

# 一类附件有大角度跟踪机动卫星的动力学建模与控制

苟兴宇 李铁寿

(北京控制工程研究所, 北京 100080)

**摘要** 采用三刚体七自由度模型来研究带两个大角度跟踪机动附件卫星的动力学与控制问题. 通过引入一些新的张量定义, 在慢速机动假设下, 首先运用 Newton-Euler 方法导出了该系统的矢量动力学方程, 将其转化为标量动力学方程, 并讨论了两个附件之间的耦合问题. 随后设计出卫星姿态-天线跟踪的 PID+前馈控制器, 并对控制方法进行了讨论. 几组算例表明, 该方法控制效果良好.

**关键词** 多体卫星, 张量, 动力学, 控制

## 引言

随着航天工程的蓬勃发展, 卫星所带的动力学附件越来越多, 附件的运动规律也越来越复杂. 例如, 为了满足卫星组网、多目标跟踪等的需要, 卫星可能需要装有一幅或多幅大角度机动天线<sup>[1,2]</sup>. 其中每幅天线常常具有两个以上的刚性转动自由度, 同时卫星姿态与天线跟踪指向都同时需要满足较高的精度要求.

对这类多(柔)体卫星进行动力学建模时有多种建模方法可以选择<sup>[3,4]</sup>. 从所用的数学工具角度分, 可包括矢量力学方法及分析力学方法; 从所采用的力学基本原理角度分, 则可分为 Newton-Euler 法、旋量矩阵法、Lagrange 法、Kane 法及 Roberson-Wittenburg 方法等. 矢量力学的方法具有物理概念清晰的突出优点, 也具有不易获取标量方程的明显缺点, 因此在工程实际中运用受到很大限制. 本文为此引入了一些新的张量定义, 运用矢量力学意义下的 Newton-Euler 方法导出了一类典型多体卫星的动力学方程及其相应的标量方程, 使得有关推导过程大为简化, 可操作性大为增加. 文章随后对两个附件之间的耦合关系展开了讨论, 并设计出系统的复合控制器, 给出几组仿真结果.

## 1 动力学模型

本文不计太阳翼的转动, 将其质量与惯量一并

计入中心刚体, 并假定有两幅天线分别安装于卫星正 X 面及正 Z 面, 以图 1 所示三刚体构型来反映其动力学构型特征. 卫星本体固连坐标系原点  $O$  为  $\epsilon_c$  上固定参考点, 一般选为所有可动附件处于标称位置时系统的质心. 卫星正常三轴对地稳定运行时,  $OZ$  指向地心,  $OY$  轴指向轨道面法向. 附件  $\epsilon_{ax}$  及  $\epsilon_{az}$  固连坐标系原点均设在到本体安装面的中心, 坐标轴设置可取相应附件特征方向.

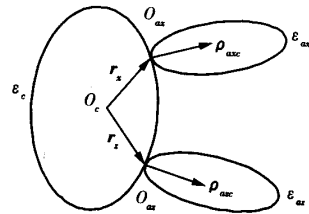


图 1 三刚体模型簇状构型

Fig. 1 Cluster configuration of 3-rigid-body model

通常中心刚体质量、惯量较天线大得多. 为了处理方便, 假定中心体姿态运动为标称姿态附近的小角度运动, 并不计轨道角速度. 则有卫星本体相对于惯性空间的转动角速度向量的坐标列阵为

$$\omega = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}^T \approx \{\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}\}^T \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\theta}_c \quad (1)$$

遵循文献[3]的约定, 以后均采用带下划线的字母来

2004-04-01 收到第 1 稿, 2004-05-09 收到修改稿.

\* 国家“863”资助项目(2002AA773050).

表示矩阵、行阵或列阵。

天线  $\epsilon_{ax}$  及  $\epsilon_{az}$  的运动在其相应的框架坐标系  $\epsilon_{ax}^0$  及  $\epsilon_{az}^0$  中描述。  $\epsilon_{ax}^0$  系  $z$  轴与卫星本体坐标系  $OX$  轴平行,  $x$  轴与卫星本体坐标系  $OY$  轴平行。  $\epsilon_{az}^0$  系三轴定义与卫星本体坐标系相同。 天线处于零方位时, 其固联坐标系  $\epsilon_{ax}$  及  $\epsilon_{az}$  与相应框架坐标系重合。  $\epsilon_{ax}^0$  系经  $2(\beta_x) \rightarrow 1(\alpha_x)$  到  $\epsilon_{ax}$  系,  $\epsilon_{az}^0$  系经  $1(\alpha_z) \rightarrow 2(\beta_z)$  系到  $\epsilon_{az}$  系。 由以上定义容易得到从  $\epsilon_{ax}$  系到  $\epsilon_c$  系的转换矩阵  $C_{ax}$  及从  $\epsilon_{az}$  系到  $\epsilon_c$  系的转换矩阵  $C_{az}$ 。 若令  $\Theta_x = \{\alpha_x, \beta_x\}^T, \Theta_z = \{\alpha_z, \beta_z\}^T$ , 则天线  $\epsilon_{ax}$  与  $\epsilon_{az}$  相对于卫星本体的转动角速度  $\omega_{ax}$  与  $\omega_{az}$  在各自矢量基列阵  $F_{ax} = \{e_{ax1}, e_{ax2}, e_{ax3}\}^T$  及  $F_{az} = \{e_{az1}, e_{az2}, e_{az3}\}^T$  的坐标分量分别满足  $\omega_{ax} = S_x \Theta_x$  及  $\omega_{az} = S_z \Theta_z$ 。 式中  $S_x = \{\{1, 0\}; \{0, \cos\alpha_x\}; \{0, -\sin\alpha_x\}\}, S_z = \{\{\cos\beta_2, 0\}; \{0, 1\}; \{\sin\beta_2, 0\}\}$ 。

假定卫星本体相对于惯性空间的转动角速度  $\omega$  及天线相对于卫星本体的转动角速度  $\omega_{ax}$  与  $\omega_{az}$  均为一阶小量, 忽略二阶小量。 运用 Newton-Eular 法, 采用张量记号及运算, 消去参考点  $O_c$  的线运动, 可导出三刚体构型卫星的姿态及跟踪指向动力学方程为

$$\left[ \begin{aligned} & (I - m r_c \cdot \hat{r}_c) \cdot \dot{\omega} + \\ & (I_{cax} - m_{ax} r_c \cdot \hat{\rho}_{axc}) \cdot \dot{\omega}_{ax} + \\ & (I_{caz} - m_{az} r_c \cdot \hat{\rho}_{azc}) \cdot \dot{\omega}_{az} = \\ & M_0 - \dot{h} - \omega \times h - r_c \cdot F_{sat}, \\ & (I_{axc} - m_{ax} \hat{\rho}_{axc} \cdot r_c) \cdot \dot{\omega} + \\ & (I_{ax} - \frac{m_{ax}^2}{m} \rho_{axc} \cdot \hat{\rho}_{axc}) \cdot \dot{\omega}_{ax} + \\ & \frac{m_{ax} m_{az}}{m} \rho_{axc} \cdot \hat{\rho}_{azc} \cdot \dot{\omega}_{az} = \\ & M_{ax} - \frac{m_{ax}}{m} \rho_{axc} \cdot F_{sat}, \\ & (I_{azc} - m_{az} \hat{\rho}_{azc} \cdot r_c) \cdot \dot{\omega} + \\ & \frac{m_{ax} m_{az}}{m} \rho_{azc} \cdot \hat{\rho}_{axc} \cdot \dot{\omega}_{ax} + \\ & (I_{az} - \frac{m_{az}^2}{m} \rho_{azc} \cdot \hat{\rho}_{azc}) \cdot \dot{\omega}_{az} = \\ & M_{az} - \frac{m_{az}}{m} \rho_{azc} \cdot F_{sat} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

上式第 1 式为系统动量矩方程, 第 2 式为天线  $\epsilon_{ax}$  动

量矩方程, 第 3 式为天线  $\epsilon_{az}$  动量矩方程。

式中

$$I = \int_{\epsilon_c} \rho_c \cdot \hat{\rho}_c dm + \int_{\epsilon_{ax}} (\rho_{ax} + r_x) \cdot (\hat{\rho}_{ax} + \hat{r}_x) dm + \int_{\epsilon_{az}} (\rho_{az} + r_z) \cdot (\hat{\rho}_{az} + \hat{r}_z) dm \quad (3)$$

为卫星整体的转动惯量, 上标“ $\sim$ ”用于表达张量的共轭。  $m = m_c + m_{ax} + m_{az}$  为卫星整体质量。

$$r_c = \frac{1}{m} [m_c \rho_{cc} + m_{ax} (r_x + \rho_{axc}) + m_{az} (r_z + \rho_{azc})] = F_c^T \tilde{r} F_c \quad (4)$$

为卫星整体质心向量对应的斜对称张量。 式中上标“ $\sim$ ”表示相应张量的斜对称坐标阵,  $F_c$  为  $\epsilon_c$  系的矢量基列阵。

$$I_{cax} = \int_{\epsilon_{ax}} (r_x + \rho_{ax}) \cdot \hat{\rho}_{ax} dm = F_c^T I_{cax} F_{ax} \quad (5)$$

$$I_{caz} = \int_{\epsilon_{az}} (r_z + \rho_{az}) \cdot \hat{\rho}_{az} dm = F_c^T I_{caz} F_{az} \quad (6)$$

$$I_{axc} = \int_{\epsilon_{ax}} \hat{\rho}_{ax} \cdot (r_x + \rho_{ax}) dm = F_c^T I_{axc} F_c \quad (7)$$

$$I_{azc} = \int_{\epsilon_{az}} \hat{\rho}_{az} \cdot (r_z + \rho_{az}) dm = F_c^T I_{azc} F_c \quad (8)$$

以上 4 式分别为卫星本体与天线, 或天线与本体的耦合惯量张量。

上列诸式中,  $\dot{h} + \omega \times h$  为星体中动量轮系的角动量变化率;  $M_0$  为作用在星本体上的外干扰力矩, 包括喷气控制力矩、轨控偏心力矩、重力梯度力矩、气动力矩、光压力矩、剩磁力矩及磁控力矩等;  $F_{sat}$  为作用在星本体上的外作用力, 包括轨控推力、大气阻力、光压作用等。

若进一步忽略参考点  $O_c$  的运动, 或换言之认为天线机动对系统质心影响可以忽略不记, 则(2)式简化为

$$\begin{cases} I \cdot \dot{\omega} + I_{cax} \cdot \dot{\omega}_{ax} + I_{caz} \cdot \dot{\omega}_{az} = M_c \\ I_{axc} \cdot \dot{\omega} + I_{ax} \cdot \dot{\omega}_{ax} = M_{ax} \\ I_{azc} \cdot \dot{\omega} + I_{az} \cdot \dot{\omega}_{az} = M_{az} \end{cases} \quad (9)$$

上述矢量基列阵满足等量关系:  $F_c \cdot F_c^T = F_{ax} \cdot F_{ax}^T = F_{az} \cdot F_{az}^T = E, F_c \cdot F_{ax}^T = C_{ax}, F_c \cdot F_{az}^T = C_{az}$ , 及  $F_{ax} \cdot F_{az}^T = C_{ax}^T C_{az}$  等。 利用这些关系式容易得到上述简化模型(9)的坐标矩阵格式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}_{cax} \underline{S}_x & \mathbf{I}_{caz} \underline{S}_z \\ \underline{S}_x^T \mathbf{I}_{aux} & \underline{S}_x^T \mathbf{I}_{ax} \underline{S}_x & 0 \\ \underline{S}_z^T \mathbf{I}_{azc} & 0 & \underline{S}_z^T \mathbf{I}_{az} \underline{S}_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\Theta}_c \\ \underline{\Theta}_x \\ \underline{\Theta}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{M}_c \\ \underline{M}_{\alpha\beta x} \\ \underline{M}_{\alpha\beta z} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

这是一个七自由度十四阶系统，式子左边的广义惯量坐标矩阵(定义为  $Z_{gs}$ )是一个对称矩阵,但它具有

$$\mathbf{I}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - m \tilde{r}_c \tilde{r}_c^T & (\underline{I}_{cax} - m_{ax} \tilde{r}_c \underline{C}_{ax} \tilde{\rho}_{axc}^T) \underline{S}_x & \underline{I}_{caz} - m_{ax} \tilde{r}_c \underline{C}_{az} \tilde{\rho}_{azc}^T \underline{S}_z \\ \underline{S}_x^T (\underline{I}_{aux} - m_{ax} \tilde{\rho}_{aux}^T \underline{C}_{ax} \tilde{r}_c) & \underline{S}_x^T (\underline{I}_{ax} - \frac{m_{ax}^2}{m} \tilde{\rho}_{aux} \tilde{\rho}_{aux}^T) \underline{S}_x & \frac{m_{ax} m_{az}}{m} \underline{S}_x^T \tilde{\rho}_{aux} \underline{C}_{ax}^T \underline{C}_{az} \tilde{\rho}_{azc}^T \underline{S}_z \\ \underline{S}_z^T (\underline{I}_{azc} - m_{az} \tilde{\rho}_{azc}^T \underline{C}_{az}^T \tilde{r}_c) & \frac{m_{ax} m_{az}}{m} \underline{S}_z^T \tilde{\rho}_{azc} \underline{C}_{ax}^T \underline{C}_{az} \tilde{\rho}_{aux}^T \underline{S}_x & \underline{S}_z^T (\underline{I}_{az} - \frac{m_{az}^2}{m} \tilde{\rho}_{azc} \tilde{\rho}_{azc}^T) \underline{S}_z \end{bmatrix} \quad (11)$$

显然它较  $\underline{I}_{gs}$  复杂得多,但其性质与  $\underline{I}_{gs}$  一样,仍为对称、时变、非线性矩阵。

### 2 控制器

假定忽略角速度的高阶小量而且天线受力矩电机驱动。令  $\underline{\sigma} = \{\underline{\Theta}_c^T, \underline{\Theta}_x^T, \underline{\Theta}_z^T\}^T$ , 则模型(10)或(11)可统一写成  $\underline{I}_{gs}(\underline{\sigma}) \ddot{\underline{\sigma}} = \underline{M}$ , 其中广义惯量阵  $\underline{I}_{gs}(\underline{\sigma})$  的表达式十分复杂,以其第 1 行、第 1 列元素为例

$$e_{11}(\alpha_x, \beta_x, \alpha_z, \beta_z) = \sum_{i,j,k,l=-2}^2 a_{ijkl} \sin(i\alpha_x + j\alpha_z + k\beta_x + l\beta_z) + \sum_{i,j,k,l=-2}^2 b_{ijkl} \cos(i\alpha_x + j\alpha_z + k\beta_x + l\beta_z) \quad (12)$$

即使去掉部分系数为零的项,其构成项数也有 74 项之多。从这组表达式可见,两幅天线 4 个自由度的运动构成了对卫星姿态的复杂扰动,而且这 4 个自由度的运动本身也是耦合在一起的。而在忽略参考点  $O_c$  的运动的情况下,两者不耦合。

对卫星本体控制小回路而言,天线的运动可视为外部扰动。对天线控制小回路而言,卫星的运动可视为外部扰动,天线绕两个转轴的运动互相耦合。为了保证天线跟踪指向控制的快速性,天线控制的带宽应远大于卫星本体控制的带宽。令  $\underline{L}(\underline{\sigma}) = \underline{I}_{gs}^{-1}(\underline{\sigma})$ , 并令  $\underline{\sigma}_c, \underline{\sigma}_x$  及  $\underline{\sigma}_z$  分别表示指令角、指令角速度及指令角加速度,则系统受控标准模型为

$$\begin{Bmatrix} \underline{\ddot{\sigma}} \\ \underline{\dot{\sigma}} \\ \underline{\Sigma} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & -\underline{E} & \underline{0} \\ \underline{LK}_p & \underline{LK}_d & \underline{L} \\ \underline{K}_i & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\sigma}_c & -\underline{\sigma} \\ \underline{\dot{\sigma}} & -\underline{\dot{\sigma}} \\ \underline{\Sigma} \end{Bmatrix} +$$

时变及非线性特征。式子右边  $\underline{M}_{\alpha\beta x} = \{M_{\alpha x}, M_{\beta x}\}^T = \underline{S}_x^T \underline{M}_{ax}$  及  $\underline{M}_{\alpha\beta z} = \{M_{\alpha z}, M_{\beta z}\}^T = \underline{S}_z^T \underline{M}_{az}$  分别为分解到驱动 X 天线两轴上的力矩及驱动 Z 天线两轴上的力矩。

若计入参考点  $O_c$  的运动,则模型(2)对应的广义惯量坐标矩阵写成

$$\begin{bmatrix} \underline{E} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{LD} & \underline{LU} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\dot{\sigma}}_c \\ \underline{\dot{\sigma}}_x \\ \underline{\dot{\sigma}}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{L} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \{M_{ext}\} \quad (13)$$

这是一个动力学-控制一体化的标准模型,与能控标准型及能观标准型相区别。式中,  $\underline{\Sigma}$  为因积分控制而新引入的状态变量,  $\underline{0}$  为所有元素均为 0 的矩阵或列向量,  $\underline{D}$  为  $\underline{I}_{gs}$  对角在线元素的估计值所构成的对角阵,  $\underline{U}$  为  $\underline{I}_{gs}$  非对角在线元素的估计值所构成的矩阵,  $\underline{M}_{ext}$  为外干扰力矩阵。  $\underline{K}_p, \underline{K}_i$  及  $\underline{K}_d$  为 PID 控制器矩阵。受控标准型(13)是最一般形式的动力学加 PID 及前馈控制器模型。从工程实用的角度考虑,进行细节的不同取舍,可以得到一系列各不相同的控制方法。

### 3 受控标准型仿真

取卫星本体质量为  $m_c = 597 \text{ kg}$ , 质心位置为  $\rho_c = \{-88.6, -0.4, -3.0\}^T \text{ mm}$ , 惯量矩阵为  $\underline{I}_c = \{\{150.4, 7.3, 5.7\}; \{7.3, 154, 1, 3.7\}; \{5.7, 3.7, 159.1\}\}^T \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。X 天线在本体上安装面中心位置矢量为  $\underline{r}_{ax} = \{800.4, 2.3, -946.0\}^T \text{ mm}$ , Z 天线在本体上安装面中心位置矢量为  $\underline{r}_{az} = \{800.4, 2.3, 934.0\}^T \text{ mm}$ 。上述与坐标系相关的量均在  $\epsilon_c$  系中表达。天线有关参数为:前向天线质量  $m_{ax} = 17.5 \text{ kg}$ ; 质心位置矢量为  $\rho_{ax} = \{11.7, 3.1, 140\}^T \text{ mm}$ , 惯量矩阵为  $\underline{I}_{ax} = \text{diag}\{1.4, 1.4, 0.7\} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。与坐标系相关的量均在  $\epsilon_{ax}$  系中表达。指地天线质量  $m_{az}$ , 质心位置  $\rho_{az}$  及惯量矩阵  $\underline{I}_{az}$  取值与前向天线相同,但与坐标系相关的量均在  $\epsilon_{az}$  系中表达。以下仿真中选择 PID

+全前馈控制方法,其中 $\underline{D}$ 及 $\underline{U}$ 采用简化取法,估计量 $\hat{\sigma}$ 与 $\hat{\sigma}$ 均取为指令值.假定卫星在惯性空间保持零姿态三轴稳定, $Z$ 天线两个自由度均跟踪图2所示信号, $X$ 天线在下图基础上去掉恒速段,不计敏感器与执行机构噪声.七个自由度的响应误差曲线见图3.从该图可见,控制效果相当满意.

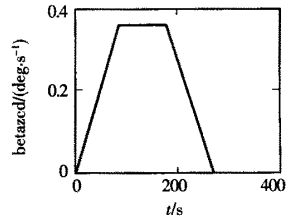


图2 被跟踪的指令信号  
Fig.2 Tracked signal

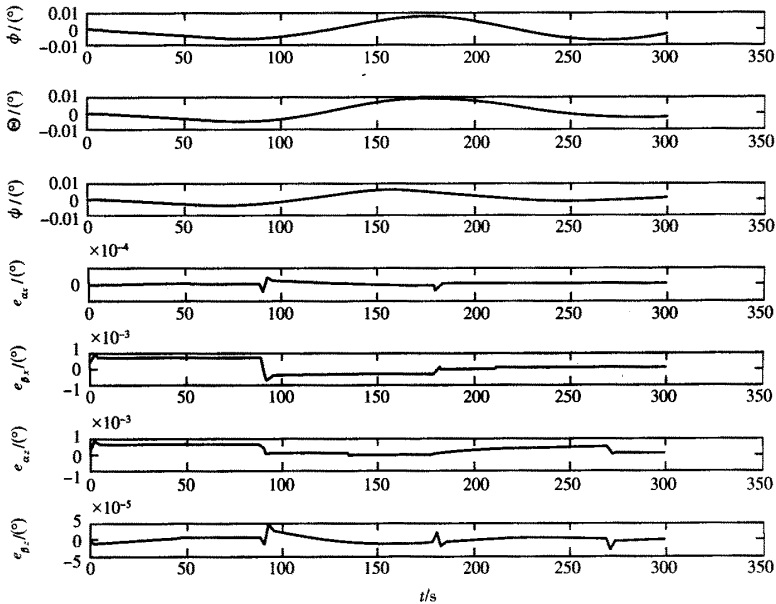


图3 三刚体卫星七个自由度的响应误差曲线  
Fig.3 Error curves of the responses of the 7DOF of the 3-rigid-body satellite

参 考 文 献

- 1 曾海波. 挠性多体卫星指向控制设计研究. [博士论文]. 中国空间技术研究院北京控制工程研究所, 2003 (Zeng Haibu. Study on the Design of Flexible Multibody Satellite Pointing Control. [Ph D Thesis]. Beijing: Beijing Institute of Control Engineering, Chinese Academy of Space Technology, 2003 (in Chinese))
- 2 齐春子. TDRS 多变量自适应控制方法研究. [博士论文]. 中国空间技术研究院北京控制工程研究所, 1999 (Qi Chunzi. Study on Multivariable Adaptive Control Method in TDRS. [Ph D Thesis]. Beijing: Beijing Institute of Control Engineering, Chinese Academy of Space Technology, 1999 (in Chinese))
- 3 洪嘉振著. 计算多体系统动力学. 北京: 高等教育出版社, 1999 (Hong Jiazhen. Computational Dynamics of Multibody Systems. Beijing: Higher Education Press, 1999 (in Chinese))
- 4 马兴瑞, 王本利, 苟兴宇, 等著. 航天器动力学——若干问题进展及应用. 北京: 科学出版社, 2001 (Ma Xingrui, Wang Benli, Gou Xingyu, et al. Dynamics of Spacecraft: Development and Applications of Several Problems. Beijing: Science Press, 2001 (in Chinese))

## DYNAMICAL MODELING AND CONTROL OF SATELLITE WITH APPENDAGES TRACKING BIG ANGLES\*

Gou Xingyu Li Tieshou

*(Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100080, China)*

**Abstract** Dynamical modeling and control of a satellite with two antennae tracking big angles were studied by an three-rigid-body model with seven degrees. Through defining several new tensors and based on the assumption that the antennae track objects slowly, the vector dynamical equations were derived by Newton-Eular Method, and the corresponding scalar equations were obtained. The coupling effect between the two antennae was discussed. The PID adding forward feedback controller of the satellite attitudes and the antennae tracking were designed, and the control methods were discussed. Several numerical simulations show that the controller is successful.

**Key words** multi-body satellite, tensor, dynamics, control