第 2 卷第 2 期
2004 年 6 月
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 2 No. 2
Jun. 2004

含摩擦的空间多刚体系统的冲击问题*

姚文莉[1,2]　陈　滨[2]　刘才山[2]
(1. 山东科技大学基础部,泰安　271019)
(2. 北京大学力学与工程科学系,北京　100871)

摘要　研究了受到打击的空间多刚体系统考虑库仑摩擦时动力学的求解方法. 在引入新的无量纲的时间参数后,通过建立相应的动量-冲量的一阶微分方程,将在趋近于零的冲击区间的讨论变为在有限区间中来分段研究含滑动-粘滞的冲击过程,得到了受到打击的空间离散系统考虑库仑摩擦时的动力学的求解方法.

关键词　空间多刚体系统,冲击,动量-冲量,分段

前言

对于理想约束的多刚体系统,冲击前后的广义速度之间的关系可以通过积分无限小的冲击过程来得到,但当某点约束处的摩擦不能忽略时,由于该摩擦作用点的滑动速度的变化及粘滞现象会带来相应的摩擦力方向的变化,所以按照经典的多体系统的冲击动力学的方法,无法处理在无限小的冲击时间内摩擦力的积分问题.

在对相近的碰撞问题的研究中,Wittaker[1]分析了两个刚体之间的三维斜碰撞,他利用 Coulomb 摩擦定律作为联系法向和切向冲量之间的关系式,虽然这种观点长期以来被广泛接受,但它的局限性在于,它只适合于碰撞过程中刚体间相对滑动方向不变的特殊情形. 而 Kane[2]首次研究了考虑摩擦的多体系统的碰撞问题,他应用了经典的碰撞理论及 Whittaker 假定,但研究中发现了碰撞过程中系统的能量有时会增加的奇怪现象,明显与物理规律相悖,即所谓的"Kane 的动力学之谜". 研究发现:这些问题出现的主要原因就是忽略了切向的滑动换向、粘滞而带来的摩擦力大小、方向的变化. Keller[3]研究了考虑摩擦的三维刚体的碰撞问题,他将变化规律不明的法向冲量取作自变量,建立了碰撞过程中物体相对滑动速度的微分方程,提出切向冲量随滑动方向改变的计算方法. Smith[4]用此方法重新计算了 Kane 的算例,得到了合理的结果.

借助于 Keller 在三维刚体的碰撞问题中处理摩擦力的方法,在引入新的无量纲的时间参数后,通过建立相应的关于动量-冲量的一阶微分方程,本文将趋近于零的冲击区间的讨论变为在有限区间中来分段研究含滑动-粘滞的冲击过程,从而得到了受到打击的空间离散系统考虑库仑摩擦时的动力学的求解方法,即无需回到繁琐的变尺度的微分方程的求解过程,根据冲击前的初始状态便可以得到冲击后系统的动力学响应.

1　多刚体系统冲击过程的动力学方程

考虑有 n 个自由度的完整多刚体系统,该系统除一个摩擦系数为 μ 的非理想约束外,其余均为理想的双面约束,记其广义坐标为 $q_1, q_2, \cdots, q_n$,记非理想约束处的摩擦力为 $\boldsymbol{F}_B^\tau$,相应的法向作用力为 $\boldsymbol{F}_B^n$,设系统在 A 点受到冲击,打击冲量为 I,受到的打击力为 $\boldsymbol{F}_A$. A 点及 B 点的矢径分别为 r_A, r_B,且有 $r_A = r_A(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$,$r_B = r_B(q_1, q_2 \cdots, q_n, t)$.
建立受到冲击的多刚体系统的动力学方程为

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ki}\ddot{q}_k + \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,q;i]\dot{q}_k\dot{q}_p = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_i} - \frac{\partial B_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k - \frac{\partial B_i}{\partial t} + \frac{\partial T_0}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ki}}{\partial t}\dot{q}_k + Q_i + Q_A^i + Q_B^{\tau(i)} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

记动能

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

2004-03-15 收到第 1 稿,2004-05-02 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(10272002).

其中 $T_2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$，$T_1=\sum_{i=1}^{n}B_i\dot{q}_i$，$T_0$ 为广义速度的零次项，为广义坐标和时间的函数；Q_i 是系统受到的与打击无关的广义常规主动力.

$Q_A^i=\boldsymbol{F}_A\cdot\frac{\partial r_A}{\partial q_i}$ 为打击力的广义力；

$Q_B^{\tau(i)}=\boldsymbol{F}_B^{\tau}\cdot\frac{\partial r_B}{\partial q_i}$ 是 B 点摩擦力的广义力.

下面求 B 点处理想的法向约束力：

解除 B 点处的法向约束，代之以法向力 $\boldsymbol{F}_B^n$，设增加的广义坐标为 q_{n+1}，所取的广义坐标分别沿 B 点处的法向. 得到含理想的法向约束力的运动微分方程为

$$\sum_{k=1}^{n}A_{ki}\ddot{q}_k+\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,p;i]\dot{q}_k\dot{q}_p=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k^{'}}{\partial q_i}-\frac{\partial B_i^{'}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k-\frac{\partial B_i^{'}}{\partial t}+\frac{\partial T_0}{\partial q_i}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ki}}{\partial t}\dot{q}_k+Q_i+Q_A^i+Q_B^{\tau(i)}+Q_B^{n(i)}$$

$$i=n+1 \tag{2}$$

其中 $Q_B^{n(i)}=\boldsymbol{F}_B^n\cdot\frac{\partial r_B}{\partial q_i}$ 为 B 点处相对于广义坐标 q_{n+1} 的广义力.

2 冲击过程的动力学方程的简化

引入新的时间参数 t'，令 $t'=\frac{t-t_0}{\Delta t}$，则在新的参数下，冲击的区间[0,1]为有限区间. 则 $\dot{q}_k(t)=\dot{q}_k(\Delta tt'+t_0)=\dot{q}_k(t')$，$\ddot{q}_k(t)=\frac{1}{\Delta t}\frac{\mathrm{d}\dot{q}_k}{\mathrm{d}t'}$，用新的变量变换方程(1)和(2)，并令 $\Delta t\to 0$，则在前述方程中，除含加速度及与打击有关的项，其余各项均为有限量，与 Δt 相乘后趋于零，又 $\Delta t\mathrm{d}t'=\mathrm{d}t$，可令 $\boldsymbol{F}_A\mathrm{d}t=\mathrm{d}\boldsymbol{P}_A$，$\boldsymbol{F}_B^{\tau}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\boldsymbol{P}_B^{\tau}$，$\boldsymbol{F}_B^{n}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\boldsymbol{P}_B^{n}$，这些量分别为打击点 A 及摩擦点 B 的打击及摩擦元冲量. 因此方程(1)，(2)可化为

$$\sum_{k=1}^{n}A_{ki}\mathrm{d}\dot{q}_k=\mathrm{d}\boldsymbol{P}_A\cdot\frac{\partial r_A}{\partial \dot{q}_i}+\mathrm{d}\boldsymbol{P}_B^{\tau}\cdot\frac{\partial r_B}{\partial \dot{q}_i}\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n}A_{ki}\mathrm{d}\dot{q}_k=\mathrm{d}\boldsymbol{P}_A\cdot\frac{\partial r_A}{\partial \dot{q}_i}+\mathrm{d}\boldsymbol{P}_B^{\tau}\cdot\frac{\partial r_B}{\partial \dot{q}_i}+\mathrm{d}\boldsymbol{P}_B^{n}\cdot\frac{\partial r_B}{\partial \dot{q}_i}\quad (i=n+1) \tag{4}$$

3 冲击过程讨论

在考虑摩擦的 B 点处建立空间直角坐标系 $Bxyz$，其中 z 轴沿 B 点处的法线方向，x 轴及 y 轴均在 B 点处的切平面内，设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为沿 x,y,z 轴的单位矢量，ϕ,θ 分别是打击力 $\boldsymbol{F}_A$ 与 x 轴及 z 轴的夹角，则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{P}_A=\mathrm{d}I\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{i}+\mathrm{d}I\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{j}+\mathrm{d}I\cos\theta\boldsymbol{K}$$

B 点处速度 $\boldsymbol{V}_B$ 在切平面内的分量 $\boldsymbol{V}_B^{\tau}$ 为

$$\boldsymbol{V}_B^{\tau}=\dot{x}_B\boldsymbol{i}+\dot{y}_B\boldsymbol{j}$$

令

$$s=\sqrt{\dot{x}_B^2+\dot{y}_B^2},$$

$$\cos\gamma=\frac{\dot{x}_B}{\sqrt{\dot{x}_B^2+\dot{y}_B^2}},\sin\gamma=\frac{\dot{y}_B}{\sqrt{\dot{x}_B^2+\dot{y}_B^2}}$$

则 B 点处的库仑摩擦可以如下表达

$$\sqrt{\mathrm{d}P_x^2+\mathrm{d}P_y^2}<\mu\mathrm{d}P_B^z\qquad(s=0)$$

$$\mathrm{d}P_x=-\mu\cos\gamma\,\mathrm{sgn}(\mathrm{d}P_B^z)\mathrm{d}P_B^z$$

$$\mathrm{d}P_y=-\mu\sin\gamma\,\mathrm{sgn}(\mathrm{d}P_B^z)\mathrm{d}P_B^z$$

$$(s>0)$$

其中 $\mathrm{d}P_x,\mathrm{d}P_y,\mathrm{d}P_B^z$ 分别为 $\mathrm{d}\boldsymbol{P}_B$ 在 x,y 及 z 轴上的投影，$\mathrm{sgn}(\mathrm{d}P_B^z)$ 为 $\mathrm{d}P_B^z$ 的符号函数，$\mathrm{d}P_B^z$ 可以为正、负或零，表明 B 点处的约束为双面约束.

$$令\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{n1} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{q}}=(\mathrm{d}\dot{q}_1\cdots\mathrm{d}\dot{q}_n)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial\dot{x}_A}{\partial\dot{q}_i}+\\ \sin\theta\sin\phi\frac{\partial\dot{y}_A}{\partial\dot{q}_i}+\cos\theta\frac{\partial\dot{z}_A}{\partial\dot{q}_i})\end{bmatrix}_{n\times1}$$

$$\boldsymbol{\beta}=\left[\left(-\cos\gamma\frac{\partial\dot{x}_B}{\partial\dot{q}_i}-\sin\gamma\frac{\partial\dot{y}_B}{\partial\dot{q}_i}+1\right)\right]_{n\times1}$$

$$\boldsymbol{A}_{n+1}=[A_{1,n+1},A_{2,n+1},\cdots,A_{n,n+1}]^{\mathrm{T}}$$

$$\alpha^*=\sin\theta\cos\phi\frac{\partial\dot{x}_B}{\partial\dot{q}_{n+1}}+\sin\theta\sin\phi\frac{\partial\dot{y}_A}{\partial\dot{q}_{n+1}}+\cos\theta\frac{\partial\dot{z}_A}{\partial\dot{q}_{n+1}}$$

$$\beta^*=-\left(\cos\gamma\frac{\partial\dot{x}_B}{\partial\dot{q}_{n+1}}+\sin\gamma\frac{\partial\dot{y}_B}{\partial\dot{q}_{n+1}}\right)$$

则方程(3)与(4)可以写为矩阵形式

$$\boldsymbol{A}\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{\alpha}\mathrm{d}I+\mu\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}P_B^z \tag{5}$$

$$\boldsymbol{A}_{n+1}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{q}}=\alpha^*\mathrm{d}I+\mu\beta^*\mathrm{d}P_B^z+\mathrm{d}P_B^z \tag{6}$$

由式(5)，(6)，得

$$\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}\frac{\alpha^*-\boldsymbol{A}_{n+1}^{T}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{A}_{n+1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}-\mu\beta^*-1}\right)\mathrm{d}I \tag{7}$$

B 点速度的微分为

$$\mathrm{d}\dot{x}_B = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \dot{x}_B}{\partial \dot{q}_i}\mathrm{d}\dot{q}_i = \boldsymbol{x}_B^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{q}} =$$

$$\boldsymbol{X}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\beta}\frac{\alpha^* - \boldsymbol{A}_{n+1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})}{\boldsymbol{A}_{n+1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta} - \mu\beta^* - 1})\mathrm{d}I$$

$$\mathrm{d}\dot{y}_B = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \dot{y}_B}{\partial \dot{q}}\mathrm{d}\dot{q}_i = \boldsymbol{y}_B^{T}\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{q}} =$$

$$\boldsymbol{y}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\beta}\frac{\alpha^* - \boldsymbol{A}_{n+1}^{T}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})}{\boldsymbol{A}_{n+1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}) - \mu\beta^* - 1})\mathrm{d}I$$

其中

$$\boldsymbol{x}_B = \left[\frac{\partial \dot{x}_B}{\partial \dot{q}_1}, \frac{\partial \dot{x}_B}{\partial \dot{q}_2}, \cdots, \frac{\partial \dot{x}_B}{\partial \dot{q}_n}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{y}_B = \left[\frac{\partial \dot{x}_B}{\partial \dot{q}_1}, \frac{\partial \dot{x}_B}{\partial \dot{q}_2}, \cdots, \frac{\partial \dot{x}_B}{\partial \dot{q}_n}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$g_1(\gamma) = \boldsymbol{x}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\left[\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\beta}\frac{\alpha^* - \boldsymbol{A}_{n+1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})}{\boldsymbol{A}_{n+1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}) - \mu\beta * - 1}\right]$$

令

$$g_2(\gamma) = \boldsymbol{y}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\left[\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\beta}\frac{\alpha^* - \boldsymbol{A}_{n+1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})}{\boldsymbol{A}_{n+1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}) - \mu\beta * - 1}\right]$$

令则以 B 点速度表示的滑动过程的运动方程如下

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\dot{x}_B &= g_1(\gamma,\mu)\mathrm{d}I \\ \mathrm{d}\dot{y}_B &= g_2(\gamma,\mu)\mathrm{d}I\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_B = s\cos\gamma \Rightarrow \mathrm{d}\dot{x}_B = \mathrm{d}s\cos\gamma - s\sin\gamma\mathrm{d}\gamma \\ \dot{y}_B = s\sin\gamma \Rightarrow \mathrm{d}\dot{y}_B = \mathrm{d}s\sin\gamma + s\cos\gamma\mathrm{d}\gamma\end{cases}$$

故

$$\begin{cases}s\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}I} = g_2\cos\gamma - g_1\sin\gamma \\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}I} = g_1\cos\gamma + g_2\sin\gamma\end{cases} \tag{9}$$

则可求得 B 点的速度大小

$$\frac{s}{s(o)} = \exp(\int_{\gamma(0)}^{\gamma} \frac{g_2\sin\gamma + g_1\cos\gamma}{g_2\cos\gamma - g_1\sin\gamma}\mathrm{d}\gamma) \tag{10}$$

当 $s=\sqrt{\dot{x}_B^2+\dot{y}_B^2}=0$ 时,

$$g_2(\gamma,\mu)\cos\gamma - g_1(\gamma,\mu)\sin\gamma = 0 \tag{11}$$

此时滑动停止,方程(11)的解 $\gamma=\gamma_h$ 为滑动停止时的速度方向. 此时

$$I_h = \int_{\gamma(0)}^{\gamma_h} \{[s(o)\exp(\int_{\gamma(0)}^{\gamma} (g_2\sin\gamma + g_1\cos\gamma)/ (g_2\cos\gamma - g_1\sin\gamma)\mathrm{d}\gamma)]/ (g_2\cos\gamma - g_1\sin\gamma)\}\mathrm{d}\gamma \tag{12}$$

若滑动停止后,B 点粘滞,则 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}I=0$,由方程组(9)的第 2 式得

$$g_1(\gamma_h,\mu)\cos\gamma_h + g_2(\gamma_h,\mu)\sin\gamma_h = 0 \tag{13}$$

由此可求出 $\mu=\bar{\mu}$ 为系统的粘滞系数.

若摩擦系数 $\mu\geq\bar{\mu}$ 且 $I_s<I$,则 B 点的运动为粘滞;若 $\mu<\bar{\mu}$,则滑动在停止之后会迅速恢复,新的滑动方向确定如下

由(9)可以得到:当滑动停止时

$$g_2(\gamma_h)\cos\gamma_h - g_1(\gamma_h)\sin\gamma_h = 0,\text{即}$$

$\dfrac{\mathrm{d}\dot{y}_B}{\mathrm{d}\dot{x}_B}=\mathrm{tg}\gamma_h=\dfrac{\dot{y}_B}{\dot{x}_B}$,可看出此时 B 点的滑动加速度方向与速度方向一致,则任何停止后第二阶段的滑动中,滑动方向是唯一的.

4 冲击过程的计算步骤

第 1 步:计算冲击的初始切向速度

$$s_0 = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2}$$

第 2 步:若 $s_0=0$,则解方程组

$$g_1(\gamma_h,\bar{\mu})\cos\gamma_h + g_2(\gamma_h,\bar{\mu})\sin\gamma_h = 0$$

$$g_2(\gamma_h,\bar{\mu})\cos\gamma_h - g_1(\gamma_h,\bar{\mu})\sin\gamma_h = 0$$

计算 $\bar{\mu}$.

若 $\mu\geq|\bar{\mu}|$,则系统受冲击期间处于粘滞状态. 以 $\bar{\mu}$,γ_h 代替方程(7)中的 μ,γ,对冲量积分,积分限为 $0\to I$,则可以得到冲击前后的广义速度变化

$$\Delta\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{\alpha} + \bar{\mu}\boldsymbol{\beta}\frac{\alpha^* - \boldsymbol{A}_{n+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{A}_{n+1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta} - \mu\beta^* - 1})I$$

若 $\mu<|\bar{\mu}|$,则 B 点将会滑动,联立(7)及(9),在方程(7)的两边积分,冲量 $\mathrm{d}I$ 的积分区间是:$[0,I]$,则可以得到冲击前后的广义速度变化.

第 3 步:若 $s_0>0$,由方程(12)求出滑动停止时的冲量 I_h.

若 $I_h\geq I$,则表明在冲击区间,B 点连续滑动.

联立(7)及(9),在方程(7)的两边积分,冲量 $\mathrm{d}I$ 的积分区间是:$[0,I]$,我们可以得到冲击后系统的广义速度. 若 $I_s<I$,则表明在冲击区间,B 点连续滑动一段后,速度会变为零.

若 $\mu\geq|\bar{\mu}|$,则停滞;若 $\mu<|\bar{\mu}|$,则 B 点会按方向 $\hat{\gamma}_h=\hat{\gamma}_h(\mu)$ 继续滑动直至冲击结束. 其中,$\hat{\gamma}_h$ 为 $g_2(\gamma,\mu)\cos\gamma-g_1(\gamma,\mu)\sin\gamma=0$ 的解.

5 结论

本文可以看作 Keller 处理摩擦力问题在多刚体冲击问题的推广. 应用本文的方法,无需回到变尺度的微分方程的求解过程,只需知道系统的冲击的初始速度及打击冲量大小,便可以求出冲击后系统的速度响应.

注　文中要求打击冲量在冲击过程中是单调上升的.

参考文献

1 Whittaker ET. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambrideg: Cambridge University Press, 1904

2 Kane TR, Levison DA. Dynamics: Theory and Applications. New York: McGraw－Hill, 1985. 150～180

3 Keller JB. Impact with Friction. *ASME J Applied Mechanics*, 1986, 53: 1～4

4 Smith CE. Predicting rebounds using rigid － body dynamics. *ASME J Applied Mechanics*, 1991, 58: 754～758

5 黄昭度，钟奉娥．工程系统分析力学．北京：高等教育出版社，1992. 94～100 (Huang Zhaodu, Zhong Fenge. Analytical Mechanics in Engineering Systems. Beijing: Higher Education Press, 1992. 94～100(in Chinese))

6 STRONGE WJ. Generalized Impulse and Momentum Applied to MultibodyImpact with Friction. *Mechanics of Structures and Machines*, 2001, 29(2): 239～260

7 刘延柱．刚性椭球对固定面的三维摩擦碰撞．力学学报，1997, 29(6): 726～732 (Lin Yanzhu. Three-Oimensional impact of a rigid ellipsold on fixed surface with friction. *ACTAMECHANICASINICA*, 1997, 29(6): 726～732(in Chinese))

IMPULSIVE DYNAMICS OF SPATIAL MULTI-RIGID-BODY SYSTEMS WITH FRICTION*

Yao Wenli[1,2] Chen Bin[2] Liu Caishan[2]

(1. *Department of Basic Courses, Shandong University of Science and Technology, Taian* 271019, *China*)

(2. *Department of Mechanics & Engineering Science, Peking University, Beijing* 100871, *China*)

Abstract This paper studied the solution of impulsive dynamics of multi-rigid-body systems with friction. By introducing a new dimensional time parameter, the first-order momentum-impulse differential equations were obtained, and the discussion over infinitesimal impulsive interval was transformed into a piece-wise study on the finite region of impulse, so the solution of impulsive dynamics of spatial discrete system with friction was obtained, i.e., the dynamic response after the impact can be obtained according to the initial conditions before the impact.

Key words spatial multi-rigid-body systems, impact, momentum-impulse, piece-wise

Received 15 March 2004, revised 02 May 2004.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10272002).