

机器人鲁棒轨迹跟踪控制系统

王耀南 孙 炜

(湖南大学电气与信息工程学院,长沙 410082)

摘要 根据鲁棒控制理论和机器人的动态特性,针对机器人系统中存在的不确定性因素,利用不确定性的上界设计了一种鲁棒控制器,并将之用于机器人的跟踪轨迹控制,给出了仿真实验结果并与PID控制的结果进行了比较.仿真实验结果表明所设计的鲁棒控制器与PID控制器相比,具有很好的动态特性和很强的鲁棒性.

关键词 鲁棒控制,机器人,不确定系统

引言

机器人轨迹跟踪控制系统的主要目的是通过给定各关节的驱动力矩,使得机器人的位置、速度等状态变量跟踪给定的理想轨迹.与一般的机械系统一样,当机器人的结构及其机械参数确定以后,其动态特性将由运动方程即数学模型来描述.因此,我们可以应用自动控制理论所提供的设计方法,基于这个数学模型来设计机器人的伺服控制器.但是在实际工程中要想得到精确的数学模型是一件困难的事情,因此我们在建立机器人的数学模型时,需要做合理的近似处理,而忽略一些不确定性的外界干扰等等,然而这些不确定性的存在可能会引起控制系统的恶化,甚至成为系统不稳定的原因.鲁棒控制就是针对这种不确定性而被提出来的现代自动控制理论.它在设计控制器时不仅考虑数学模型的标称模型,同时还考虑不确定性对系统性能的最坏影响,使得所设计的控制器在不确定性对系统品质的破坏最严重时也能够满足设计要求.控制界将鲁棒控制理论的发展过程分为两个阶段,分别以加拿大学者 Zames^[1]和美国学者 Doyle 等人^[2]发表的两篇著名论文为标志.称前一阶段的理论为经典鲁棒控制理论,称后一阶段的理论为状态空间鲁棒控制理论.从1988年 Doyle 等人发表著名的 DGKF 论文,至今已十多年了,在这期间鲁棒控制理论得到了突飞猛进的发展.

鲁棒控制的基本特征是用一个结构和参数都固定不变的控制器,来保证即使不确定性对系统的性能品质影响最恶劣的时候也能够满足设计要求.机

器人的不确定性分为两大类,不确定的外部干扰 d 和模型误差 Δ .显然, Δ 受系统本身状态的激励,同时又反过来作用于系统的动态.机器人系统的各种参数误差、各种降阶处理以及建模时忽略的动态特性等等,都可以用 Δ 来描述.一般假设 Δ 是属于一个可描述集,比如增益有界,且上界已知等等.对于不确定的干扰信号也是如此, d 可以是不可检测的信号,但必须属于可描述集.鲁棒控制器就是基于这些不确定性的描述参数和标称系统的数学模型设计的.一般来说,鲁棒控制是比较保守的控制策略.也就是说,对于所考虑集合内的个别元素,该系统不是最佳控制.但是,它能以固定的控制器,保证在不确定性最严重时系统也能满足设计要求,这正是实际现场所期望的.因此,近几年对机器人鲁棒控制的研究非常活跃^[3~5].本文将阐述鲁棒控制的基本原理,并针对机器人系统中存在的不确定性设计一种鲁棒控制器来控制机器人的跟踪轨迹.论文的结构安排如下:第一节将介绍鲁棒控制理论的基本原理、概念和定理,第二节将阐述机器人的轨迹跟踪问题并针对机器人的动态特性设计鲁棒控制器,第三节将进行仿真实验来验证所设计的控制器的有效性,最后,在第四节将给出一些结论.

1 鲁棒控制

本节将介绍系统稳定性、抗干扰性、不确定性和鲁棒控制的一些基本概念和定理.

1) 系统的稳定性

研究由下式描述的非线性系统

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1)$$

其中 x 是 n 维状态向量, f 表示 n 维非线性向量函数, 其结构与时间 t 有关.

定义 1 若给定的状态满足

$$f(t, x_*) = 0$$

则称 x_* 是系统(1)的平衡点.

定义 2 如果系统(1)对于任意的初始状态 $x(0)$, 其解满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (2)$$

则称该系统的平衡点 $x_* = 0$ 是渐进稳定的.

定义 3 在区间 $(0, +\infty)$ 定义的连续正值函数 $k(s)$ 称为是 K 类函数, 是指 $k(s)$ 满足 $k(0) = 0$, 并且是严格递增的.

定理 1 (李雅普诺夫定理) 对于给定的系统(1), 如果存在连续可微分的正定函数 $V(t, x)$ 和 K 类函数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1(\|x(t)\|) \leq V(t, x) \leq k_2(\|x(t)\|) \quad (3)$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -k_3(\|x(t)\|) \quad (4)$$

对于所有 $t \geq 0$ 成立, 则 $x = 0$ 是该系统渐进稳定的平衡点.

2) 干扰抑制问题

若系统(1)存在干扰作用, 则可描述为

$$\sum_N: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)d \\ z = h(x) \end{cases} \quad (5)$$

其中, d 表示外界干扰, z 是引入的评价信号.

系统(5)的干扰抑制问题就是指不仅保证当 $d = 0$ 时的闭环系统的渐进稳定性, 而且还要保证 $d \neq 0$ 时闭环系统的状态 x 仍然能趋近于零, 或者距平衡点的偏差尽可能小. 为此, 需要引进某个量来衡量信号的大小并作为评价系统抑制干扰能力的尺度. 一般采用 L_2 范数来衡量信号的大小.

定义 4 对于信号 $d(t)$, 其 L_2 范数定义为

$$\|d(t)\|_2 = \left\{ \int_0^{\infty} d^T(t)d(t)dt \right\}^{1/2} \quad (6)$$

实际上, 由上式定义的范数可以解释为信号所具有的能量.

对于给定的干扰信号 $d(t)$, 评价信号 $z(t)$ 的 L_2 范数越小就表示系统受干扰的影响越小, 即系统具有较强的对外界干扰的抑制能力. 这表明系统的抑制干扰能力可以用评价信号的范数与干扰信号的范数之比来描述. 那么可以定义如下的性能指标来反映系统对干扰的抑制能力.

$$J = \sup_{\|d\| \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|d\|_2} \quad (7)$$

上式定义的 J 称为系统(5)的 L_2 增益, 系统(5)

的抑制干扰问题可以归结为设计控制器使得 L_2 增益尽可能小或小于给定的值.

定义 5 对于系统(5), 若 $d(t) \equiv 0$ 时, 任意满足 $z(t) \equiv 0$ 的解 $x(t) \rightarrow 0$, 则称系统(5)是零状态可检测的.

定理 2 (HJI 不等式) 给定正数 $\gamma > 0$, 如果存在可微的准正定函数 $V(x) \geq 0$ 满足如下 HJI 不等式

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) g^T(x) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq 0 \quad (8)$$

或者, 等价地满足

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x) d \leq \frac{1}{2} \{ \gamma^2 \|d\|^2 - \|z\|^2 \}, \forall d \quad (9)$$

则系统(5)的 L_2 增益小于 γ , 即性能指标满足 $J \leq \gamma$.

3) 系统的不确定性

所谓不确定性分为两大类, 不确定的外部干扰和模型误差. 外部干扰及其抑制问题在前面已做论述, 下面介绍一下系统的模型误差.

模型误差就是指在建立被控对象的模型时未能考虑或者有意忽略的诸因素. 在系统(5)中考虑模型误差的因素, 则系统的模型表示为

$$\sum_N: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + \Delta f(x) + g(x)d \\ z = h(x) \end{cases} \quad (10)$$

其中, $\Delta f(x)$ 是描述模型误差的未知的函数向量, 一般假设它是有界的且属于一个给定的集合. 比如, 假设 $\Delta f(x)$ 属于如下定义的集合

$$\Omega = \{ \Delta f \mid \|\Delta f(x)\| \leq n(x), \forall x, \Delta f(0) = 0 \} \quad (11)$$

其中 $n(x)$ 为给定的标量函数.

我们称不包含不确定性因素, 即 $\Delta f(x) = 0, d = 0$ 时的数学模型

$$\dot{x} = f(x) \quad (12)$$

为系统的标称模型.

所谓鲁棒设计问题, 就是要基于(10)描述的数学模型设计控制器, 使得闭环系统对所考虑的所有不确定性都满足设计要求, 这时的闭环系统称为具有鲁棒性能.

4) 鲁棒设计

所谓鲁棒设计问题, 就是要基于(10)描述的数学模型设计控制器, 使得闭环系统对所考虑的所有不确定性都满足设计要求, 这时的闭环系统称为具

有鲁棒性能. 如果设计只考虑稳定性的话, 就称系统是鲁棒稳定的. 如果设计还考虑干扰抑制能力的话, 就称系统是鲁棒抗干扰的.

假如被控对象具有如下的数学模型

$$\dot{x} = f(x) + \Delta f(x) + g_2(x)u + g_1(x)d \quad (13)$$

其中 u 为对象的输入. 设计控制器 $u=s(x)$ 构成如下的闭环控制系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \Delta f(x) + g_2(x)s(x) + g_1(x)d = \\ &F(x) + \Delta f(x) + g_1(x)d \end{aligned} \quad (14)$$

再引入评价信号 $z=h(x)$, 则该闭环系统就具有了与(10)相同的形式.

鲁棒设计的基本原理就是对于(13)描述的被控对象, 设计控制器 $u=s(x)$, 构成闭环系统(14), 使该闭环系统在 $d=0$ 时是鲁棒稳定的, 在 $d \neq 0$ 时是鲁棒抗干扰的, 也就是说系统的 L_2 增益小于给定值 γ . 定理 1 和定理 2 是进行鲁棒控制设计的重要工具.

2 机械臂的鲁棒控制

1) 机器人的物理特征

基于拉格朗日运动学建立的机器人的动态模型一般具有如下的标称形式

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = T \quad (15)$$

其中 q, \dot{q} 和 \ddot{q} 分别表示机器人各关节的位置、速度和加速度, T 为驱动力矩向量. M 为惯性矩阵, V 为离心力和哥氏力矩阵, G 为重力矩阵.

机器人的动态模型具有如下的特征:

a) 正定性 对于任意 q , 惯性矩阵 M 是正定的.

b) 有界性 矩阵函数 M 和 V 对于所有 q 和 \dot{q} 是一致有界的, 即存在正数 λ_m, λ_M 和正定函数 $\eta(\dot{q})$, 使得

$$0 < \lambda_m I \leq M(q) \leq \lambda_M I, \quad (16)$$

$$V^T(q, \dot{q})V(q, \dot{q}) \leq \eta(\dot{q})I \quad (17)$$

对于任意 q, \dot{q} 成立.

c) 斜对称性 矩阵函数 $\dot{M}(q) - 2V(q, \dot{q})$ 对于任意 q 和 \dot{q} 是斜对称的. 即对于任意向量 ξ , 有

$$\xi^T \{ \dot{M}(q) - 2V(q, \dot{q}) \} \xi = 0 \quad (18)$$

d) 线性特征 机器人的数学模型对于物理参数是线性的. 即如果将矩阵函数 M, V, G 中的定常系数表示为一个向量, 那么可以定义适当的矩阵 $\Phi(q,$

$\dot{q}, v, a)$, 使得

$$M(q)a + f(q, \dot{q})v + g(q) = \Phi(q, \dot{q}, v, a)\theta \quad (19)$$

2) 机器人的鲁棒轨迹跟踪控制

设机器人的期望运动轨迹由时间函数 \bar{q}_d, \dot{q}_d, q 描述. 轨迹跟踪控制问题要求设计反馈控制器, 使得机器人的运动渐进地趋于期望轨迹, 即

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \{ q(t) - q_d(t) \} &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \{ \dot{q}(t) - \dot{q}_d(t) \} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

下面考虑机器人系统中的模型误差和外部干扰, 来设计机器人的鲁棒轨迹跟踪控制器. 考虑了模型误差和外部干扰的机器人动态模型为

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + \Delta(q, \dot{q}) + d = T \quad (21)$$

其中 d 表示外界干扰信号, 未知非线性函数向量 $\Delta(q, \dot{q})$ 表示模型误差.

设系统的期望轨迹由 $\bar{q}_d, \dot{q}_d, q_d$ 描述, 跟踪误差定义为 $e=q-q_d$. 对于该系统先进行非线性补偿, 令

$$T = u + M(q)\ddot{q}_d + V(q, \dot{q})\dot{q}_d + G(q) \quad (22)$$

由式(21)减去式(22)可得到系统的误差动态方程

$$M(q)\ddot{e} + V(q, \dot{q})\dot{e} + \Delta(q, \dot{q}) + d = u \quad (23)$$

为了描述系统的干扰抑制能力, 定义评价信号如下

$$z = \begin{bmatrix} p_1 e \\ p_2 \dot{e} \end{bmatrix} \quad (24)$$

其中 $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0$ 为给定的加权系数.

则机器人的鲁棒跟踪控制问题可以描述为: 设计反馈控制器

$$u = a(q_d, \dot{q}_d, e, \dot{e}) \quad (25)$$

使得(23)和(25)构成闭环系统. 对于给定的正数 $\gamma > 0$ 和加权系数 $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0$, 当没有干扰信号时, 该闭环系统对于 $e=\dot{e}=0$ 是鲁棒渐进稳定的; 当存在干扰信号时, 对于任意的干扰信号 d , 该闭环系统的 L_2 增益小于 γ , 即满足

$$\|z\|_2 \leq \gamma \|d\|_2 \quad (26)$$

定理 3 设存在正定函数 $\rho(e, \dot{e})$ 使得对于任意 $\Delta(q, \dot{q})$ 下式成立:

$$\|\Delta(q, \dot{q})\| \leq \rho(e, \dot{e}) \quad (27)$$

令反馈控制器为

$$u = - \left[\epsilon_2 I + M(q) + \rho(e, \dot{e}) I + \frac{p_2^2}{2} I + \frac{1}{2\gamma^2} I \right] (\dot{e} + e) - (I - p_2^2 I - M(q) + V(q, \dot{q})) e \quad (28)$$

其中 $\epsilon_2 > 0, \gamma > 0$ 为给定的常数, 如果 $p_2 \geq 0$ 满足

$$p_1^2 + p_2^2 < 2 \quad (29)$$

则闭环系统(23), (28)对于评价系数(24)来说满足

1) 当 $d=0, z=0$ 时, $e=\dot{e}=0$ 是该闭环系统的鲁棒渐进稳定的平衡点;

2) 对于任意的干扰信号 d , 该闭环系统的 L_2 增益小于 γ .

证 首先定义状态变量

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = e \\ \dot{x}_2 = \dot{e} + e \end{cases} \quad (30)$$

令 $x = [x_1 \quad x_2]^T$, 显然当且仅当 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ 时, 式(20)成立.

则系统(23)的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ M\dot{x}_2 = -(M - V)x_1 + (M - V)x_2 + u - \Delta - d \\ z = \begin{bmatrix} p_1 x_1 \\ p_2(x_2 - x_1) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (31)$$

第一步 证明对于任意的干扰信号 d , 闭环系统(23), (28)的 L_2 增益小于 γ

定义李雅普诺夫函数为

$$L(x) = \frac{1}{2} x_1^T x_1 + \frac{1}{2} x_2^T M x_2 \quad (32)$$

根据定理 2, 若要证明系统(31)的 L_2 增益小于 γ , 则只要证明

$$\dot{L}(x) \leq \frac{1}{2} \{ \gamma^2 \|d\|^2 - \|z\|^2 \} \quad (33)$$

令 $H(x) = L(x) - \frac{1}{2} \gamma^2 \|d\|^2 + \frac{1}{2} \|z\|^2$ 则有

$$\begin{aligned} H(x) &= x_1^T \dot{x}_1 + x_2^T M \dot{x}_2 + \frac{1}{2} x_2^T \dot{M} x_2 - \frac{1}{2} \gamma^2 \|d\|^2 + \\ &\frac{1}{2} \|z\|^2 = x_1^T (x_2 - x_1) + x_2^T \{ -Mx_1 + Vx_1 + \\ &Mx_2 - Vx_2 + u - \Delta - d \} + \frac{1}{2} x_2^T \dot{M} x_2 - \\ &\frac{1}{2} \gamma^2 \|d\|^2 + \frac{1}{2} \|z\|^2 = x_1^T x_2 - x_1^T x_1 + \\ &x_2^T \{ -Mx_1 + Vx_1 + Mx_2 + u - \Delta - d \} + \\ &\frac{1}{2} x_2^T (\dot{M} - 2V)x_2 - \frac{1}{2} \gamma^2 \|d\|^2 + \frac{1}{2} \|z\|^2 \end{aligned}$$

由机器人动态模型的斜对称性知

$$\frac{1}{2} x_2^T (\dot{M} - 2V)x_2 = 0$$

所以

$$\begin{aligned} H(x) &= x_1^T \dot{x}_1 + x_2^T \{ -Mx_1 + Vx_1 + Mx_2 + \\ &u - \Delta - d \} - \frac{1}{2} \gamma^2 \|d\|^2 + \frac{1}{2} \|z\|^2 = \\ &x_2^T x_1 - x_1^T x_1 + x_2^T \{ -Mx_1 + Vx_1 + Mx_2 + \\ &u - \Delta - d \} - \frac{1}{2} \gamma^2 \|d\|^2 + \frac{1}{2} \|z\|^2 = \\ &- \|x_1\|^2 + x_2^T \{ x_1 - Mx_1 + Vx_1 + Mx_2 + \\ &u - d \} - x_2^T \Delta - \frac{1}{2} \gamma^2 \|d\|^2 + \frac{1}{2} \|z\|^2 \end{aligned}$$

根据柯西不等式有

$$\begin{aligned} -x_2^T \Delta &\leq |x_2^T \Delta| \leq \|x_2\| \cdot \|\Delta\| \leq \\ \|x_2\| \cdot \rho(e, \dot{e}) &= x_2^T \rho(e, \dot{e}) x_2 \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} H(x) &\leq -\|x_1\|^2 + x_2^T \{ x_1 - Mx_1 + Vx_1 + Mx_2 + \\ &\rho(e, \dot{e}) x_2 + u - d \} - \frac{1}{2} \gamma^2 \|d\|^2 + \frac{1}{2} \|z\|^2 = \\ &-\|x_1\|^2 + x_2^T \{ x_1 - Mx_1 + Vx_1 + Mx_2 + \\ &\rho(e, \dot{e}) x_2 + u \} - x_2^T d - \frac{1}{2} \gamma^2 \|d\|^2 + \\ &\frac{1}{2} p_1^2 \|x_1\|^2 + \frac{1}{2} p_2^2 \|x_2 - x_1\|^2 \\ 2H(x) &\leq -2\|x_1\|^2 + 2x_2^T \{ x_1 - Mx_1 + Vx_1 + \\ &Mx_2 + \rho(e, \dot{e}) x_2 + u \} - 2x_2^T d - \\ &\gamma^2 \|d\|^2 + p_1^2 \|x_1\|^2 + p_2^2 \|x_2 - x_1\|^2 = \\ &-2\|x_1\|^2 + 2x_2^T \{ x_1 - Mx_1 + Vx_1 + \\ &Mx_2 + \rho(e, \dot{e}) x_2 + u \} - 2x_2^T d - \\ &\gamma^2 \|d\|^2 + p_1^2 \|x_1\|^2 + p_2^2 \|x_2\|^2 + \\ &p_2^2 \|x_1\|^2 - 2p_2^2 x_2^T x_1 = -(2 - p_1^2 - \\ &p_2^2) \|x_1\|^2 + 2x_2^T \{ -p_2^2 x_1 + x_1 - Mx_1 - \\ &Vx_1 + Mx_2 + \rho(e, \dot{e}) x_2 + u \} - 2x_2^T d - \\ &\gamma^2 \|d\|^2 + p_2^2 \|x_2\|^2 \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} -2x_2^T d - \gamma^2 \|d\|^2 &= -\{ 2x_2^T d + \gamma^2 \|d\|^2 \} = \\ -\left\{ \frac{1}{\gamma^2} \|x_2\|^2 + 2 \frac{1}{\gamma} x_2^T \cdot \gamma d + \right. \\ &\left. \gamma^2 \|d\|^2 - \frac{1}{\gamma^2} \|x_2\|^2 \right\} = \\ -\left\{ \left\| \frac{1}{\gamma} x_2 + \gamma d \right\|^2 - \frac{1}{\gamma^2} \|x_2\|^2 \right\} &= \\ -\left\| \frac{1}{\gamma} x_2 + \gamma d \right\|^2 + \frac{1}{\gamma^2} \|x_2\|^2 &\leq \\ \frac{1}{\gamma} \|x_2\|^2 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 2H(x) &\leq -(2-\rho_1^2-\rho_2^2) \|x_1\|^2 + 2x_2^T \cdot \\
 &\quad \{-\rho_2^2 x_1 + x_1 - Mx_1 + Vx_1 + Mx_2 + \\
 &\quad \rho(e, \dot{e})x_2 + u\} + \left(\rho_2^2 + \frac{1}{\gamma^2}\right) \|x_2\|^2 = \\
 &-(2-\rho_1^2-\rho_2^2) \|x_1\|^2 + 2x_2^T \cdot \\
 &\quad \{-\rho_2^2 x_1 + x_1 - Mx_1 + Vx_1 + Mx_2 + \\
 &\quad \rho(e, \dot{e})x_2 + u\} + x_2^T \left(\rho_2^2 + \frac{1}{\gamma^2}\right) x_2 = \\
 &-(2-\rho_1^2-\rho_2^2) \|x_1\|^2 + 2x_2^T \cdot \\
 &\quad \{-\rho_2^2 x_1 + x_1 - Mx_1 + Vx_1 - Mx_2 + \\
 &\quad \rho(e, \dot{e})x_2 + \frac{\rho_2^2}{2}x_2 + \frac{1}{2\gamma^2}x_2 + u\} \\
 H(x) &\leq -\left(1 - \frac{\rho_1^2}{2} - \frac{\rho_2^2}{2}\right) \|x_1\|^2 + x_2^T \{-\rho_2^2 x_1 + \\
 &\quad x_1 - Mx_1 + Vx_1 - Mx_2 + \rho(e, \dot{e})x_2 + \frac{\rho_2^2}{2}x_2 + \\
 &\quad \frac{1}{2\gamma^2}x_2 + u\}
 \end{aligned}$$

若式(29)成立, 则 $\frac{\rho_1^2}{2} + \frac{\rho_2^2}{2} < 1$, 即存在正数 $\epsilon_1 > 0$, 使得 $\frac{\rho_1^2}{2} + \frac{\rho_2^2}{2} = 1 - \epsilon_1$. 则

$$\begin{aligned}
 H(x) &\leq -\epsilon_1 \|x_1\|^2 + x_2^T \{-\rho_2^2 x_1 + x_1 - Mx_1 + \\
 &\quad Vx_1 + Mx_2 + \rho(e, \dot{e})x_2 + \frac{\rho_2^2}{2}x_2 + \frac{1}{2\gamma^2}x_2 + u\}
 \end{aligned}$$

若控制器 u 的定义如(28), 则有

$$\begin{aligned}
 u &= -\left[\epsilon_2 I + M(q) + \rho(e, \dot{e})I + \frac{\rho_2^2}{2}I + \frac{1}{2\gamma^2}I\right]x_2 - \\
 &\quad (I - \rho_2^2 I - M(q) + V(q, \dot{q}))x_1 = \\
 &-\epsilon_2 x_2 - Mx_2 - \rho(e, \dot{e})x_2 - \frac{\rho_2^2}{2}x_2 - \frac{1}{2\gamma^2}x_2 - \\
 &\quad x_1 + \rho_2^2 x_1 + Mx_1 - Vx_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(x) &\leq -\epsilon_1 \|x_1\|^2 - \epsilon_2 \|x_2\|^2 \leq \\
 &-\epsilon \|x_1\|^2 - \epsilon \|x_2\|^2 \leq \\
 &-\epsilon \|x\|^2 \leq 0, \epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2) \quad (34)
 \end{aligned}$$

所以(33)式成立, 系统(31)的 L_2 增益小于 γ , $\|z_2\|_2 \leq \gamma \|d\|_2$, 闭环系统(23), (28)的 L_2 增益也小于 γ .

第二步 证明当 $d=0, z=0$ 时 $e=\dot{e}=0$, 是该闭环系统(23), (28)的鲁棒渐进稳定的平衡点;

由惯性矩阵的有界性知

$$0 < \lambda_m I \leq M(q) \leq \lambda_M I$$

则

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda_m}{2} \|x_2\|^2 &\leq \frac{1}{2} x_2^T M x_2 \leq \frac{\lambda_M}{2} \|x_2\|^2 \\
 \frac{1}{2} \|x_1\|^2 + \frac{\lambda_m}{2} \|x_2\|^2 &\leq L(x) \leq \\
 \frac{1}{2} \|x_1\|^2 + \frac{\lambda_M}{2} \|x_2\|^2
 \end{aligned}$$

令 $m = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\lambda_m}{2}\right\}, M = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{\lambda_M}{2}\right\}$, 则有

$$m \|x\|^2 \leq L \|x\|^2 \leq M \|x\|^2 \quad (35)$$

另外, 当 $d=0, z=0$ 时, 由式(34)可知

$$L(x) \leq -\epsilon \|x\|^2 \quad (36)$$

则由定理 1 可证明 $x=0$ 是系统(31)的渐进稳定的平衡点. 即对于任意的初始状态 $x(0)$, 系统(31)的解满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. 对于闭环系统(23), (28)而言, 也就是 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}(t) = 0$. 所以当 $d=0, z=0$ 时, $e=\dot{e}=0$ 是该闭环系统(23), (28)的鲁棒渐进稳定的平衡点.

证毕.

由定理 3 设计的机器人的鲁棒轨迹跟踪控制系统的框图如图 1 所示.

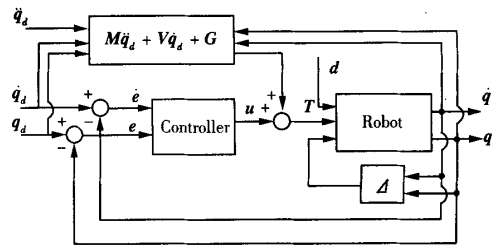


图 1 机器人的鲁棒轨迹跟踪控制系统框图

Fig. 1 System structure of robot robust trajectory tracking control

3 仿真实验

本文对一个两关节机械臂(如图 2)进行仿真以验证所提方法的正确性. 在图 2 中, m_1, m_2 是臂 1 和臂 2 的质量. 假设质量集中于臂的末梢. l_1, l_2 分别为臂 1 和臂 2 的长度. t_1, t_2 分别为作用在臂 1 和臂 2 上的驱动力矩. θ_1, θ_2 为臂 1 和臂 2 在 t_1, t_2 作用下转过的角度.

二关节机械臂的动态模型如式(21). 令 $q = [\theta_1, \theta_2]^T, \dot{q} = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T, \ddot{q} = [\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2]^T, T = [t_1, t_2]^T$, 代

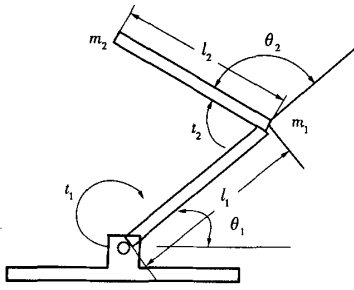


图2 二关节机械手

Fig. 2 Robot manipulator with two links

表 $\cos\theta_i, s_i$ 代表 $\sin\theta_i, c_{ij}$ 代表 $\cos(\theta_i + \theta_j)$, 则式(21)中的惯性矩阵 M , 离心力和哥氏力矩阵 V , 重力矩阵 G 分别表示为

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2) & m_2 l_2^2 + m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c_2 \\ m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c_2 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$V(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{q}_2 & -m_1 l_1 l_2 s_2 \dot{q}_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} m_2 l_2 g c_{12} + (m_1 + m_2) l_1 g c_1 \\ m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix} \quad (39)$$

在本文中,用于仿真的机械臂的参数为 $m_1 = 10\text{kg}, m_2 = 2\text{kg}$ 和 $l_1 = 1.1\text{m}, l_2 = 0.8\text{m}$. 初始条件为 $q(0) = [0 \ 0.9]^T \text{rad}$, $\dot{q}(0) = [0 \ 0]^T \text{rad/s}$, $\ddot{q}(0) = [0 \ 0]^T \text{rad/s}^2$. 期望轨迹为 $q_d(t) = [\sin(2\pi t) \ \cos(2\pi t)]^T \text{rad}$, $\dot{q}_d(t) = [2\pi \cos(2\pi t) \ -2\pi \sin(2\pi t)]^T \text{rad/s}$, $\ddot{q}_d(t) = [-4\pi^2 \sin(2\pi t) \ -\pi^2 \cos(2\pi t)]^T \text{rad/s}^2$. 模型误差为 $\Delta(q, \dot{q}) = 0.5 \text{sign}(\dot{q}) \text{N} \cdot \text{m}$, 外部干扰为 $d(t) = [5\cos(5t) \ 10\sin(10t)]^T \text{N} \cdot \text{m}$. 系统的采样周期为 0.0005s .

根据定理3设计控制器,取 $\rho(e, \dot{e}) = 0.5$, 则有 $\|\Delta(q, \dot{q})\| = \|0.5 \text{sign}(\dot{q})\| \leq \rho(e, \dot{e})$ 成立. 另外,取 $\epsilon_2 = 0.001, p_2 = 0.5, \gamma = 0.035$. 则图3~图6给出了机器人鲁棒轨迹跟踪控制的仿真实验结果并将之与PID控制的结果进行了比较. 图3,图4分别给出了两个关节的跟踪轨迹曲线,图5,图6分别给出了两个关节的跟踪误差曲线. 由图3~图6的结果可以看出,本文所设计的机器人的鲁棒轨迹跟踪控制系统能够很好地克服模型误差、外部干扰等不确定性的影响,具有较好的动、静态性能和很强的鲁棒稳

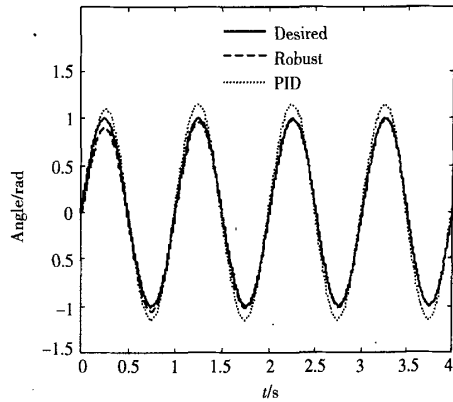


图3 关节1的跟踪轨迹曲线

Fig. 3 The tracking trajectory of the first joint

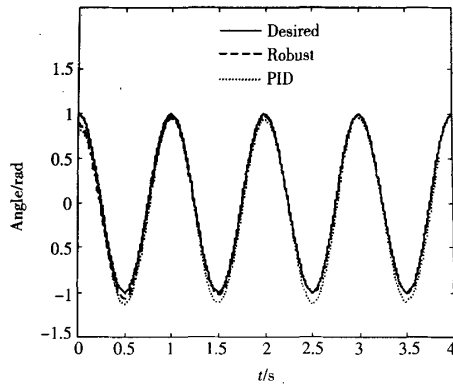


图4 关节2的跟踪轨迹曲线

Fig. 4 The tracking trajectory of the second joint

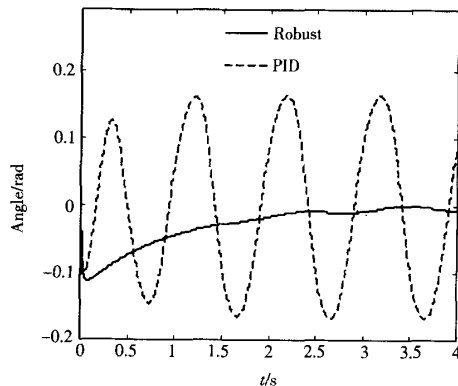


图5 关节1的跟踪误差曲线

Fig. 5 The tracking error of the first joint

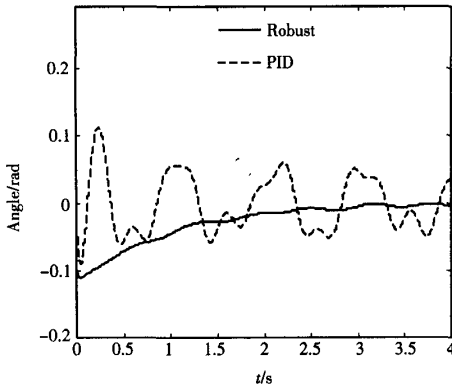


图 6 关节 2 的跟踪误差曲线
Fig. 6 The tracking error of the second joint

定性。

4 结 论

机器人系统是一个具有严重不确定性的系统, 摩擦系数、负载等因素的变化都会造成机器人的模型误差和外部干扰。这给设计机器人的轨迹跟踪控制系统带来了很大的困难。近年来兴起的鲁棒控制

是解决不确定性控制问题的有效方法。它利用稳定性理论来直接设计控制器, 保证了不确定性控制系统的稳定性。本文根据鲁棒控制的基本原理和方法, 并针对机器人自身的动态特性, 设计了一种机器人鲁棒轨迹跟踪控制系统。仿真实验结果表明本文所设计的控制系统能够很好地克服不确定性因素的影响, 很好地跟踪机器人的期望轨迹。

参 考 文 献

- 1 Zames G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multi-plicative seminorms and approximate inverses. *IEEE Trans AC*, 1981, 26(4): 301~320
- 2 Doyle JC, Glover K, Khargonekar PP. State - space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Trans AC*, 1989, 34(8): 831~847
- 3 申铁龙. 机器人鲁棒控制基础. 北京: 清华大学出版社, 2000 (Shen TL. Basis of robotic robust control. Beijing: Qsinghua University Publisher, 2000 (in Chinese))
- 4 周远清. 智能机器人系统. 北京: 清华大学出版社, 1989 (Zhou YQ. Intelligent robotic systems. Beijing: Qsinghua University Publisher, 1989 (in Chinese))

A ROBOT ROBUST TRAJECTORY TRACKING CONTROL SYSTEM*

Wang Yaonan Sun Wei

(College of Electrical and Information Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract According to the robust control theory and the robotic dynamic characteristics, a robust controller was designed to overcome the uncertainties in the robot system by using the upper boundary of the uncertainties. The controller was applied to the robotic tracking control system, and its simulation results were compared with those of the PID controller. The simulation and comparison showed that the robust controller had better dynamic performance and stronger robustness than the PID controller.

Key words robust control, robot, uncertain system