量分别为

$$\begin{aligned} I_{D1} &= 1.078 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ J_{D1} &= 2.058 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ I_{D2} &= 2.9498 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ J_{D2} &= 5.8212 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ I_{D3} &= 4.7842 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ J_{D3} &= 8.7514 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \end{aligned}$$

支承刚度为

$$K_1 = 3.92 \times 10^6 \text{ N/m}, K_2 = 4.90 \times 10^6 \text{ N/m}.$$

沿转轴将梁分为 13 段,在第一个弹簧处将系统分为两个子结构,左边子结构为 3 段,右边子结构为 9 段,在两个子结构中分别选取前一半的本征向量,利用本文的模态综合方法(MSMGS)算得缩减后的系统本征值与整体系统有限元方法(FEM)算出的本征值比较如表 1.

从以上可以看到上述的模态综合方法所得到的结果是令人满意的.

4 结论

对于陀螺系统的模态综合法,我们的工作才刚刚开展起来,存在很多的不足,还有很多需要改善的地方,但是可以看到,虽然模型比较粗糙,但是算例证明精度还是很好的,显示了这种模态综合方法的优越性,另外可以将传统的模态综合方法的思想引入到陀螺系统的模态综合法,进一步改善和发展本文的模态综合方法.

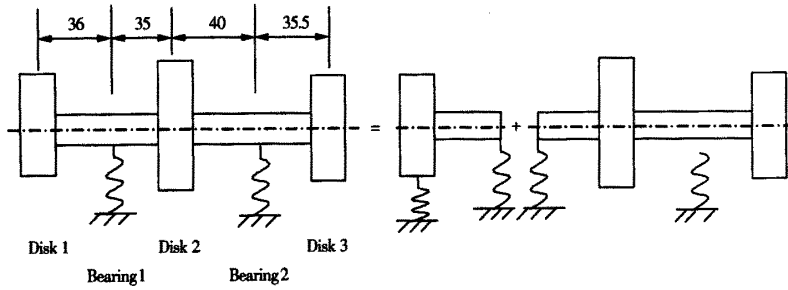


图1 涡轮泵转子和子结构划分示意图

Fig. 1 Turbo pump rotor system

表1 模态综合法与整体有限元方法的比较

Table 1 Comparison between the solutions of modal synthetic method and the solutions of the FEM

	The MSMGS	The FEM	Error/%
First order	±1010.0	±1007.9	0.21
Second order	±1737.4	±1730.6	0.39
Third order	±1813.1	±1809.5	0.20
Fourth order	±2292.2	±2286.9	0.23
Fifth order	±6633.3	±6142.8	7.98
Sixth order	±6961.8	±6585.2	5.70
Seventh order	±7730.7	±7426.6	4.09
Eighth order	±8782.5	±8388.7	4.69

参 考 文 献

- 1 张文. 转子动力学理论基础. 北京: 科学出版社, 1990 (Zhang Wen. Basic theory of rotary dynamics. Beijing: Science Press, 1990(in Chinese))
- 2 王文亮, 杜作润. 结构振动与动态子结构方法. 上海: 复旦大学出版社, 1985 (Wang Wenliang, Du Zuorun. Structural vibration and dynamic substructure method. Shanghai: Fudan University Press, 1985(in Chinese))
- 3 钟一谔, 何衍宗, 王正, 等. 转子动力学. 北京: 清华大学出版社, 1987 (Zhong Yie, He Yanzhong, Wang Zheng, et al. Dynamics of rotor. Beijing: Tsinghua University Press, 1987(in Chinese))
- 4 Meirovitch L. A Separation Principle for Gyroscopic Conservative Systems. *ASME J Vib Acoust*, 1997, 119: 110~119
- 5 钟万勰. 应用力学对偶体系. 北京: 科学出版社, 2002 (Zhong WanXie. Dual system of applied mechanics. Beijing: Science Press, 2002(in Chinese))
- 6 Zhong Wanxie, Wu Zhigang, Gao Qiang, et al. Modal synthesis method for norm computation of decentralized control systems (I). *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, 25 (2): 123~134
- 7 Zhong Wanxie, Wu Zhigang, Gao Qiang, et al. Modal synthesis method for norm computation of decentralized control systems (II). *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, 25(2): 135~142
- 8 张小龙, 何洪庆. 涡轮泵转子的临界转速研究(V)临界转速的有限元法. 推进技术, 2000, 21(3): 40~42 (Zhang Xiaolong, He Hongqing. Critical rotational speed of turbo pump rotors (V) finite element method for critical rotation speed calculation. *Journal of Propulsion Technology*, 2000, 21(3): 40~42(in Chinese))

MODAL SYNTHESIS METHOD OF A LARGE SCALE GYROSCOPIC DYNAMIC SYSTEM

Sui Yongfeng Zhong Wanxie

*(State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of
Technology, Dalian 116023, China)*

Abstract Based on the adjoint symplectic subspace iteration method of gyroscopic system, a modal synthetic method of a large gyroscopic system (MSMGS) was proposed. This method divided the large gyroscopic system into several subsystems, and obtained the first modals of the subsystems via the adjoint symplectic subspace iteration method. The whole transition matrix can be composed of the eigenvector matrices of all the subsystems, and the reduced gyroscopic system can be given through the whole transition matrix. The examples prove that the whole gyroscopic system can be approximated by the reduced gyroscopic system.

Key words an adjoint symplectic subspace iteration method, modal synthetic method, gyroscopic system, finite element, eigenvalue