

含干摩擦多体系统 Lagrange 方程的数值算法*

王剑锋 王 琪

(北京航空航天大学理学院,北京 100083)

摘要 利用第一类 Lagrange 方程建立了固定约束面含干摩擦的多体系统动力学方程,将摩擦力的广义力用矩阵形式描述. 利用增广法,将微分-代数方程转换成常微分方程,并用矩阵形式给出,提高了计算效率. 最后用算例说明该方法的有效性.

关键词 多体系统,摩擦,数值方法

引言

多体系统动力学早期主要研究具有理想约束的多体系统,其动力学方程是光滑的,即动力学方程是连续的或是可微的. 对于光滑的多体系统,无论是理论建模,还是数值算法研究都取得了很多的成果,并将成果应用于多个领域^[1~5]. 随着研究的逐步深入,非光滑多体系统动力学的研究已成为该领域的热点问题之一,所谓非光滑多体系统动力学是指动力学方程是不光滑的或是分段光滑的,导致系统动力学方程非光滑的原因主要有3个方面:1)系统含有干摩擦;2)系统在运动过程中有碰撞现象发生;3)系统在运动过程中结构发生突变. 这方面的研究也已经取得了初步的成果^[6~8]. 由于多体系统动力学方程的非光滑性,给数值计算带来了一定的困难,系统的动力学行为也相对复杂,对于含摩擦的多体系统,还会存在“sticking and sliding”问题.

本文研究具有完整定常约束的多体系统,干摩擦产生于固定约束面. 文献^[6,7]中给出了摩擦力的计算方法,但是没有充分利用第一类拉格朗日方程的特点,不便于数值计算. 本文应用第一类 Lagrange 方程建立系统的动力学方程,将摩擦力的广义力用矩阵形式描述,利用增广法,将微分-代数方程转换成常微分方程,并用矩阵形式给出,以提高计算效率. 数值算例表明,本文给出的方法具有很好的有效性.

1 动力学方程

设系统的广义坐标为 $q \in R^n$ (n 为广义坐标个

数),约束方程为 $\Phi(q)=0, \Phi \in R^m$ (m 为独立的约束方程数),应用第一类 Lagrange 方程可得系统的动力学方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial T}{\partial q} + \Phi_q^T \lambda &= Q \\ \Phi(q) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 T 为系统的动能, $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$, $\Phi_q = \frac{\partial \Phi}{\partial q}$, $\lambda \in R^m$ 为 Lagrange 乘子列向量, Q 为系统的广义力. 将系统的广义力表示成

$$Q = Q_A + Q_f \quad (2)$$

其中 Q_A 是非摩擦力的广义力, Q_f 为摩擦力的广义力,摩擦力的广义力与广义速度和广义坐标以及 Lagrange 乘子有关,并且可表示成

$$Q_f = B\lambda \quad (3)$$

其中 $B \in R^{n \times m}$ 是关于广义坐标和广义速度的矩阵. 对于定常约束的多体系统,其动能可表示为^[3]

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \quad (4)$$

其中 M 为系统的广义质量矩阵. 将式(2)~(4)代入方程(1)并利用增广法和 Baumgarte 稳定化方法^[9]可得方程

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T - B \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_A + \frac{\partial T}{\partial q} - M\dot{q} \\ -\Phi_q \dot{q} - \alpha\Phi - \beta\dot{\Phi} \end{bmatrix} \quad (5)$$

2004-04-13 收到第1稿,2004-05-10 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10272008).

2 动力学方程的矩阵表示法

为了便于求解和计算,有必要对方程(5)做进一步的推导. 由方程(5)可解出

$$\lambda = w^{-1} \left[\Phi_q M^{-1} \left(Q_A + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - M \dot{q} + \Phi_q \dot{q} + \alpha \Phi + \beta \Phi \right) \right] \quad (6)$$

其中 $w = \Phi_q M^{-1} (\Phi_q^T - B)$, $\Phi = \Phi_q \dot{q}$, $\Phi_q = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$, Φ_q 为行满秩矩阵, 设 $(\Phi_q^T - B)$ 为列满秩矩阵, 因此 w 的逆存在. 式(6)中的 $\Phi_q \dot{q}$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$, $M \dot{q}$ 各项可表示成^[3]

$$\begin{aligned} \Phi_q \dot{q} &= [\Phi_{qq} (I \otimes \dot{q})] \dot{q} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} &= \frac{1}{2} [M_q (I \otimes \dot{q})]^T \dot{q} \\ M \dot{q} &= [M_q (I \otimes \dot{q})] \dot{q} \end{aligned}$$

于是系统的动力学方程可表示成

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= v \\ \dot{v} &= M^{-1} [Q_s - (\Phi_q^T - B) \lambda] \\ \lambda &= w^{-1} \left\{ \begin{aligned} &\Phi_q M^{-1} Q_s + [\Phi_{qq} (I \otimes v)] v + \\ &\alpha \Phi_q v + \beta \Phi \end{aligned} \right\} \\ Q_s &= Q_A + \frac{1}{2} [M_q (I \otimes v)]^T v - \\ &\quad [M_q (I \otimes v)] v \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

利用式(7)进行计算, 可避免同一内容的重复计算, 提高计算效率, 用矩阵形式表示系统的动力学方程, 便于编程计算.

3 算例与数值仿真

系统如图 1 所示, 其中滑块和均质杆的质量分别为 $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$, 杆的长度为 $L = 1 \text{ m}$, 弹簧刚度为 k , 阻尼系数为 c , 作用在滑块上的力 $F = F_{\max} \sin \omega t$, 滑块与地面的摩擦系数为 f .

取系统的广义坐标为 $q = [x, y, \theta]^T$, 其中 x, y 为滑块 A (视为质点) 的坐标, θ 为 AB 杆与铅垂线的夹角. 系统的广义质量矩阵、非摩擦力的广义力与摩擦力的广义力分别为

$$M = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 & \frac{L}{2} m_2 \cos \theta \\ 0 & m_1 + m_2 & \frac{L}{2} m_2 \sin \theta \\ \frac{L}{2} m_2 \cos \theta & \frac{L}{2} m_2 \sin \theta & \frac{1}{3} m_2 L^2 \end{bmatrix},$$

$$Q_A = \begin{bmatrix} F - cx - kx \\ -(m_1 + m_2)g \\ -\frac{L}{2} m_2 g \sin \theta \end{bmatrix}, Q_f = \begin{bmatrix} \lambda f \operatorname{sgn}(\dot{x}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

系统的约束方程为: $\Phi = y = 0$. 方程(7)中的 $(\Phi_q^T - B) = [-f \operatorname{sgn}(\dot{x}), 1, 0]^T$.

在本算例中, 地面作用在滑块上的支承力为 $-\lambda$, 因此, 地面作用在滑块上的滑动摩擦力的广义力为 $Q_{fx} = \lambda f \operatorname{sgn}(\dot{x})$.

情况 1 系统参数: $k = 5.0 \text{ N/m}$, $f = 0.2$, $c = 2.0 \text{ Ns/m}$, $F_{\max} = 6.0 \text{ N}$, $\omega = 1.0 \text{ rad/s}$
初始条件: $x_0 = 0.0 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 0.0 \text{ m/s}$

$$\theta_0 = 0.0 \text{ rad}, \dot{\theta}_0 = 0.0 \text{ rad/s}$$

数值仿真结果如图 2 和图 3 所示: 图中可以看出, 系统在运动过程中, 滑块时而运动, 时而停止. 这反映了干摩擦力的作用效应.

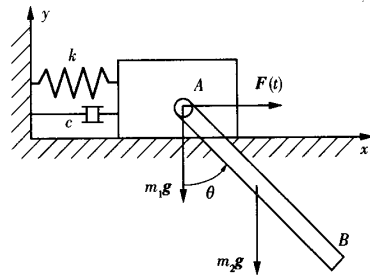


图 1 滑块-摆杆机构

Fig. 1 The slide block-pendulum system

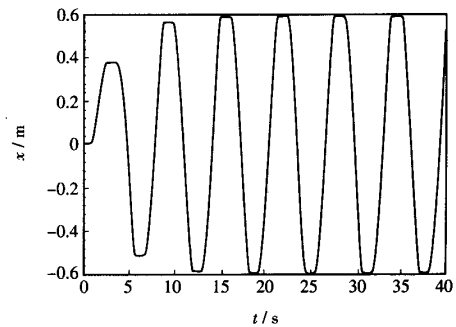


图 2 滑块运动的时间历程

Fig. 2 The displacement histories of slide block

情况 2 系统参数: $k = 0.0 \text{ N/m}$, $f = 0.1$, $c = 0.0 \text{ Ns/m}$, $F_{\max} = 0.0 \text{ N}$, $\omega = 0.0 \text{ rad/s}$
初始条件: $x_0 = 0.0 \text{ m}$, $\dot{x}_0 = 0.0 \text{ m/s}$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}, \dot{\theta}_0 = 0.0 \text{ rad/s}$$

数值仿真结果如图4和图5所示:图中可以看出,由于系统没有水平的主动动力 F ,在运动的后期,当滑块的速度为零且所受的摩擦力小于最大摩擦力时,滑块停止运动,摆杆作定轴转动。

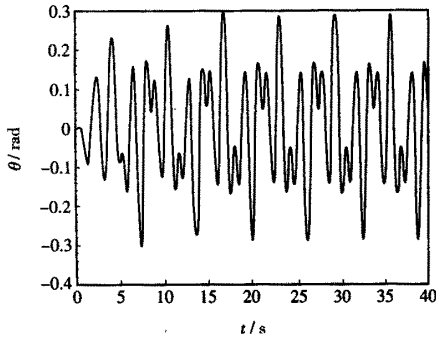


图3 摆杆运动的时间历程

Fig. 3 The angle histories of pendulum

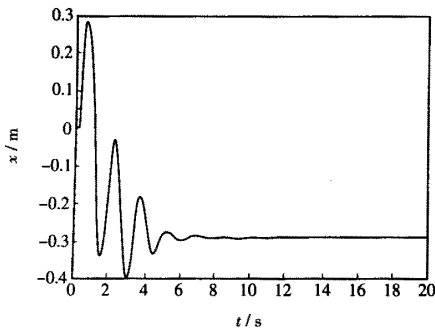


图4 滑动运动的时间历程

Fig. 4 The displacement histories of slide block

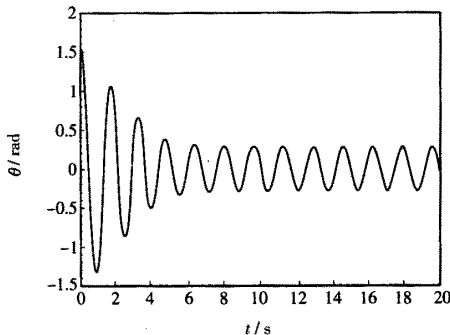


图5 摆杆运动的时间历程

Fig. 5 The angle histories of pendulum

4 结论

本文应用第一类拉格朗日方程,建立了具有固定约束面且含干摩擦的多体系统动力学方程.摩擦力的广义力用矩阵形式给出,为了便于数值计算,系统的动力学方程均用矩阵形式给出,避免了相同内容的重复计算,提高了计算效率。

用数值方法分析多体系统动力学的特性是普遍的方法之一,本文为分析含干摩擦的多体系统动力学特性提供了一种有效方法,最后通过算例与数值仿真,说明该方法的有效性。

本文给出的方法仅适用于含摩擦约束面的支承力方向不改变的情况,因为支承力方向的改变会导致摩擦力的广义力计算的变化,由此会给拉格朗日乘子的计算带来困难.寻找解决该方法的问题也是一个值得研究的问题。

参 考 文 献

- 1 Shabana AA. Dynamics of Multibody systems. New York: John Wiley and Sons Inc, 1989
- 2 洪嘉振. 计算多体系统动力学. 北京: 高等教育出版社, 1999 (Hong Jiazhen. Dynamics computation of multibody systems. Beijing: Advanced Education Press, 1999 (in Chinese))
- 3 王琪, 黄克累, 陆启韶. 树形多体系统动力学的隐式数值算法. 力学学报, 1996, 28(6): 717~725 (Wang Qi, Huang Kelei, Lu Qishao. Implicit numerical algorithm for multibody dynamics with open loop systems. *Acta Mechanica Sinica*, 1996, 28(6): 717~725 (in Chinese))
- 4 王琪, 陆启韶. 多体系统 Lagrange 方程数值算法的研究进展. 力学进展, 2001, 31(1): 9~17 (Wang Qi, Lu Qishao. Advances in the numerical methods for Lagrange's equations of multibody systems. *Advances In Mechanics*, 2001, 31(1): 9~17 (in Chinese))
- 5 Kurdila A, Fitz Coy N, Mcdaniel D, Webb G. Lie algebraic control for stabilization of nonlinear multibody system dynamics Simulation. *Nonlinear Dynamics*, 1999, 20: 55~84
- 6 Klepp HJ. Trial-and-error based method for the Investigation of multi-body systems with Friction. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 197(5): 629~637
- 7 Wosle M, Pfeiffer F. Dynamics of multibody systems with unilateral constraints. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9(3): 473~478
- 8 Lamarque CH, Bastien J. Numerical Study of a forced

- pendulum with friction. *Nonlinear Dynamics*, 2000, 23: 335~352
- 9 潘振宽, 洪嘉振, 等. 多体系统动力学微分-代数方程数值方法. *力学进展*, 1996, 26(1): 28~40 (Pan Zhenkuan, Hong Jiazhen, et al. On numerical algorithms for differential/algebraic equations of motion of multibody systems. *Advances in Mechanics*, 1996, 26(1): 28~40 (in Chinese))

THE NUMERICAL METHOD FOR LAGRANGE'S EQUATIONS OF MULTIBODY SYSTEM WITH DRY FRICTION*

Wang Jianfeng Wang Qi

(School of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract First by using the first kind of Lagrange's equations, this paper presented the dynamical equations of multibody system with friction constraints, and the generalized forces of friction forces were described in the matrix form. Then by using the Baumgarte's method and the augmentation approach, the differential-algebraic equations were converted into the matrix form of differential equation, which can improve the calculating efficiency. Finally the numerical results proved the method to be effective.

Key words multibody system, friction, numerical method