

# 广义卡尔曼-布西滤波算法识别系统参数\*

钟万颀 吴志刚 高强

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室,大连 116023)

**摘要** 根据结构力学与卡尔曼滤波相模拟的理论,构造了一种新的用于连续系统参数识别的广义卡尔曼-布西滤波计算格式. 该算法运用了结构力学中的串联子结构拼装方法,在每一步子结构拼装的同时嵌入对系统状态和参数的估计以实现系统参数的识别,可以离线计算的数据都通过精细积分算法预先获得.

**关键词** 参数识别,卡尔曼-布西滤波,Riccati方程,精细积分,结构力学

## 引言

参数识别是系统辨识的一个重要部分. 当数学模型确定,但某些参数的数值无法给定时,就需要采用参数识别的方法加以确定,以使数学模型符合实际情况,这是控制理论的一个重要组成部分. 参数识别的数学模型可以采用传统的单输入-单输出(SISO)的描述,运用 ARMA 方法进行辨识<sup>[1]</sup>;也可采用状态空间模型,利用广义卡尔曼滤波方法同时估计参数和状态<sup>[2]</sup>,但以往的尝试并不很理想<sup>[3]</sup>. 本文基于卡尔曼滤波与结构力学相模拟的理论<sup>[4]</sup>,将课题转化为结构力学中带参数串联子结构的拼装<sup>[5]</sup>,同时进行参数的识别.

系统的参数很多,有些参数的确定有把握,但另一些参数则待定,待定参数代表了系统的不确定性. 具有一定构造的不确定性称为结构性不确定性(structured uncertainty)<sup>[6]</sup>,本文考虑结构性不确定性系统待定参数的识别问题.

卡尔曼滤波最初用于估计给定系统运行时的状态向量<sup>[2]</sup>,而将待定参数与状态向量放在一起进行估计,则可以采用广义卡尔曼滤波方法. 卡尔曼滤波理论常区分为连续时间与离散时间两种版本来描述,很多课题的动力学模型本来是连续时间的,但状态滤波与系统识别总有一个滞后的时间,从而控制向量的反馈也必然滞后. 对这滞后的一小步,其系统运行只能当作控制向量给定的预测,所以离散时间控制的模型是必要的,而参数识别的模型也必然是离散时间的. 在滞后的一步中,系统的运行预测未经

量测校核,因此其精度受影响,滞后步长越大,影响也就越大,滞后步长的大小与计算所需时间有关,因此控制系统的计算必须实时、高效. 精细积分法可以适应连续时间的动力学模型,并且高效. 本文采用的就是这种动力学模型为连续时间而滤波与参数识别为离散时间的模型.

## 1 参数识别问题的提法

考虑利用卡尔曼滤波识别下列线性系统中的待定参数

$$\dot{x}(t) = Ax + B_w w + B_u u \quad (1)$$

$$y = Cx + v \quad (2)$$

其中工厂阵  $A$  的确定往往不能很精确,例如结构振动问题,质量阵、刚度阵的确定比较有把握,但阻尼阵的确定不很准,需要识别系统中的关键参数. 设  $A$  阵可表示为

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^m \epsilon_i A_i \quad (3)$$

其中  $n \times n$  矩阵  $A_0$  称为标称工厂阵,矩阵  $A_i$  已知,用于标识待识别参数的位置,需识别的参数为  $\epsilon_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ),这类参数识别称为结构性的参数识别<sup>[6]</sup>.  $w$  和  $v$  分别为过程与量测噪声,且

$$E(w) = 0, \text{var}[w(t), w(\tau)] = W\delta(t - \tau)$$

$$E(v) = 0, \text{var}[v(t), v(\tau)] = V\delta(t - \tau)$$

$$\text{covar}[w, v] = 0$$

标称矩阵  $A_0$  应当与真实的工厂阵  $A$  相差不远,即  $\epsilon_i$  是小量. 对于标称阵,其 Riccati 方程的解矩阵  $P(t)$  等认为已经解出. 将(3)代入动力方程(1)有

2004-01-12 收到第一稿,2004-02-20 收到修改稿.

\* 国家重点基础研究发展规划项目(G1999032805),国家自然科学基金资助项目(10202004).

$$\dot{x}(t) = A_0 x + \sum_{i=1}^m \varepsilon_i A_i x + B_w w + B_u u \quad (4)$$

虽然  $n$  维状态向量  $x(t)$  与参数  $\varepsilon_i$  都是待定量, 共  $n+m$  个未知量, 但  $x(t)$  是时间函数, 而  $\varepsilon_i$  是常量. 虽然参数  $\varepsilon_i$  的识别值也随时间而变, 但这种变化是阶梯性的, 相当于参数  $\varepsilon_i$  的动力方程在每一个时间段  $\dot{\varepsilon}_i = 0$ . 将待定参数  $\varepsilon_i$  也并入状态向量, 设  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)^T$ , 则新的状态参数向量  $x_r$  为

$$x_r = \begin{Bmatrix} x \\ \varepsilon \end{Bmatrix} \quad (5)$$

新的动力方程和量测方程为

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_{rw} w + B_{ru} u \quad (6)$$

$$y = C_r x_r + v \quad (7)$$

其中

$$A_r = \begin{bmatrix} A & A_1 x & A_2 x & \dots & A_m x \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \quad (8a)$$

$$B_{rw} = \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix}, B_{ru} = \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \quad (8b)$$

$$C_r = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \quad (8c)$$

扩展阵  $A_r$  中的  $A_i x (i=1, \dots, m)$  与状态向量  $x$  有关, 因此所研究的系统成为非线性. 依然寻求最小指标

$$J = \int_0^t [w^T W^{-1} w + (y - C_r x_r)^T \cdot V^{-1} (y - C_r x_r)] d\tau / 2 + (x_{r,0} - \hat{x}_{r,0})^T P_{r,0}^{-1} (x_{r,0} - \hat{x}_{r,0}) / 2 \quad (9)$$

其中  $P_{r,0}$  是  $(n+m) \times (n+m)$  正定矩阵, 这是有条件(6)的取最小. 原有状态向量  $x$  与参数向量  $\varepsilon$  属不同的类型. 通常的广义卡尔曼滤波方法进行参数识别有时并不理想<sup>[3]</sup>, 本文采用文献[5]中的方法进行参数的识别.

首先在式(9)中引入对于  $x$  的 Lagrange 乘子  $\lambda$

$$J = \int_0^t [\lambda^T (\dot{x}(t) - A_0 x - \sum_{i=1}^m \varepsilon_i A_i x - B_w w - B_u u) + w^T W^{-1} w / 2 + (y - C_r x_r)^T \cdot V^{-1} (y - C_r x_r) / 2] d\tau + (x_{r,0} - \hat{x}_{r,0})^T P_{r,0}^{-1} (x_{r,0} - \hat{x}_{r,0}) / 2, \delta J = 0 \quad (10)$$

对  $w$  先取最小,

$$w = W B_w^T \lambda \quad (11)$$

于是式(10)可写成

$$J_r = \int_0^t [\lambda^T (\dot{x}(t) - A_0 x - \sum_{i=1}^m \varepsilon_i A_i x - B_u u) - \lambda^T B_w W B_w^T \lambda / 2 + x^T C^T V^{-1} (Cx/2 - y)] dt + (x_{r,0} - \hat{x}_{r,0})^T P_{r,0}^{-1} (x_{r,0} - \hat{x}_{r,0}) / 2, \min_{x, \lambda} \max_{\varepsilon} J_r \quad (12)$$

完成对于  $\lambda$  与  $x$  的变分推导有对偶方程

$$\dot{x}(t) = A_0 x + B_w W B_w^T \lambda + \sum_{i=1}^m \varepsilon_i A_i x + B_u u \quad (13a)$$

$$\dot{\lambda}(t) = C^T V^{-1} C x - A_0^T \lambda - \sum_{i=1}^m \varepsilon_i A_i^T \lambda - C^T V^{-1} y \quad (13b)$$

对方程(13)的积分可以采用步步推进之法. 即每次积分  $t_k \sim t_{k+1}$  的一步, 长  $\eta = t_{k+1} - t_k$  是小的确定值. 这样就可以与结构力学中的串联子结构分析的方法相衔接.

## 2 参数识别的递推计算格式

按[5]中 § 6.7 与 § 5.9 所述, 在  $t_k \sim t_{k+1}$  时间段, 式(12)可表示为

$$J_{r,k}(\varepsilon, x_k, x_{k+1}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[ \lambda^T (\dot{x}(t) - A_0 x - \sum_{i=1}^m \varepsilon_i A_i x - B_u u) - \lambda^T B_w W B_w^T \lambda / 2 + x^T C^T V^{-1} (Cx/2 - y) \right] dt + (x_{r,k} - \hat{x}_{r,k})^T P_{r,0}^{-1} (x_{r,k} - \hat{x}_{r,k}) / 2, \min_{x, \lambda} \max_{\varepsilon} J_{r,k} \quad (14)$$

就是势能. 因为量测与辨识只在离散点执行, 故可采用近似

$$J_{r,k}(\varepsilon, x_k, x_{k+1}) \approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[ \lambda^T (\dot{x}(t) - A_0 x - \sum_{i=1}^m \varepsilon_i A_i \hat{x}_k - B_u u) - \lambda^T B_w W B_w^T \lambda / 2 + x^T C^T V^{-1} (Cx/2 - y_k) \right] dt + (x_{r,k} - \hat{x}_{r,k})^T P_{r,0}^{-1} (x_{r,k} - \hat{x}_{r,k}) / 2, \min_{x, \lambda} \max_{\varepsilon} J_{r,k} \quad (15)$$

上式中  $\varepsilon_i = \varepsilon_{i,k+1} (i=1, \dots, m)$  是待定参数.  $J_{r,k}(\varepsilon, x_k, x_{k+1})$  就是区段的势能. 如取  $\varepsilon=0$  则就成为普通的 Kalman 滤波. 可采用文献[5]中 § 5.9 节的方法处理. 变分方程(15)此时对应的微分方程为

$$\dot{x}(t) = A_0 + B_w W B_w^T \lambda + \sum_{i=1}^m \epsilon_i A_i \hat{x}_k + B_u u \quad (16a)$$

$$\dot{\lambda}(t) = C^T V^{-1} C x - A_0^T \lambda - C^T V^{-1} y_k \quad (16b)$$

两端边界条件为

$$x(t_k) = x_k, \lambda(t_{k+1}) = \lambda_{k+1} \quad (17)$$

对偶方程(16)的外力项为  $\sum_{i=1}^m \epsilon_i A_i \hat{x}_k + B_u u$  与  $-C^T V^{-1} y_k$ , 参数  $\epsilon_i$  的出现是线性的. 注意,  $\hat{x}_k$  与  $x_k$  是不同的, 前者是确定值, 而后者是变量. 将(16)对比文献[5]的(6.5.47a, b)式, 可知  $\epsilon_i A_i$  相当于  $B_u$  而  $\hat{x}_k$  相当于  $n$  维的  $u$ . 这样, 文献[5] § 6.5.7 节的精细积分计算全都可以运用. 故区段内解  $x(t), \lambda(t)$  与  $\epsilon$  的相关也是线性的. 由  $n$  维对偶方程(16)的解可以计算区段长度为  $\eta$  的混合能

$$V(x_k, \lambda_{k+1}) = \lambda_{k+1}^T F x_k + \lambda_{k+1}^T G \lambda_{k+1} / 2 - x_k^T Q x_k / 2 + \lambda_{k+1}^T r_{xk} + x_k^T r_{\lambda k} \quad (18)$$

其中矩阵  $Q, G, F$  是长度  $\eta$  的函数, 向量  $r_{xk}$  和  $r_{\lambda k}$  则是  $\eta$  和参数  $\epsilon_i$  的函数, 上述矩阵及向量的计算在第三节中介绍.

按混合能的定义

$$V(x_k, \lambda_{k+1}) = \lambda_{k+1}^T x_{k+1} - \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\lambda^T \dot{x} - H(x, \lambda) - x^T C^T V^{-1} y_k - \lambda^T \sum_{i=1}^m \epsilon_i A_i \hat{x}_k - \lambda^T B_u u] dt \quad (19)$$

其中

$$H(x, \lambda) = \lambda^T A x + \lambda^T B_w W B_w^T \lambda / 2 - x^T C^T V^{-1} C x / 2 \quad (20)$$

但这只是  $n$  维的, 还要讲清楚增加了变量  $\epsilon$  后混合能表达式中的矩阵. 为此应回到指标的计算, 且子结构拼装的逐步积分算法, 也应计算其指标. 利用混合能定义式, 变分方程(15)可表示为

$$J_{\epsilon, k} = \lambda_{k+1}^T x_{k+1} - V(x_k, \lambda_{k+1}) + (x_{\epsilon, k} - \hat{x}_{\epsilon, k})^T P_{\epsilon 0}^{-1} (x_{\epsilon, k} - \hat{x}_{\epsilon, k}) / 2, \max_{\lambda_{k+1}} J_{\epsilon, k} \quad (21)$$

利用下列扩充向量

$$x_{\epsilon} = \begin{Bmatrix} x \\ \epsilon \end{Bmatrix}, \lambda_{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu \end{Bmatrix} \quad (22)$$

$$r_{\epsilon, x\epsilon} = \begin{Bmatrix} r_{x\epsilon} \\ 0 \end{Bmatrix}, r_{\epsilon, \lambda\epsilon} = \begin{Bmatrix} r_{\lambda\epsilon} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

将式(21)扩充为

$$J'_{\epsilon, k} = \lambda_{\epsilon, k+1}^T x_{\epsilon, k+1} - V_{\epsilon}(x_{\epsilon, k}, \lambda_{\epsilon, k+1}) + (x_{\epsilon, k} - \hat{x}_{\epsilon, k})^T P_{\epsilon 0}^{-1} (x_{\epsilon, k} - \hat{x}_{\epsilon, k}) / 2, \max_{\lambda_{\epsilon, k+1}} J'_{\epsilon, k} \quad (24)$$

其中

$$\lambda_{\epsilon, k+1}^T x_{\epsilon, k+1} = \lambda_{k+1}^T x_{k+1} + \mu_{k+1}^T \epsilon_{k+1} \quad (25)$$

$$V_{\epsilon}(x_{\epsilon, k}, \lambda_{\epsilon, k+1}) = \lambda_{\epsilon, k+1}^T F_{\epsilon} x_{\epsilon, k} + \lambda_{\epsilon, k+1}^T G_{\epsilon} \lambda_{\epsilon, k+1} / 2 - x_{\epsilon, k}^T Q_{\epsilon} x_{\epsilon, k} / 2 + \lambda_{\epsilon, k+1}^T r_{\epsilon, x\epsilon k} + x_{\epsilon, k}^T r_{\epsilon, \lambda\epsilon k} \quad (26)$$

由  $J_{\epsilon k} = J'_{\epsilon k}$ , 原来仅与区段长度  $\eta$  有关的矩阵  $Q(\eta), G(\eta), F(\eta)$  扩充成与  $\eta$  和第  $k$  步状态  $\hat{x}_k$  有关的矩阵.

$$Q_{\epsilon}(\eta) = \begin{bmatrix} Q & -r_{\lambda_1 k} & -r_{\lambda_2 k} & \cdots & -r_{\lambda_m k} \\ \text{symmetric} & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (27a)$$

$$G_{\epsilon}(\eta) = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27b)$$

$$F_{\epsilon}(\eta) = \begin{bmatrix} F & r_{x_1 k} & r_{x_2 k} & \cdots & r_{x_m k} \\ 0 & & I_m & & \end{bmatrix} \quad (27c)$$

基于上述结果就可以进行单步递推参数识别.

设已有二次型

$$\Pi_k(x_k, \epsilon_k) = (x_{\epsilon, k} - \hat{x}_{\epsilon, k})^T P_{\epsilon k}^{-1} (x_{\epsilon, k} - \hat{x}_{\epsilon, k}) / 2 \quad (28)$$

其中  $x_{\epsilon, k} = \{x_k^T, \epsilon_k^T\}^T$ . 文[5]中变分原理(5.9.11)或(5.9.12)及其后的推导, 可扩展到对于扩展向量  $x_{\epsilon, k} = \{x_k^T, \epsilon_k^T\}^T$ . 推进到下一个阶段有

$$\min_{x_{\epsilon, k}, \epsilon_{\epsilon, k+1}} [\Pi_k(x_k, \epsilon_k) + J'_{\epsilon}(x_k, x_{\epsilon, k+1}, \epsilon_{k+1})] \quad (29)$$

这相当于文献[5] § 5.9 中的(5.9.3)式, 由此可求出  $\hat{x}_{\epsilon, k+1} = \{\hat{x}_{\epsilon, k+1}^T, \hat{\epsilon}_{\epsilon, k+1}^T\}^T$ . 从而得到

$$\Pi_{k+1}(x_{k+1}, \epsilon_{k+1}) = (x_{\epsilon, k+1} - \hat{x}_{\epsilon, k+1})^T P_{\epsilon, k+1}^{-1} (x_{\epsilon, k+1} - \hat{x}_{\epsilon, k+1}) / 2 \quad (30)$$

完成单步的递推得到扩充状态向量  $x_{\epsilon} = \{x^T \ \epsilon^T\}^T$  及扩充方差阵的递推公式

$$\hat{x}_{\epsilon, k} = F_{\epsilon} (I_{\epsilon} + P_{\epsilon, k-1} Q_{\epsilon})^{-1} \hat{x}_{\epsilon, k-1} + F_{\epsilon} (P_{\epsilon, k-1}^{-1} + Q_{\epsilon})^{-1} r_{\epsilon, x\epsilon k} + r_{\epsilon, \lambda\epsilon k} \quad (31)$$

$$P_{\epsilon, k} = G_{\epsilon} + F_{\epsilon} (P_{\epsilon, k-1}^{-1} + Q_{\epsilon})^{-1} F_{\epsilon}^T \quad (32)$$

按照上述递推计算格式, 矩阵  $Q, G, F$  都可以提前计算好, 在扩充形成矩阵  $Q_{\epsilon}(\eta), G_{\epsilon}(\eta), F_{\epsilon}(\eta)$  时需根据实际量测到的输入和输出计算  $r_{x\epsilon, k}$  和  $r_{\lambda\epsilon, k}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ), 而  $r_{x\epsilon, k}$  和  $r_{\lambda\epsilon, k}$  的计算也可以利用已经提前计算出的结果按照第 3 节中的公式进行, 达到尽可能减少实时计算量的目的.

开始计算时需给定初始值

$$P_{\epsilon, 0} = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & \Theta_0 \end{bmatrix}, Q_{\epsilon, 0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_{\epsilon, 0} = I_{n+m} \quad (33)$$

其中  $\Theta_0$  是初始参数估计误差的方差阵。

### 3 区段混合能矩阵

式(18)中的矩阵  $Q, G, F$  及向量  $r_{xk}, r_{\lambda k}$  满足下列微分方程。

$$\dot{F} = (A_0 - GC^T V^{-1}C)F = F(A_0 - BWB^T Q) \quad (34a)$$

$$\begin{aligned} \dot{G} &= BWB^T + GA_0^T + A_0 G - \\ &GC^T V^{-1}CG = FBWB^T F^T \end{aligned} \quad (34b)$$

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= F^T C^T V^{-1}CF = \\ C^T V^{-1}C + QA_0 + A_0^T Q - QBWB^T Q \end{aligned} \quad (34c)$$

及边界条件

$$F(0) = I_n, Q(0) = G(0) = 0 \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_{xk} &= (A_0 - GC^T V^{-1}C)r_{xk} - GC^T V^{-1}y_k + \\ &\sum_{i=1}^m \varepsilon_i A_i \hat{x}_k + B u_k = FBWB^T r_{\lambda k} \end{aligned} \quad (36a)$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_{\lambda k} &= F^T C^T V^{-1}(y_k - C r_{xk}) = (A_0^T - QBWB^T)r_{\lambda k} + \\ &C^T V^{-1}y_k - Q \sum_{i=1}^m \varepsilon_i A_i \hat{x}_k - QB u_k \end{aligned} \quad (36b)$$

及边界条件

$$r_x(0) = r_\lambda(0) = 0 \quad (37)$$

矩阵  $Q(\eta), G(\eta), F(\eta)$  与非齐次项无关, 故与参数  $\varepsilon = \varepsilon_{k+1}$  无关。而  $r_{xk}(\eta), r_{\lambda k}(\eta)$  的表达式一定是  $\varepsilon$  的线性函数。

$$r_{xk}(\eta) = r_{xck}(\eta) + \sum_{i=1}^m r_{x\epsilon_i k}(\eta) \cdot \varepsilon_i \quad (38a)$$

$$r_{\lambda k}(\eta) = r_{\lambda ck}(\eta) + 2 \sum_{i=1}^m r_{\lambda \epsilon_i k}(\eta) \cdot \varepsilon_i \quad (38b)$$

$$r_{xck}(\eta) = R_{xy}(\eta) \cdot y_k + R_{xu}(\eta) \cdot u_k \quad (39a)$$

$$r_{x\epsilon_i k}(\eta) = R_{x\epsilon_i}(\eta) \cdot \hat{x}_k \quad (39b)$$

$$r_{\lambda ck}(\eta) = R_{\lambda y}(\eta) \cdot y_k + R_{\lambda u}(\eta) \cdot u_k \quad (39c)$$

$$r_{\lambda \epsilon_i k}(\eta) = R_{\lambda \epsilon_i}(\eta) \cdot \hat{x}_k \quad (39d)$$

其中乘 2 是为了方便。这些系数矩阵是可以精细积分得到的, 可预先计算好加以保存。在区段  $t_k \sim t_{k+1}$  内只有量测  $y_k$ , 因此上式中的  $y$  就用常值  $y_k$  来代替。注意文[5] § 6.5.7,  $n \times q$  矩阵  $R_{xy}(\eta), R_{\lambda y}(\eta)$  是与站号  $k$  无关的, 由下列方程确定

$$\dot{R}_{xy} = (A_0 - GC^T V^{-1}C)R_{xy} + GC^T V^{-1}I_q \quad (40a)$$

$$\dot{R}_{\lambda y} = F^T C^T V^{-1}(I_q - CR_{xy}) \quad (40b)$$

$R_{x\epsilon_i}(\eta)$  与  $R_{\lambda \epsilon_i}(\eta)$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) 为  $n \times n$  为矩阵, 也

与  $k$  无关, 故可一次计算就保存下来, 适用于所有的区段, 即

$$\begin{aligned} \dot{R}_{x\epsilon_i} &= (A_0 - \\ &GC^T V^{-1}C)R_{x\epsilon_i} + A_i I_n \end{aligned} \quad (41a)$$

$$\dot{R}_{\lambda \epsilon_i} = -F^T C^T V^{-1}C R_{x\epsilon_i} \quad (41b)$$

$R_{xu}(\eta)$  与  $R_{\lambda u}(\eta)$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) 为  $n \times p$  矩阵, 与  $k$  无关, 且满足

$$\dot{R}_{xu} = (A_0 - GC^T V^{-1}C)R_{xu} + B u I_p \quad (42a)$$

$$\dot{R}_{\lambda u} = -F^T C^T V^{-1}C R_{xu} \quad (42b)$$

微分方程(34), (40), (41), (42)可以按照文献[5]中的精细积分方法求解。

### 4 算例

**算例 1** 考虑一个单自由度质量-弹簧-阻尼系统的参数识别问题, 其自由振动方程为  $M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = 0$ 。设标称参数为  $M=1.0, K=11.0, C=0.9$ , 则系统状态方程中的各矩阵为

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -11.0 & -0.9 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, C = [1.0 \quad 0.0]$$

待识别部分为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i A_i &= \varepsilon_1 \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.9 \end{bmatrix} + \\ &\varepsilon_2 \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ -11.0 & 0.0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中  $\varepsilon = [0.3, -0.5]^T$ 。计算中取

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.0 \\ 0.0 & 0.01 \end{bmatrix}, W = 0.01,$$

$V = 0.01, \Theta_0 = \text{diag}(10, 10), \varepsilon_0 = [0.0, 0.0]^T$  在时间段  $t_f = 20.0$  内, 采样步长  $\Delta t = 0.05$ , 输入  $u = 10\sin(3t)$ 。识别结果如图 1 和图 2 所示, 其中实线为真实参数值, 虚线为识别的结果。其他条件不变, 取过程噪声和量测噪声方差分别为  $W=1$  和  $V=1$ , 时间长度  $t_f = 30.0$ , 参数识别的结果如图 3 和图 4 所示。这样的识别结果可以满足, 但如果因计算效率不够高, 采用时间步长  $\Delta t = 0.10$ , 则识别的结果如图 5 和图 6 所示, 在这个算例中, 步长的增加使参数识别的精度降低了一些。

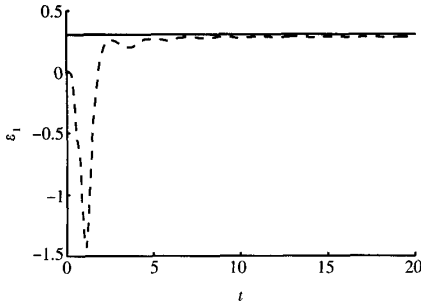


图 1 阻尼项参数 ( $W=0.01, V=0.01, \Delta t=0.05$ )

Fig. 1 Parameter of damping ( $W=0.01, V=0.01, \Delta t=0.05$ )

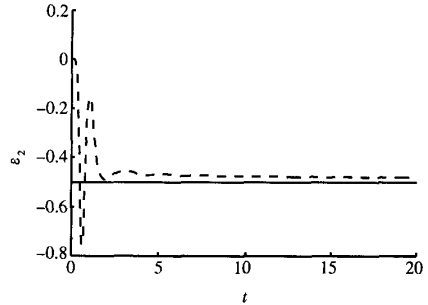


图 2 刚度项参数 ( $W=0.01, V=0.01, \Delta t=0.05$ )

Fig. 2 Parameter of stiffness ( $W=0.01, V=0.01, \Delta t=0.05$ )

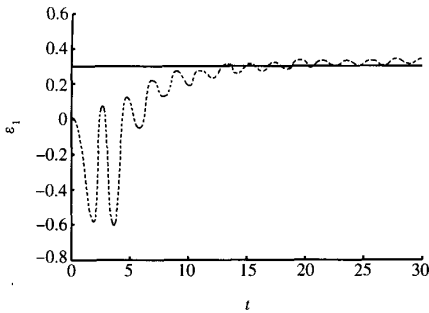


图 3 阻尼项参数 ( $W=1, V=1, \Delta t=0.05$ )

Fig. 3 Parameter of damping ( $W=1, V=1, \Delta t=0.05$ )

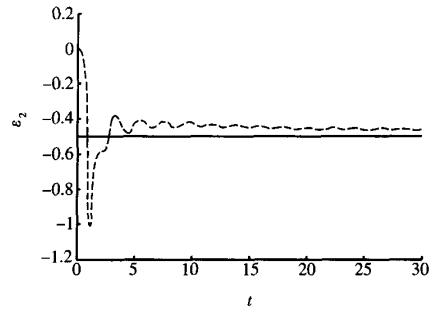


图 4 刚度项参数 ( $W=1, V=1, \Delta t=0.05$ )

Fig. 4 Parameter of stiffness ( $W=1, V=1, \Delta t=0.05$ )

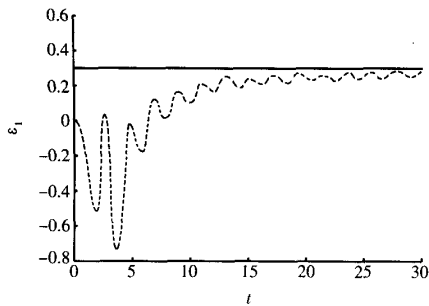


图 5 阻尼项参数 ( $W=1, V=1, \Delta t=0.10$ )

Fig. 5 Parameter of damping ( $W=1, V=1, \Delta t=0.10$ )

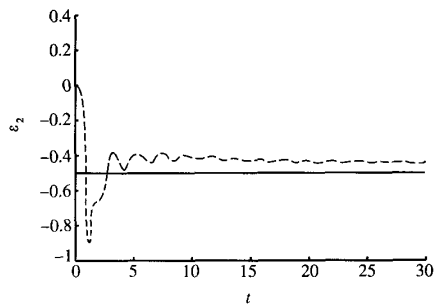


图 6 刚度项参数 ( $W=1, V=1, \Delta t=0.10$ )

Fig. 6 Parameter of stiffness ( $W=1, V=1, \Delta t=0.10$ )

**算例 2** 一个旋转机械支撑结构用 7 自由度质量-弹簧-阻尼模型描述. 其标称质量、刚度和阻尼参数分别为

$$M = \text{diag}(200, 180, 160, 120, 170, 80, 120)$$

$$K = \begin{bmatrix} 89400 & -36000 & -12000 & -3600 & -1200 & -600 & 0 \\ & 80000 & -30000 & -10000 & -3000 & -1000 & 0 \\ & & 99850 & -39000 & -13000 & -3900 & -1300 \\ & & & 101000 & -33000 & -11000 & -3300 \\ & & & & 107200 & -40000 & -13000 \\ & & & & & 92500 & -27000 \\ & & & & & & 64750 \end{bmatrix}$$

$$C = 0.0033 \times K$$

并且系统状态方程中各矩阵的构成为

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_7 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{14 \times 1},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{7 \times 1},$$

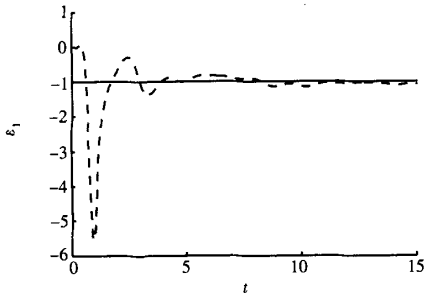


图7 阻尼项参数 ( $\Delta t=0.05$ )

Fig. 7 Parameter of damping ( $\Delta t=0.05$ )

$$C = [[1 \cdots 1]_{1 \times 7}, [0 \cdots 0]_{1 \times 7}]$$

待识别部分为

$$\sum_{i=1}^2 \epsilon_i A_i = \epsilon_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -M^{-1}C \end{bmatrix} + \epsilon_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -M^{-1}K & 0 \end{bmatrix}$$

其中  $\epsilon = [-1.0, -0.7]^T$ . 计算中取

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.0 \\ 0.0 & 0.01 \end{bmatrix}, W = 0.01, V = 0.01,$$

$$\Theta_0 = \text{diag}(10, 10), \epsilon_0 = [0.0, 0.0]^T$$

在时间段  $t_f=15.0$  内, 采样步长  $\Delta t=0.05$ , 输入  $u=20\sin(0.5t)$ . 识别结果如图7和图8所示, 图中实线为真实参数值, 虚线为识别的结果.

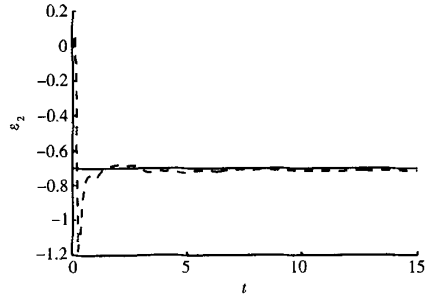


图8 刚度项参数 ( $\Delta t=0.05$ )

Fig. 8 Parameter of stiffness ( $\Delta t=0.05$ )

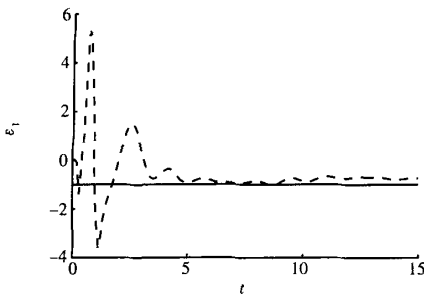


图9 阻尼项参数 ( $\Delta t=0.10$ )

Fig. 9 Parameter of damping ( $\Delta t=0.10$ )

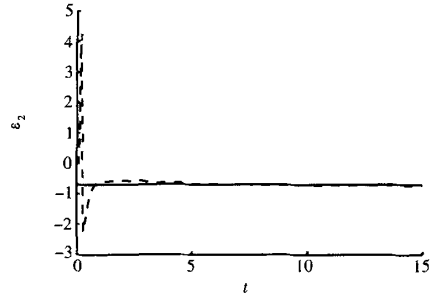


图10 刚度项参数 ( $\Delta t=0.10$ )

Fig. 10 Parameter of stiffness ( $\Delta t=0.10$ )

从图中可以看到参数识别的结果与真实值的偏差很小, 但如果因计算效率不够高, 采用时间步长  $\Delta t=0.10$ , 则识别的结果为图9和图10中所示, 结果依然是满意的.

上述所有情况中, 用本文所介绍的广义卡尔曼-布西滤波算法都可以得到很好的系统状态估计结果, 限于篇幅没有给出这些结果. 基于卡尔曼滤波思想的广义卡尔曼滤波算法有多种实现方式<sup>[8,9]</sup>, 但用于参数识别的算法大多是针对离散系统的, 而对于

本文所讨论的连续-离散系统一般是将系统进行最简单直接的离散化之后按离散系统研究. 从本文数值算例的结果来看, 对这个问题引入精细积分算法, 并利用结构力学与最优控制的模拟关系构造新的广义卡尔曼-布西滤波算法可以给出令人满意的参数识别结果和状态估计.

## 5 结束语

参数识别是系统建模与控制中的一个重要问

题,本文建立了用于线性连续系统参数识别的广义卡尔曼-布西滤波算法,这一递推算法通过不断地用新的测量数据修正系统状态和参数的估计值,在系统运行的过程中实现对部分不确定性参数的识别.算法的递推过程与结构力学中含参数串联子结构的拼装过程相似,是基于结构力学与最优控制模拟关系研究控制问题的又一方向.

## 致谢

感谢国家重点基础研究发展规划项目(G1999032805),国家自然科学基金项目(10202004),中科院复杂系统与智能科学重点实验室开放课题的资助.

## 参 考 文 献

- 1 Ljung L. System Identification: Theory for the User, 2nd Edition. New Jersey: Prentice Hall, 1999
- 2 Sorenson HW. Kalman Filtering: Theory and Application. New York: IEEE Press, 1985
- 3 Ljung L. Asymptotic behavior of the extended Kalman filter as a parameter estimator for a linear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, AC-24(1): 36~50
- 4 Zhong Wanxie, Zhong Xiangxiang. Computational structural mechanics, optimal control and semi-analytical method for PDE. *Computers & Structures*, 1990, 37(6): 993~1004
- 5 钟万勰. 应用力学对偶体系. 北京:科学出版社,2002 (Zhong Wanxie. Duality Method in Applied Mechanics. Beijing: Science Press, 2002(in Chinese))
- 6 Burl JB. Linear Optimal Control:  $H_2$  and  $H_\infty$  Methods. California: Addison-Wesley Longman, 1999
- 7 钟万勰,欧阳华江,邓子辰. 计算结构力学与最优控制. 大连:大连理工大学出版社,1993 (Zhong Wanxie, Ouyang Huajiang, Deng Zichen. Computational Structural Mechanics and Optimal Control. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1993(in Chinese))
- 8 Sayed AH. Fundamentals of Adaptive Filtering. New Jersey: John Wiley & Sons and IEEE Press, 2003
- 9 蔡金狮. 动力学系统辨识与建模. 北京:国防工业出版社, 1991 (Cai Jinshi. Identification and Modelling of Dynamic Systems. Beijing: National Defence Industry Press, 1991 (in Chinese))

# SYSTEM PARAMETER IDENTIFICATION WITH AN EXTENDED KALMAN-BUCY FILTERING ALGORITHM\*

Zhong Wanxie Wu Zhigang Gao Qiang

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,  
Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

**Abstract** Based on the analogy between structural mechanics and Kalman filtering, a new extended Kalman-Bucy filtering algorithm was presented to identify parameters of continuous time systems. The algorithm employed the substructures assembly technique of structural mechanics, and the estimation of system states and parameters was embedded in the procedure of substructures assembling. The precise integration method provided all the off-line data for the parameter identification in advance.

**Key words** parameter identification, Kalman-Bucy filter, Riccati equation, precise integration, structural mechanics