第 2 卷第 1 期
2004 年 3 月

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 2 No. 1
Mar. 2004

# 完整力学系统的三类对称性与三类守恒量*

梅凤翔
(北京理工大学力学系,北京 100081)

**摘要** 研究完整力学系统的 Noether 对称性、Lie 对称性和形式不变性,以及由它们导致的 Noether 守恒量、Hojman 守恒量和一类新型守恒量.

**关键词** 分析力学,完整系统,对称性,守恒量

## 引言

力学系统的对称性与守恒量研究,不仅有数学意义,而且有更为重要的力学意义.用群的无限小变换来研究对称性与守恒量,是数学物理科学,特别是分析力学的一个近代发展方向,人们对 Noether 对称性的研究已日趋完善[1~3],对 Lie 对称性的研究已取得重要进展[2~6]. 近年又开展了形式不变性的研究[7~9].

本文研究完整约束力学系统的三类对称性以及它们各自导致的三类守恒量.

## 1 Noether 对称性导致的 Noether 守恒量

一般具有理想、双面、完整约束的力学系统的运动微分方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s \quad (s=1,\cdots,n) \tag{1}$$

其中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为系统的 Lagrange 函数,$Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力. 假设系统非奇异,则由方程(1)可求出所有广义加速度,记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{2}$$

取时间和坐标的无限小变换

$$\begin{aligned} t^* &= t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\\ q_s^*(t^*) &= q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\varepsilon$ 为无限小参数,$\xi_0,\xi_s$ 为无限小生成元.

Noether 等式为

$$L\dot{\xi}_o+\mathrm{X}^{(1)}(L)+Q_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_o)=-\dot{G}_N \tag{4}$$

其中

$$\mathrm{X}^{(1)}=\xi_o\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_o)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \tag{5}$$

**命题 1**[1~3] 如果生成元 $\xi_o,\xi_s$ 和规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足等式(4),则系统存在 Noether 守恒量

$$I_N=L\xi_o+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_o)+G_N=\mathrm{const.} \tag{6}$$

## 2 Lie 对称性导致的 Hojman 守恒量

取 $\xi_0=0$,方程(2)的 Lie 对称性的确定方程为

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right)=\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k+\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_k}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k \quad (s,k=1,\cdots,n) \tag{7}$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\alpha_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s} \tag{8}$$

**命题 2**[10] 如果无限小生成元 $\xi_s$ 满足式(7),且存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得

$$\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0 \tag{9}$$

则系统存在 Hojman 守恒量

$$I_H=\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\mu\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right)=\mathrm{const.} \tag{10}$$

当 $\mu=\mu(\boldsymbol{q})$ 时,命题 2 就是 Hojman 原来的定理[11].

## 3 形式不变性导致的新型守恒量

如果生成元 $\xi_0,\xi_s$ 满足方程

2004-02-20 收到第一稿.
* 国家自然科学基金资助项目(10272021).

$$\mathrm{E}_s\{X^{(1)}(L)\}=X^{(1)}(Q_s)\quad(s=1,\cdots,n)\qquad(11)$$

则相应不变性为系统的形式不变性，有如下结果.

**命题 3**　如果形式不变性的生成元 $\xi_o,\xi_s$ 和规范函数 $G_F=G_F(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下结构方程

$$\tilde{X}^{(1)}(L)\frac{\bar{d}}{dt}\xi_o+\tilde{X}^{(1)}\{\tilde{X}^{(1)}(L)\}+\tilde{X}^{(1)}(Q_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_o)+\frac{\bar{d}}{dt}G_F=0\qquad(12)$$

其中

$$\tilde{X}^{(1)}=\xi_o\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s-\dot{q}_s\frac{\bar{d}}{dt}\xi_o\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\qquad(13)$$

则系统存在新型守恒量

$$I_F=\tilde{X}^{(1)}(L)\xi_o+\frac{\partial\tilde{X}^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_o)+G_F=\mathrm{const.}\qquad(14)$$

## 4　Noether 对称性导致的 Hojman 守恒量

完整系统 Noether 对称性通过 Lie 对称性可间接导出 Hojman 守恒量，有如下结果.

**命题 4**[12]　如果系统 Noether 对称性的生存元 $\xi_s$ 满足方程(7)并存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足式(9)，则系统 Noether 对称性导致 Hojman 守恒量式(10).

**例 1**　二自由度完整系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{1}{2}tq_2^2$$

$$Q_1=-\dot{q}_1-\dot{q}_2,Q_2=Q_2(t,q_2)$$

可找到 Noether 对称性的生成元和规范函数

$$\xi_1=1,\xi_2=0,G_N=q_1+q_2$$

以及

$$\mu=(\dot{q}_1+q_1+q_2)\exp(t)$$

守恒量式(10)给出

$$I_H=(\dot{q}_1+q_1+q_2)^{-1}=\mathrm{const.}$$

## 5　Noether 对称性导致的新型守恒量

Noether 对称性通过形式不变性可间接导出一类新型守恒量，有如下结果.

**命题 5**　如果 Noether 对称性的生成元 $\xi_0,\xi_s$ 满足式(11)，且存在规范函数 $G_F=G_F(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程(12)，则系统的 Noether 对称性导致新型守恒量式(14).

**例 2**　三自由度系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)-q_3$$

$$Q_1=-\dot{q}_2^2,Q_2=\dot{q}_1^2,Q_3=0$$

可找到 Noether 对称性的生成元和规范函数

$$\xi_0=\xi_1=\xi_2=0,\xi_3=-\dot{q}_3-t,$$

$$G_N=\frac{1}{2}\dot{q}_3^2-\frac{1}{2}t^2$$

由结构方程(12)得

$$G_F=0$$

守恒量式(14)给出

$$I_F=-\dot{q}_3-t=\mathrm{const.}$$

## 6　Lie 对称性导致的 Noether 守恒量

Lie 对称性通过 Noether 对称性可间接导出 Noether 守恒量.

**命题 6**[2,3]　如果 Lie 对称性的生成元 $\xi_0,\xi_s$ 满足等式(4)，则 Lie 对称性导致 Noether 守恒量式(6).

## 7　Lie 对称性导致的新型守恒量

Lie 对称性通过形式不变性可间接导出一类新型守恒量，有如下结果.

**命题 7**　如果 Lie 对称性的生成元 $\xi_o,\xi_s$ 满足式(11)，并存在函数 $G_F=G_F(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足式(12)，则 Lie 对称性导致新型守恒量式(14).

**例 3**　三自由度系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)-q_3$$

$$Q_1=-\dot{q}_2^3,Q_2=\dot{q}_1^3,Q_3=0$$

可找到 Lie 对称性的生成元

$$\xi_0=\xi_1=\xi_2=0\quad\xi_3=\dot{q}_3+t$$

以及规范函数

$$G_F=0$$

式(14)给出

$$I_F=-\dot{q}_3-t=\mathrm{const.}$$

## 8　形式不变性导致的 Noether 守恒量

形式不变性通过 Noether 对称性可间接导致 Noether 守恒量，有如下结果.

**命题 8**　如果形式不变性的生成元 $\xi_o,\xi_s$ 满足等式(4)，则形式不变性导致 Noether 守恒量式(6).

## 9　形式不变性导致的 Hojman 守恒量

形式不变性通过 Lie 对称性可间接导出 Hojman 守恒量，有如下结果.

**命题 9**[13]　如果形式不变性的生成元 $\xi_s$ 满足

方程(7)，并存在某函数 $\mu=\mu(t,q,\dot{q})$)满足式(9)，则形式不变性导致 Hojman 守恒量式(10).

**例4** 二自由度系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)$$

$$Q_1=-\frac{t}{1+t^2}\dot{q}_1,Q_2=\frac{1}{1+t^2}\dot{q}_1$$

可找到满足方程(7)的形式不变性的生成元

$$\xi_1=0,\xi_2=(\dot{q}_1+t\dot{q}_2-q_2)^2$$

以及函数

$$\mu=(1+t^2)^{1/2}$$

守恒量式(10)给出

$$I_H=-2(\dot{q}_1+t\dot{q}_2-q_2)=\text{const.}$$

## 10 结论

本文指出：

1)Noether 对称性可直接导出 Noether 守恒量，可通过 Lie 对称性间接导出 Hojman 守恒量，可通过形式不变性间接导出新型守恒量；

2)Lie 对称性可直接导出 Hojman 守恒量，可通过 Noether 对称性间接导出 Noether 守恒量，可通过形式不变性间接导出新型守恒量；

3)形式不变性可直接导出新型守恒量，可通过 Noether 对称性间接导出 Noether 守恒量，可通过 Lie 对称性间接导出 Hojman 守恒量.

## 参考文献

1 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质. 北京：北京工业大学出版社，1993(Li Ziping. Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties. Beijing: Beijing Polytechnic Univ Press, 1993(in Chinese))

2 赵跃宇，梅凤翔. 力学系统的对称性与不变量. 北京：科学出版社，1999(Zhao Yueyu, Mei Fengxiang. Symmetries and Invariants of Mechanical Systems. Beijing: Science Press, 1999(in Chinese))

3 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用. 北京：科学出版社，1999(Mei Fengxiang. Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems. Beijing: Science Press, 1999(in Chinese))

4 赵跃宇. 非保守力学系统的 Lie 对称性和守恒量. 力学学报，1994，26(3)：380～384(Zhao Yueyu. Conservative quantities and Lie's symmetries of nonconservative dynamical systems. *Acta Mechanica Sinica*, 1994, 26(3)：380～384(in Chinese))

5 Mei Fengxiong. Lie symmetries and conserved quantities of constrained mechanical systems. *Acta Mechanica*, 2000, 141(3～4)：135～148

6 Mei Fengxing. Nonholonomic mechanics. *ASME, Appl Mech Rev*, 2000, 53(11)：283～305

7 Mei Fengxiang. Form invariance of Lagrange system. *J of Beijing Institute of Technology*, 2000, 9(2)：120～124

8 Mei Fengxiang. Form invariance of Appell equations. *Chin Phys*, 2001, 10(3)：177～180

9 梅凤翔. 关于 Noether 对称性、Lie 对称性和形式不变性. 北京理工大学学报，2001，21(4)：535～536(Mei Fengxiang. On Noether symmetry, Lie symmetry and form invariance. *J of Beijing Institute of Technology*, 2001, 21(4)：535～536(in Chinese))

10 梅凤翔. 完整力学系统的 Hojman 守恒量(I). 江西师范大学学报，2003，27(3)：193～195(Mei Fengxiang. Hojman conserved quantity for holonomic mechanical systems(I). *J of Jiangxi Normal Univ*, 2003, 27(3)：193～195(in Chinese))

11 Hojman SA. A new conservation law constructed without using either Lagrangians or Hamiltonians. *J Phys A: Math Gen*, 1992, 25：L291～295

12 梅凤翔. 完整力学系统的 Hojman 守恒量(Ⅱ). 江西师范大学学报，2003，27(4)：316～319(Mei Fengxiang. Hojman conserved quantity for holonomic mechanical systems(Ⅱ). *J of Jiangxi Normal Univ*, 2003, 27(4)：316～319(in Chinese))

13 梅凤翔. 完整力学系统的 Hojman 守恒量(Ⅲ). 江西师范大学学报，2004，28(1)：84～86(Mei Fengxiang. Hojman conserved quantity for holonomic mechanical systems(Ⅲ). *J of Jiangxi Normal Univ*, 2004, 28(1)：84～86(in Chinese))

# THREE KINDS OF SYMMETRIES AND THREE KINDS OF CONSERVED QUANTITIES FOR HOLONOMIC SYSTEMS*

Mei Fengxiang

(*Department of Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*)

**Abstract** The Noether symmetry, the Lie symmetry and the form invariance for holonomic systems were presented. The Noether conserved quantity, the Hojman conserved quantity and a new conserved quantity deduced by the above three kinds of symmetries were studied.

**Key words** analytical mechanics, holonomic system, symmetry, conserved quantity

---

Received 20 February 2004.

* The project supported by National Natural Science Foundation of China (10272021).