

非线性动力学方程的四阶近似几何积分的特性与计算

张素英¹ 邓子辰^{1,2}

(1. 西北工业大学工程力学系, 西安 710072)

(2. 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

摘要 基于经典的 Magnus 级数方法提出了一个简单有效的四阶近似积分格式, 用于求解一般非线性动力学系统. 它是一种几何积分方法, 能保持精确解的许多定性性质, 并且该方法只包含二个或三个指数矩阵的乘积, 避免了通常的 Magnus 级数方法涉及的复杂的交换子运算. 数值算例显示该方法是有效的.

关键词 非线性动力学系统, Magnus 级数方法, 几何积分

引言

对于矩阵微分方程

$$\dot{U} = A(t)U, U(t_0) = I \quad (1)$$

其中 $A(t)$ 表示足够光滑的矩阵或线性算子, 其解可以局部地表示为如下形式^[1]

$$U(t) = I^{\Omega(t)} \quad (2)$$

Ω 是如下的无穷级数

$$\Omega(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k(t) \quad (3)$$

方程 (2) 和 (3) 构成了微分方程 (1) 解的所谓 Magnus 展开式. 级数 (3) 中的每一项 Ω_k 都是多重交换子的多元积分, 它们可以迭代生成^[1~3].

根据常微分方程理论, 如果 $A(t)$ 是一个 $(n+1) \times (n+1)$ 的光滑的 (复) 函数矩阵或线性算子, 那么, 矩阵微分方程 (1) 与如下 $(n+1)$ 维线性齐次方程密切相关,

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = A(t)\hat{X}, \hat{X}(t_0) = \hat{X}_0 \quad (4)$$

其中 $\hat{X} \in C^{n+1}$, 也就是说如果 $U(t)$ 满足 (1), 则

$$\hat{X}(t) = U(t)\hat{X}_0 \quad (5)$$

就是 (4) 的解.

事实上, 在一个步长 h 的范围内, 基于 Magnus 级数的近似解法可以看作一种时间平均方法, 例如, (4) 式的标准近似即是

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = \hat{A}\hat{X}, \hat{X}(t_0) = \hat{X}(t_0) \quad (6)$$

其中 $\hat{A} = \frac{1}{h} \int_0^{t_0+h} A(s)ds$ 是常数矩阵. 这种近似方法可得原问题的一个二阶近似解. 稍后可见, 它对应于截取 Magnus 级数展开式的第一项所得的近似解. Magnus 展开式的优点在于, 即使适当截断展开式, 它依然保持精确解的定性性质. 例如, 如果 (1) 是量子力学中的发展方程, 那么由 Magnus 展开式适当截断所得的近似解具有正交性. 一般地, 如果式 (1) 中的 $A(t)$ 属于李代数 \mathfrak{g} , 那么由截断 Magnus 展开式所得的近似解落在相应的李群 G 上. Iserles^[4] 首次把 Magnus 展开式的这些优点引入到数值算法, 用于求解不同的问题, 都得到了比传统数值方法更好的结果. 它不仅保持系统的定性性质、具有很好的稳定性, 而且使计算更加精确、有效. 但上述方法在计算过程中牵涉到了大量的交换子运算, 这大大限制了这些方法的应用. 采用分裂技术和著名的 BCH 公式可以避免复杂的交换子运算^[5~6], 进一步人们应用李代数的线性相关性, 交换子的计算得到了大幅度减少^[7].

本文的目的在于求解非线性动力学方程时, 把它变形为 Minkowski 空间的增广的动力系统^[8~9], 呈现为一个李型的方程形式: $\dot{X} = AX$, 其中 $X \in M^{n+1}$ (M^{n+1} 是 Minkowski 空间), 而 $A \in \text{SO}(n, 1)$ 是

2004-01-12 收到第一稿, 2004-02-18 收到修改稿.

• 国家自然科学基金(10372084)、霍英东青年教师基金(71005)、高校博士点专项基金(20010699016)、大连理工大学工业装备结构国家重点实验室开放基金及西北工业大学博士创新基金资助项目.

洛伦兹群 $SO_0(n, 1)$ 的局部李代数, 这样可方便地基于 Magnus 构造近似解, 并基于 Magnus 展开式和增广动力学系统的形式, 应用分裂技术和 BCH 公式给出了一个求解一般非线性动力学方程的经济有效的四阶精度的近似格式, 同时可避免计算复杂的交换子.

1 线性矩阵微分方程的近似解

经典的 Magnus 级数为求解微分方程(1)而提出的, 它把微分方程(1)的解 $U(t)$ 表示为级数形式 $U = \exp \Omega(t)$, 其中

$$\Omega(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k(t).$$

那么微分方程(4)的解可以表示为如下形式

$$\dot{X}(t) = \exp \Omega(t) \cdot \dot{X}_0 \quad (7)$$

Magnus 级数的前两项为

$$\Omega_1(t) = \int_{t_0}^t A(s) ds,$$

$$\Omega_2(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t ds_1 \int_{t_0}^{s_1} ds_2 [A(s_1), A(s_2)] \quad (8)$$

其中 $[A, V] \equiv AV - VA$. 为了提高效率和简化方法, 本文采用一元积分表示的 Magnus 级数形式^[5~6]. 记 $A^{(i)}, i=0, 1$ 是关于 $A(t)$ 的如下二元积分

$$A^{(i)} = \frac{1}{h^i} \int_{t_0}^{t_0+h} \left(s - \left(t_0 + \frac{h}{2} \right) \right)^i A(s) ds, i=0, 1 \quad (9)$$

用不同的积分公式近似计算上式中的积分就得到不同的算法, 我们采用四阶的高斯-拉盖尔积分公式来计算(9), 那么

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= \frac{h}{2} (A_1 + A_2) + O(h^5), \\ A^{(1)} &= \frac{\sqrt{3}h}{12} (A_2 - A_1) + O(h^5) \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $A_i = A(c_i h), i=1, 2, c_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{3}/6$.

在一个时间步长范围内 Ω 有如下的两个四阶近似表达式

$$\begin{aligned} \Omega(h) &= \Omega_1(h) + \Omega_2(h) + O(h^5) = \\ &A^{(0)} + [A^{(1)}, A^{(0)}] + O(h^5) \end{aligned} \quad (11)$$

为了避免计算交换子, 这里给出如下命题:

命题 1 设时间步长为 h , 由(10)式定义的 $A^{(0)}, A^{(1)}$ 可得微分方程(1)的解有如下四阶近似格式

$$\begin{aligned} U(h) &= \exp \Omega(h) = \exp \left(\frac{1}{2} A^{(0)} + \right. \\ &\left. 2A^{(1)} \right) \exp \left(\frac{1}{2} A^{(0)} - 2A^{(1)} \right) + \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} O(h^5) &= \exp A^{(1)} \exp^{(0)} \exp(- \\ &A^{(1)}) + O(h^5) \end{aligned}$$

证 由式(9)可见

$$A^{(0)}(h) = O(h), A^{(1)}(h) = O(h^2).$$

根据 BCH 公式

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \right.$$

$$\left. \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + \dots\right)$$

$$\exp(X)\exp(Y)\exp(-X) = \exp\left(Y + \right.$$

$$\left. [X, Y] + \frac{1}{2}[X, [X, Y]] + \dots\right),$$

显然式(11)是真解的两个四阶近似.

进一步, 可得微分方程(4)有如下的四阶近似格式

$$\dot{X}(h) = \exp \Omega \dot{X}_0 =$$

$$\begin{aligned} &\exp\left(\frac{1}{2} A^{(0)} + 2A^{(1)}\right) \exp\left(\frac{1}{2} A^{(1)} - \right. \\ &\left. 2A^{(1)}\right) \dot{X}_0 + O(h^5) = \end{aligned} \quad (13)$$

$$\exp A^{(1)} \exp A^{(0)} \exp(-A^{(1)}) \dot{X}_0 + O(h^5)$$

需要强调的是基于 Magnus 展开式的近似解能保持系统真解的几何性质. 如果 $A(t)$ 是有界的, Magnus 级数展开式对于足够小的 t 是绝对收敛的^[10~11], 截取前几项就能得到很好的近似解.

2 基于 Magnus 展开式构造非线性系统的近似解法

对于一般非线性动力学方程

$$\dot{x} = f(x, t), x \in R^n, t \in R \quad (14)$$

其中 $x = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ 系统的 n 维状态变量, T 表示矩阵的转置, t 是时间变量, $f \in R^n \times R \rightarrow R^n$ 是关于 x 和 t 的矢量值函数. 记状态变量 x 的欧几里得范数为 $\|x\| = (x \cdot x)^{1/2}$, 矢量间的圆点表示它们的内积运算, 那么

$$\frac{d}{dt} \|x\| = \frac{d}{dt} (x \cdot x)^{1/2} = \frac{x \cdot \dot{x}}{\|x\|} \quad (15)$$

那么, 微分方程(14)和(15)一起构成了增广的动力系统

$$\dot{X} = A(x, t) X \quad (16)$$

其中

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \|x\| \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & \frac{f(x, t)}{\|x\|} \\ \frac{f^T(x, t)}{\|x\|} & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

如果矢量场 $f(x, t)$ 可以分为两个部分, 即 $f(x, t) = \omega(x, t)x + v(x, t)$, 其中, $\omega(x, t)$ 是反对称矩阵, 则

$$\dot{x} = \omega(x, t)x + v(x, t), \quad (19)$$

那么,

$$A = \begin{bmatrix} \omega(x, t) & \frac{v(x, t)}{\|x\|} \\ \frac{v^T(x, t)}{\|x\|} & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

A (局部地) 是洛伦兹群 $SO_0(n, 1)$ 的李代数, 满足

$$A^T g + gA = 0 \quad (21)$$

其中 g 是 Minkowski 度量矩阵, 即

$$g = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & -1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

其中 I_n 是 n 阶单位矩阵. 由上述不难发现

$$X^T g X = x \cdot x - \|x\|^2 = 0 \quad (23)$$

所以说 $X^T g X = 0$ 是非线性动力学系统在 Minkowski 空间需要保证的锥结构. 文献[7]指出, 增广动力学系统的空间形式具有很重要的性质, 对动力学系统的数值研究具有某种指导意义. 基于该空间形式的数值方法不仅可以近似原动力学系统, 而且可以尽可能的保持原系统的定性性质和对称性. 为此在实际应用中我们的数值方法的设计应当是保群方法.

微分方程(16)是一个简单的齐次方程形式, 便于使用 Magnus 展开式来构造其近似解.

记

$$X(t_k) = \begin{bmatrix} x(t_k) \\ \|x(t_k)\| \end{bmatrix}, \quad t_k = t_0 + kh, \quad (24)$$

类似(13), 可得微分方程(16)在 t_k 时刻的四阶近似格式如下

$$\begin{aligned} X(t_k) &= \exp \tilde{\Omega}(t) \cdot X(t_{k-1}) = \\ & \exp\left(\frac{1}{2} \tilde{A}^{(0)} + 2\tilde{A}^{(1)}\right) \exp\left(\frac{1}{2} \tilde{A}^{(0)} - 2\tilde{A}^{(1)}\right) X(t_{k-1}) + O(h^5) = \\ & \exp \tilde{A}^{(1)} \exp \tilde{A}^{(0)} \exp(-\tilde{A}^{(1)}) + (h^5) \end{aligned} \quad (25)$$

$k = 1, 2, \dots$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{(i)} &= \frac{1}{h^i} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (s - (t_{k-1} + \frac{h}{2}))^i A(x(t_{k-1}), s) ds, \\ & i = 0, 1 \end{aligned} \quad (26)$$

采用四阶的高斯-拉盖尔积分公式来计算(26), 我们有

$$\tilde{A}^{(0)} = \frac{h}{2} (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) + O(h^5), \quad (27)$$

$$\tilde{A}^{(1)} = \frac{\sqrt{3}h}{12} (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_1) + O(h^5)$$

其中 $\tilde{A}_i = A(x(t_{k-1} + c_i h), t_{k-1} + c_i h)$, $i = 1, 2$, $c_{1,2} = 1/2 \mp \sqrt{3}/6$. 而指数矩阵 $\exp \tilde{A}^{(i)}$, $i = 0, 1$ 中 $\tilde{A}^{(i)}$ 的方幂具有如下形式

$$\begin{aligned} (\tilde{A}^{(i)})^k &= \|F^{(i)}\|^{k-1} \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & F^{(i)} \\ F^{(i)T}(x, t) & 0 \end{bmatrix}, \\ & k \text{ 是正偶数}, i = 0, 1 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{A}^{(i)})^k &= \|F^{(i)}\|^{k-2} \begin{bmatrix} F^{(i)} F^{(i)T} & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & \|F^{(i)}\|^2 \end{bmatrix}, \\ & k \text{ 是正奇数} \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$F^{(0)} = \frac{h}{2} \left(\frac{f(x(t_{k-1} + c_1 h), t_{k-1} + c_1 h)}{\|x(t_{k-1} + c_1 h)\|} + \frac{f(x(t_{k-1} + c_0 h), t_{k-1} + c_0 h)}{\|x(t_{k-1} + c_0 h)\|} \right) \quad (30)$$

$$F^{(1)} = \frac{\sqrt{3}h}{12} \left(\frac{f(x(t_{k-1} + c_1 h), t_{k-1} + c_1 h)}{\|x(t_{k-1} + c_1 h)\|} - \frac{f(x(t_{k-1} + c_0 h), t_{k-1} + c_0 h)}{\|x(t_{k-1} + c_0 h)\|} \right) \quad (31)$$

这样就可以更有效地计算指数矩阵

$$\begin{aligned} \exp \tilde{A}^{(i)} &= I + \sinh \|F^{(i)}\| / \|F^{(i)}\| \cdot \tilde{A}^{(i)} + \\ & (\cosh \|F^{(i)}\| - 1) / \|F^{(i)}\|^2 \cdot (\tilde{A}^{(i)})^2 \end{aligned} \quad (32)$$

其中

$$F(x(t), t) = f(x(t), t) / \|x(t)\|,$$

而(28)~(32)中的

$$F(x(t_{k-1} + c_i h), t_{k-1} + c_i h)$$

可由李级数展开的办法获得

$$\begin{aligned} F(x(t_{k-1} + c_i h), t_{k-1} + c_i h) &= \\ & F(x(t_{k-1}), t_{k-1}) + c_i h L F(x(t_{k-1}), t_{k-1}) + \\ & \frac{1}{2!} c_i^2 h^2 L^2 F(x(t_{k-1}), t_{k-1}) + \dots + \\ & \frac{1}{n!} c_i^n h^n L^n F(x(t_{k-1}), t_{k-1}) + \dots \end{aligned} \quad (33)$$

其中

$$\begin{aligned} L = L(x, t) &= f_1(x, t) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n(x, t) \frac{\partial}{\partial x_n} + \\ & \frac{\partial}{\partial t} = (f_1, \dots, f_n, 1) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t} \right)^T \end{aligned}$$

这里设计的是四阶算法,一般取 $n \geq 4$. 最后可得(14)的解为

$$x(t_k) = [X_1(t_k), X_2(t_k), \dots, X_n(t_k)]^T, k = 1, 2, 3, \dots \quad (34)$$

可以证明该方法是时间对称的,那么还可以利用 Yoshida 技术^[12]构造高阶算法.

3 李级数展开迭代规律

李级数展开式(33)中的

$$L^k(F(x(t), t)) = L^k(f(x(t), t) / \|x(t)\|)$$

可由如下方式迭代产生

$$L_i^1 = Lf_i = (f_1, f_2, \dots, f_n, 1) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right),$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} \Big|_t, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$L_i^2 = L^2 f_i = (L_i^1, L_i^2, \dots, L_i^k) \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \dots, \right.$$

$$\left. \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right) + (f_1, f_2, \dots, f_n, 1) \left(L \frac{\partial f_i}{\partial x_1}, L \frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \dots, \right.$$

$$\left. L \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right) \Big|_t, i = 1, 2, \dots, n$$

$$L_i^k = L^k f_i = C_{k-1}^0 (L_i^{k-1}, L_i^{k-2}, \dots, L_i^1) \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \dots, \right.$$

$$\left. \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right) + C_{k-1}^1 (L_i^{k-2}, L_i^{k-3}, \dots, L_i^{k-2}) \left(L \frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \right.$$

$$\left. L \frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \dots, L \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right) + \dots + C_{k-1}^{k-1} (f_1, f_2, \dots, f_n, 1) \left(L^{k-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}, L^{k-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \dots, L^{k-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_n}, \right.$$

$$\left. L^{k-1} \frac{\partial f_i}{\partial t} \right) \Big|_t, i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\text{and } k = 1, 2, \dots \quad (35)$$

由上述可见,要计算 $L_i^k, i = 1, 2, \dots, n$, 只需在

$L_i^{k-1}, i = 1, 2, \dots, n$ 的基础上进一步计算

$$L^{k-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

和

$$L^{k-1} \frac{\partial f_i}{\partial t}$$

即可. 另外,

$$L^k \frac{f_i}{\|x\|} = C_{k-1}^0 \frac{1}{\|x\|} L^k f_i + C_{k-1}^1 L^{k-1} f_i L \frac{1}{\|x\|} +$$

$$\dots + C_{k-1}^{k-1} L^{k-1} f_i L^{k-1} \frac{1}{\|x\|} + \dots +$$

$$C_{k-1}^k f_i L^k \frac{1}{\|x\|} \quad (36)$$

而后有

$$L^k(F(x(t), t)) = L^k f(x(t), t) / \|x(t)\| =$$

$$\left(L^k \frac{f_1}{\|x\|}, L^k \frac{f_2}{\|x\|}, \dots, L^k \frac{f_n}{\|x\|} \right) \quad (37)$$

4 保群性质示例

由 Magnus 级数方法所得的近似解落在相应的李群 G 上,因此,用本文方法求解增广动力学系统能保持系统的锥结构,数值实验显示可以近似保持原系统某些定性性质,而且数值计算更加精确、稳定. 本节讨论旋转体的问题,证明本文方法能保持动力学系统的定性性质. 当讨论旋转体的问题,(20)中的 A 变为

$$A = \begin{bmatrix} \omega(x, t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

零堆 $X^T g X = 0$ 自然满足. 这时,增广动力学系统问题(16)对应的近似格式(25)中的 $\exp \tilde{\Omega}$ 变为

$$\exp \tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} \exp \tilde{\Omega}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

其中 $\tilde{\Omega}'$ 是 $\omega(x, t)$ 对应的 Magnus 级数展开式.

$$\exp \tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} \exp \tilde{\Omega}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

而且

$$x_{k+1} = \exp \tilde{\Omega}' x_k \quad (41)$$

由于基于 Magnus 级数的数值方法能保持原动力学系统的李群性质,对于方程(16)的代数结构(21),必然有

$$(\exp \tilde{\Omega}')^T g \exp \tilde{\Omega}' = g \quad (42)$$

根据(40)和(42)可得

$$(\exp \tilde{\Omega}')^T \exp \tilde{\Omega}' = I_n \quad (43)$$

(43)说明 $\exp \tilde{\Omega}'$ 属于 n 阶特殊正交群 $SO(n)$. 也就是说,数值方法(25)保持 $\|x\|$ 不变,这正是原系统的旋转矢量所要求的.

5 算例

例 1 求解非线性周期系统的响应问题

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2.25x - (x - 1.5 \sin t)^3 + 2 \sin t \\ x(0) = 0.0, y(0) = 1.59929 \end{cases}$$

依然取步长 $h = 0.1$, 采用近似格式(25), 数值解与

精确解比较所得误差见图 1 和图 2,其中 $\Delta x, \Delta y$ 分别是 x 和 y 的误差.

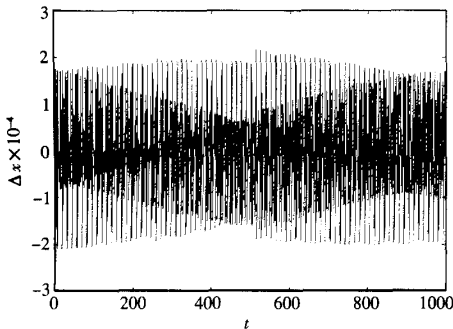


图 1 x 的数值解的误差 Δx
Fig.1 The error Δx of the variable x

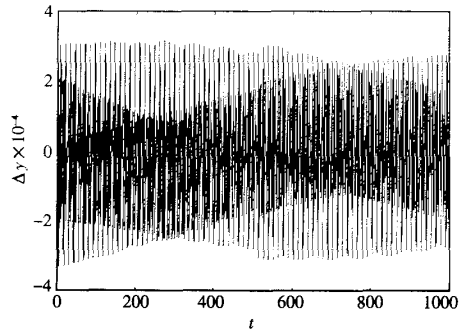


图 2 y 的数值解的误差 Δy
Fig.2 The error Δy of the variable y

例 2 求单摆的运动规律. 设有一单摆,摆球为单位质量 $m=1$,摆长为 l ,摆动的幅角为 x_1 ,在重力作用下无阻尼的单摆运动方程为

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 \sin x_1 = 0$$

其中 $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, g 为重力加速度. 单摆运动方程又可以写成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 \sin x_1 \end{cases}$$

取时间步 $h=0.1$ 长,采用近似格式(25)所得数值解与由 Runge-Kutta 方法所得近似解的比较见图 3 和图 4. 在相平面 (x_1, x_2) 上,我们有

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\omega_0^2 \sin x_1}{x_2}$$

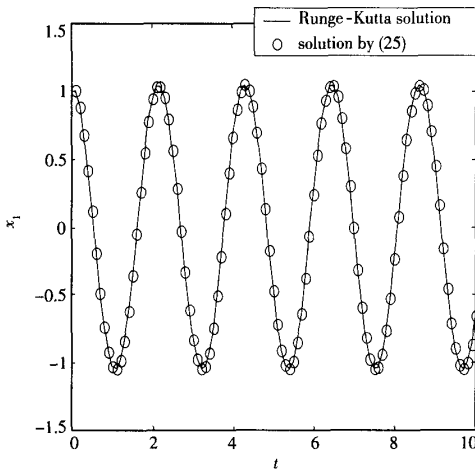


图 3 x_1 的近似解的比较
Fig.3 The comparison of x_1 approximation

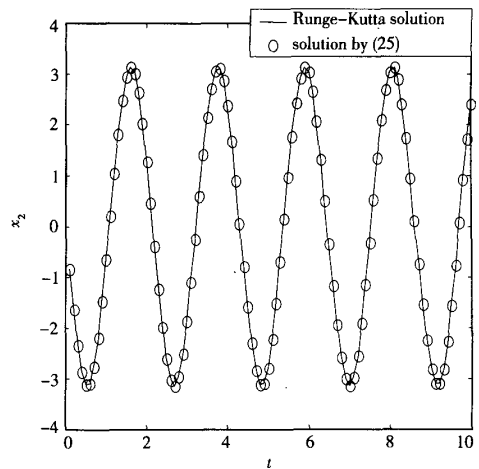


图 4 x_2 近似解的比较
Fig.4 The comparison of x_2 approximation

积分上式可得

$$\frac{1}{2}x_2^2 + \omega_0^2(1 - \cos x_1) = H$$

其中 H 为积分常数. 由于 x_2 是角速度,因而 $\frac{1}{2}x_2^2$ 可视为单摆系统的动能 K ;而系统的恢复力为

$-\omega_0^2 \sin x_1$,克服此力所作的功

$$\int_0^{x_1} \omega_0^2 \sin x_1 dx_1 = \omega_0^2(1 - \cos x_1)$$

即是系统的位能 V ,

$$K = \frac{1}{2}x_2^2, \quad V = \omega_0^2(1 - \cos x_1)$$

则 $H=K+V$ 正是系统的能量守恒定律. 那么, 单摆的运动方程可以写成 Hamilton 系统形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} \end{cases}$$

Hamilton 系统最重要的性质特征是它的能量函数或称 Hamilton 函数 H 是守恒的. 分别采用本文近似格式(25)和四阶 Runge-Kutta 方法计算, 所得不同时刻 Hamilton 函数与初始 Hamilton 函数比较的误差示于图 5. 由图可见, 本文方法在保持系统定性

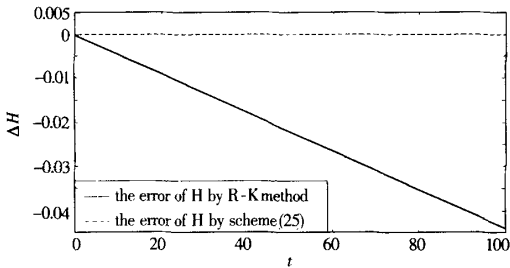


图 5 Hamilton 函数的误差比较

Fig. 5 The error comparison of Hamilton function

性质方面具有明显优势.

6 结论

基于求解线性微分方程的 Magnus 级数方法, 本文给出求解一般非线性动力学方程一个简单的四阶近似方法. 它能保持原系统真解的定性性质. 基于 Magnus 级数方法的数值方法一般需要计算矩阵的交换子及其多元积分, 并要求计算指数矩阵, 而本文的方法只需计算一元积分, 而且指数矩阵的计算也较为经济有效.

参 考 文 献

Magnus W. On the exponential solution of differential equations for a linear operator. *Commun. Pure Appl Math*, 1954, 7: 649~673

- 2 Munthe-kaas H, Owren B. Computations in a free Lie algebra. *Phil Trans R Soc Lond A*, 1999, 357: 957~981
- 3 Klarsfeld S, Oteo JA. Recursive generation of higher-order terms in the Magnus expansion. *Phys Rev A*, 1989, 39: 3270~3273
- 4 Iserles A. Multistep methods on manifolds. Technical Report 1997/NA13. Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics. London: University of Cambridge, 1997
- 5 Blanes S, Moan PC. Splitting methods for non-autonomous Hamiltonian equations. *J Comput Phys*, 2001, 170 (1): 205~230
- 6 Blanes S, Moan PC. Splitting methods for the time-dependent Schrodinger equation. *Physics Letters A*, 2000, 265: 35~42
- 7 Blanes S, Cacas F, Ros J. Improved high order integrators based on the Magnus expansion. *BIT*, 2000, 40(3): 434~450
- 8 Liu C S. Cone of non-linear dynamical system and group preserving schemes. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2001, 36: 1047~1068
- 9 Hong HK, Liu CS. Some physical models with Minkowski spacetime structure and Lorentz group symmetry. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2001, 36: 1075~1084
- 10 Blanes S, Cacas F, Oteo JA, Ros J. Magnus and Fer expansion for matrix differential equations; the convergence problem. *J Phys A: Math Gen*, 1998, 31: 259~268
- 11 Moan PC, Oteo JA, Ros J. On the existence of the exponential solution of Linear differential systems. *J Phys A Math Gen*, 1999, 32: 5133~5139
- 12 Yoshida H. Construction of higher order symplectic integrators. *Physics Letters A*, 1990, 150: 262~268

PROPERTY AND COMPUTATION OF A FOURTH-ORDER GEOMETRIC INTEGRATION FOR NONLINEAR DYNAMIC EQUATION*

ZHANG Suying¹ DENG Zichen^{1,2}

(1. *Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*)

(2. *State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China*)

Abstract Based on the classical Magnus series method, This paper proposed a simple and efficient fourth-order integrator for solving the general nonlinear dynamic systems. The method is a kind of geometric integration method and can preserve many main qualitative properties of the exact solution. The method involves only two or three matrix exponentials and thus avoids a lot of complex commutators involved in the Magnus method. The numerical examples were given to demonstrate the validity and effectiveness of the proposed method.

Key words nonlinear dynamic system, magnus expansion, geometric integration

Received 12 January 2004, revised 18 February 2004.

- The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10372084), HUO Ying-dong Youth Teacher Foundation (71005), the Doctoral Program Foundation of Education Ministry of China (20010699016), the Open Foundation of State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment and the Doctorate Foundation of Northwestern Polytechnical University