

基于模态摄动法的模型降阶与动态系统分析^{*}

袁泉 康厚军[†] 苏潇阳 丛云跃

(广西大学 工程力学研究中心, 南宁 530004)

摘要 模态摄动法(modal perturbation method, MPM)是一种基于矩阵范数的模态截断方法,适用于具有复杂动力学系统的工程、物理、数学等领域. 该方法基于模态分析理论,以无扰动状态下的模态特性为基底,引入小参数摄动项,对系统的线性刚度矩阵和非线性刚度矩阵进行逐步求解,从而量化相邻系统的相对误差. 其核心思想是利用小参数特性,将高维复杂系统转化为可替代的低维系统,实现模型降阶与高效求解. 该方法的基本步骤包括:首先,识别对结构动态行为有显著影响的低阶模态,构建简化的初始模型;其次,基于摄动理论对模态进行修正;最后,通过计算刚度矩阵的范数,逐步筛选出对系统具有重要贡献的关键模态. 模态摄动法的优势在于能够利用基础的数学理论简化复杂的模态分析问题,具有计算精度高、适用范围广的特点. 然而,该方法对小参数的选取确定有一定要求,在大扰动情况下可能需要较高的计算成本. 与 Galerkin 方法相比,模态摄动法在处理参数激励下的拉索模态截断问题时,仅需少量模态即可达到 11 阶 Galerkin 法的精度,计算效率提升显著.

关键词 模态摄动法, 模态分析, 模型降阶, 参数激励

中图分类号: O322

文献标志码: A

Model Order Reduction and Dynamic System Analysis Based on Modal Perturbation Method^{*}

Yuan Quan Kang Houjun[†] Su Xiaoyang Cong Yunyue

(Scientific Research Center of Engineering Mechanics, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract The modal perturbation method (MPM) is a modal truncation technique based on matrix norms, applicable to complex dynamic systems in engineering, physics, mathematics, and related fields. This method is grounded in modal analysis theory, using the modal characteristics of an unperturbed state as a basis and introducing small parameter perturbations to iteratively solve the system's linear and nonlinear stiffness matrices, thereby quantifying the relative error between adjacent systems. The core idea is to leverage the properties of small parameters to transform a high-dimensional complex system into an equivalent low-dimensional system, achieving model order reduction and efficient computation. The key steps of the method include: first, identifying low-order modes that significantly influence structural dynamic behavior to construct a simplified initial model; second, refining the modes based on perturbation theory; and finally, progressively screening critical modes that contribute substantially to the system by computing the norm of the stiffness matrix. The advantages of the MPM lie in its ability to simplify complex modal analysis problems using fundamental mathematical theory, offering high com-

2025-09-14 收到第 1 稿, 2025-10-11 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目 (12372006, 12302007, 12202109), National Nature Science Foundation of China (12372006, 12302007, 12202109).

[†] 通信作者 E-mail: hjkang@gxu.edu.cn

putational accuracy and broad applicability. However, the method imposes certain requirements on the selection of small parameters, and it may incur higher computational costs under large perturbations. Compared with the Galerkin method, the MPM can achieve the accuracy of the 11th-order Galerkin method with only a few modes when dealing with the modal truncation of cables under parametric excitation, and the calculation efficiency is significantly improved.

Key words modal perturbation method, modal analysis, model order reduction, parametric excitation

引言

在现代工程科学、物理学及应用数学的研究中,复杂动力学系统的建模与分析始终是一个核心课题^[1-3].随着系统规模持续扩大和非线性因素影响日益增强,传统的模态分析方法在处理高维、非线性或参数不确定系统时面临诸多挑战,例如计算成本高昂、精度受限、难以准确捕捉系统整体动态特性等问题^[4,5].因此,发展一种既能有效降低模型复杂度,又能保持较高精度的分析方法,已成为当前研究的热点之一^[6].

为解决模态截断问题,众多学者开展了深入研究,并取得了一定成果^[7-9].其中,模态加速法^[10]通过将现有模态叠加与静态特解相结合,提升了振动响应分析的效果,尤其适用于低频范围.高精度模态叠加方法^[11,12]则通过将不可用模态表示为可用模态与系统矩阵的组合,并按其贡献展开为显式级数形式,从而有效减小残差误差.然而,这些方法^[7,13-15]通常忽略高阶项,存在截断展开带来的精度损失问题.尤其在连续结构系统中,模态截断问题更为突出^[16,17],因为这类系统往往涉及非线性特征值问题,即使在小扰动下也难以精确求解.这些问题推动了更高效方法的发展,以应对连续结构谐振响应中常见的模态截断难题.

在此背景下,模态摄动法^[18]作为一种高效的模态分析技术应运而生.该方法融合了经典模态分析与摄动理论的基本思想,在高阶模态中引入小参数摄动项,对系统刚度矩阵进行逐步修正,从而实现对系统动态行为的高精度逼近.其核心理念在于:以无扰动状态下的模态基底为基础,通过摄动展开量化参数变化引起的模态特性变化,并据此筛选出对系统响应具有显著影响的关键模态,进而构建低维等效模型.

模态摄动法具有多方面的优势.首先,它基于坚实的数学理论基础,具备良好的解析性与可解释性;其次,该方法能够有效处理参数扰动对系统模态的影响,特别适用于存在微小非线性扰动的系统;再次,通过模态截断与矩阵范数筛选机制,可在保持较高精度的同时实现模型降阶,显著提升计算效率.然而,该方法也存在一定的局限性,例如对小参数摄动项的选取较为敏感,若扰动较大,可能需要更高阶的展开项,导致计算成本上升.此外,对于高度非线性和强耦合系统,其适用性仍有待进一步验证与拓展.

本文旨在系统阐述模态摄动法的理论框架、关键技术及最新进展.全文结构安排如下:第1节详细介绍模态摄动法的基本步骤;第2节展示其在参数激励系统中的具体应用;第3节将其与 Galerkin 方法进行对比分析;第4节总结当前面临的挑战并展望未来发展方向.通过上述内容的探讨,本文希望为相关领域的研究者提供一份系统、全面的参考,并推动该方法在更广泛工程与科学领域的应用.

1 模态摄动法介绍

1.1 模态摄动法的基本原理

模态摄动法是一种融合经典模态分析与摄动理论的高效模型降阶方法,适用于复杂动力学系统的动态响应分析与模态特性研究.该方法能有效处理具有非线性、参数扰动或结构微小变异的高维系统,能够在保持较高计算精度的同时显著降低模型复杂度,提高数值求解效率.其基本原理是:以无扰动状态下的系统模态为基底,引入一个表征系统参数变化的小参数摄动项,对系统的刚度矩阵进行逐阶修正.通过构建摄动展开式,逐步逼近系统在参

数扰动下的模态响应,并利用模态贡献度筛选对系统动态行为具有显著影响的关键模态.最终,形成一个能够有效反映原系统主要动态特性的低维等效模型.

1.2 模态摄动法的步骤

图 1 展示了模态摄动法的算法流程图,实现过程可以分为以下六个步骤:

第一步 模态分析

首先建立系统的线性动力学模型(如基于牛顿定律或哈密顿原理推导的运动方程),通过求解特征值问题 $(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\varphi=0$,得到系统的固有频率 ω_i 和振型 φ_i ($i=1,2,\cdots,n$).由于低阶模态(如前 10 阶)对系统整体响应(如振动位移、能量分布)的贡献通常占主导地位(例如建筑结构的前 3 阶模态贡献可达 70% 以上),因此优先提取并保留低阶模态(如按频率从小到大排序的前 N 阶),作为初始分析的核心对象.

第二步 引入摄动参数

实际工程系统中,系统可能因材料性能波动(如钢材弹性模量偏差 5%)、几何尺寸误差(如构件厚度比设计值小 2%)、装配间隙(微小非线性)等产生“扰动”.这些扰动会导致系统的刚度矩阵 \mathbf{K} 、质量矩阵 \mathbf{M} 偏离理想值,进而改变模态特性(固有频率、振型)和响应.引入摄动参数 ϵ ($0<\epsilon\ll 1$,如取 $\epsilon=0.01\sim 0.1$),将系统中受扰动影响的某阶模态表示为: $\epsilon^{i-1}\varphi_i$

通过这种形式,可量化不同阶摄动对模态的影

响程度.

第三步 构建系统

基于模态分析结果和引入的摄动参数,构建系统的离散化模型.通常利用 Galerkin 离散化方法,将系统的动力学方程从连续形式(如偏微分方程)转化为离散的矩阵形式.具体来说,假设系统的响应可以表示为:

$$v(x,t)=\sum_{i=1}^N\epsilon^{i-1}\varphi_i(x)q_i(t)$$

(1)

其中, $\varphi_i(x)$ 是模态振型, $q_i(t)$ 是模态坐标.通过 Galerkin 方法,可以将系统的运动方程投影到模态空间,得到模态坐标的动力学方程.

首先基于前 N 阶模态,构建 N 维离散系统,得到对应的质量矩阵 \mathbf{M}_N 、刚度矩阵 \mathbf{K}_N 和阻尼矩阵 \mathbf{C}_N ;为验证高阶模态的影响,进一步补充 1 阶模态(即前 $N+1$ 阶),构建 $N+1$ 维离散系统,得到矩阵 \mathbf{M}_{N+1} 、 \mathbf{K}_{N+1} 、 \mathbf{C}_{N+1} .通过比较 N 维和 $N+1$ 维系统的响应,可以评估模态截断的误差.

第四步 计算矩阵范数

在模态摄动法中,计算矩阵范数是一个关键步骤,其目的是量化模态对系统动态行为的影响,并评估模态的重要性.通过计算刚度矩阵的范数,可以筛选出对系统响应具有显著影响的关键模态,从而为模型降阶提供依据.常用的矩阵范数包括:

(1)2-范数(谱范数)

$$\|\mathbf{A}\|_2=\sqrt{(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$$

(2)

即矩阵的最大奇异值,反映矩阵的“最大能量增益”(如对输入向量的最大拉伸能力).在动力学中, $\|\mathbf{K}\|_2$ 表示刚度矩阵的最大弹性势能, $\|\mathbf{M}\|_2$ 表示质量矩阵的最大惯性效应.

(2)Frobenius 范数^[19]

$$\|\mathbf{A}\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2}$$

(3)

即矩阵元素平方和的平方根,反映矩阵的“整体能量”(所有元素的综合贡献).

基于步骤三构建的 N 维和 $N+1$ 维系统,分别计算其刚度矩阵和质量矩阵的范数:

N 维系统:计算 $\|\mathbf{K}_N\|_2$ 、 $\|\mathbf{M}_N\|_2$ (或对应的 Frobenius 范数 $\|\mathbf{K}_N\|_F$ 、 $\|\mathbf{M}_N\|_F$);

$N+1$ 维系统:计算 $\|\mathbf{K}_{N+1}\|_2$ 、 $\|\mathbf{M}_{N+1}\|_2$.

矩阵范数可以用来度量不同维度矩阵之间的差别,关键对比指标主要为范数相对变化率(如:

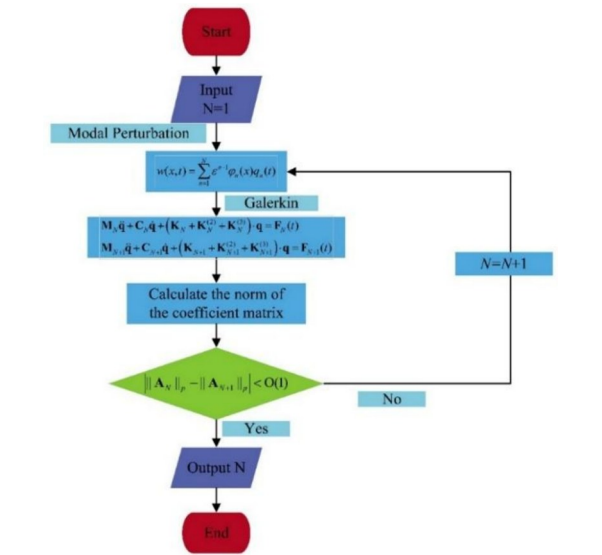


图 1 模态摄动法的算法流程图

Fig. 1 Algorithm flowchart of the modal perturbation method

$\frac{\|\mathbf{K}_{N+1}\| - \|\mathbf{K}_N\|}{\|\mathbf{K}_N\|}$ 和 $\frac{\|\mathbf{M}_{N+1}\| - \|\mathbf{M}_N\|}{\|\mathbf{M}_N\|}$) 和差值范数 (如: $\|\mathbf{K}_{N+1} - \mathbf{K}'_N\|_2$ 和 $\|\mathbf{M}_{N+1} - \mathbf{M}'_N\|_2$). 其中 \mathbf{K}'_N 、 \mathbf{M}'_N 是 N 维矩阵在 $N+1$ 维空间中的增广形式, 直接量化“增加模态带来的矩阵差异”. 若变化率小于阈值 (如 0.1%) 说明增加第 $N+1$ 阶模态对系统整体特性影响微弱.

第五步 数值验证

在模态摄动法中, 数值验证是一个关键步骤, 用于检查系统的收敛性. 通过数值方法验证系统的收敛性, 可以确保模态摄动法的计算结果具有足够的精度. 具体来说, 需要评估模态截断的误差. 定义范数误差为

$$R(\epsilon) = \frac{\|\mathbf{K}_{N+1}\| - \|\mathbf{K}_N\|}{\|\mathbf{K}_N\|} \quad (4)$$

如果误差在可接受范围内, 则认为系统收敛; 否则, 需要增加模态数量, 重新进行计算.

对于低维系统, 也可通过数值方法 (如龙格—库塔法) 求解 N 维和 $N+1$ 维系统的响应. 这些响应可以表示为模态坐标的函数, 即:

$$\begin{aligned} v_N(x, t) &= \sum_{n=1}^N \epsilon^{n-1} \varphi_n(x) q_n(t) \\ v_{N+1}(x, t) &= \sum_{n=1}^{N+1} \epsilon^{n-1} \varphi_n(x) q_n(t) \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $q_n(t)$ 是第 n 阶模态下的时间依赖坐标, $\varphi_n(x)$ 是第 n 阶模态振型.

计算 N 维系统和 $N+1$ 维系统的响应之间的误差. 误差可以表示为:

$$E = \|v_{N+1}(x, t) - v_N(x, t)\| \quad (6)$$

其中, $\|\cdot\|$ 表示适当的范数 (如 2-范数或 Frobenius 范数). 如果误差 E 在可接受范围内 (例如小于某个阈值), 则认为系统收敛; 否则, 需要增加模态数量, 重新进行计算.

第六步 确定模态

根据数值验证的结果, 确定有效模态数量 N . 有效模态数量是指满足预设计算精度所需的最小模态数量. 通过逐步增加模态数量, 进行数值验证, 直到系统的响应收敛为止. 确定有效模态数量后, 可以构建低维等效模型, 用于后续的动态分析.

基于方程 (4) 的矩阵范数, 若截断误差满足 $R(\epsilon) \leq \delta$, 则初步确定截断数量 \tilde{N} , 计算 \tilde{N} 阶以内所有模态的幅值 $A_n(\epsilon)$, 并设定模态幅值的阈值 A_{th} (如取最大幅值的 10%); 若存在某阶模态 $N \leq$

\tilde{N} , 满足 $A_n(\epsilon) > A_{th}$, 则将截断数量调整为 $N = \text{nmax}$ (nmax 为满足 $A_n(\epsilon) > A_{th}$ 的最大阶数); 若所有模态均满足 $A_n(\epsilon) > A_{th}$, 则保留 N 作为最终截断数量.

通过该平衡机制, 可有效避免“ ϵ 小导致过度截断”的问题. 确保幅值较大的模态未被截断, 同时避免引入过多无关模态.

2 模态摄动法的应用实例

考虑拉索面内的参数运动方程:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c_y \frac{\partial v}{\partial t} - T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{EA}{L} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \cdot \\ \left\{ W(t) \sin \theta + \int_0^L \left[\frac{dy}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx \right\} + \\ EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $v(x, t)$ 是拉索在位置 x 和时间 t 处的横向位移. m 表示单位质量, c_y 表示阻尼, E 为杨氏模量, A 为横截面积, L 为拉索的长度, T 为轴向张力, θ 为拉索的夹角,

2.1 模态分析

首先, 对无摄动状态下的拉索进行模态分析. 假设拉索的边界条件为固定—固定, 其模态频率和模态振型可以通过求解自由运动方程得到:

$$m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (8)$$

采用分离变量法, 令

$$v(x, t) = \varphi(x) q(t) \quad (9)$$

代入自由运动方程, 可得

$$\frac{d^2 q}{dt^2} \varphi - \frac{T}{m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} q = 0 \quad (10)$$

即

$$\frac{T}{m \varphi} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{1}{q} \frac{d^2 q}{dt^2} \quad (11)$$

该式左边仅取决于 t , 右边仅取决于 x , 其共同的值必为某一常数, 令其为 a , 则有

$$\frac{T}{m \varphi} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{1}{q} \frac{d^2 q}{dt^2} = a \quad (12)$$

可改写为

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{m}{T} a \varphi = 0 \quad (13)$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} - a q = 0 \quad (14)$$

由于常量 a 一般为负值,可令 $a = -\omega^2, T/m = \beta^2$, 则可求解

$$\varphi(x) = A \cos \frac{\omega x}{\beta} + B \sin \frac{\omega x}{\beta} \quad (15)$$

$$q(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t \quad (16)$$

若两端为固支,则边界条件满足 $v(0, t) = v(L, t) = 0$, 可得

$$\varphi(0) = 0, \varphi(L) = 0 \quad (17)$$

振型函数需满足上式,则 A 必为 0, 得

$$B \sin \frac{\omega x}{\beta} = 0 \quad (18)$$

由于 B 不为 0, 则

$$\sin \frac{\omega L}{\beta} = 0 \quad (19)$$

式(18)也被称为频率方程或者特征方程. 由此可得无穷个 ω 的值, 称为固有频率, 第 n 阶固有频率为

$$\frac{\omega_n L}{\beta} = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

或

$$\omega_n = \frac{n\beta\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (21)$$

因此, $\varphi_n(x) = \sin \frac{\omega_n \pi}{L} x$.

2.2 引入摄动参数

假设拉索受到小参数摄动,其动态响应可以表示为模态振型的线性组合:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n-1} \varphi_n(x) q_n(t) \quad (22)$$

或向量形式

$$v(x, t) = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{q}$$

其中,

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \epsilon \varphi_2, \epsilon^2 \varphi_3, \dots, \epsilon^{N-1} \varphi_{N-1})$$

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_{N-1})^T$$

$q_n(t)$ 是第 n 阶模态下的时间依赖坐标.

注意,此处引入的摄动参数是在模态叠加的过程中对高阶模态添加小参数,该摄动参数区别于系统刚度和质量引起的变化.

2.3 构建系统

将 $v(x, t)$ 的向量形式代入拉索的运动方程, 左乘 $\boldsymbol{\varphi}^T$, 并对 x 从 0 到 L 积分, 可得矩阵方程:

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}^{(2)} + \mathbf{K}^{(3)}) \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (23)$$

矩阵系数矩阵满足

$$\mathbf{M} = m \int_0^L \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi} dx \quad (24)$$

$$\mathbf{C} = c_y \int_0^L \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi} dx \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & -T \int_0^L \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi} dx + EI \int_0^L \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi}^{(4)} dx - \\ & \frac{EA}{L} \int_0^L y'' \boldsymbol{\varphi}^T dx \int_0^L y' \boldsymbol{\varphi}' dx - \frac{EA}{L} W(t) \sin \theta \int_0^L \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi}'' dx \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(2)} = & -\frac{1}{2} \frac{EA}{L} \int_0^L y'' \boldsymbol{\varphi}^T dx \int_0^L \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi} q dx - \\ & \frac{EA}{L} \int_0^L \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi}^{(4)} dx \int_0^L \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi} q dx \end{aligned} \quad (27)$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = -\frac{1}{2} \frac{EA}{L} \int_0^L \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi}'' q dx \int_0^L \boldsymbol{\varphi}' \boldsymbol{\varphi}' q dx \quad (28)$$

$$\mathbf{F} = \frac{EA}{L} W(t) \sin \theta \int_0^L y'' \boldsymbol{\varphi}^T dx \quad (29)$$

2.4 计算矩阵范数

质量矩阵与阻尼矩阵是一个对角矩阵, 并且最大元素在一阶主子式上. 这表明质量与阻尼在低阶模态起决定性作用. 因此, 模态截断的数量主要依赖于刚度矩阵.

首先考虑线性刚度矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & -T \int_0^L \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi} dx + EI \int_0^L \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi}^{(4)} dx - \\ & \frac{EA}{L} \int_0^L y'' \boldsymbol{\varphi}^T dx \int_0^L y' \boldsymbol{\varphi}' dx - \frac{EA}{L} W(t) \sin \theta \int_0^L \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi}'' dx \end{aligned} \quad (30)$$

根据 2-范数定义, 可计算线性刚度矩阵 \mathbf{K} 的特征值. 需要注意, 在线性刚度矩阵中包含参数激励 $W(t)$, 依赖于时间, 因此 $\|\mathbf{K}\|_2$ 的结果与时间有关, 这不利于计算, 根据范数定义, $W(t)$ 为一元函数, 并结合工程意义, 必有上界, 即满足 $\|W(t)\| \leq W$ 因此, 用矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & -T \int_0^L \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi} dx + EI \int_0^L \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi}^{(4)} dx - \\ & \frac{EA}{L} \int_0^L y'' \boldsymbol{\varphi}^T dx \int_0^L y' \boldsymbol{\varphi}' dx - \frac{EA}{L} W \sin \theta \int_0^L \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi}'' dx \end{aligned} \quad (31)$$

代替式(30).

图2直观地展示了线性刚度矩阵的范数变化情况,揭示了在小扰动情况下,系统的前6个模式对动态行为的贡献非常接近.这一现象表明,单自由度系统与6自由度系统在动态特性上具有高度相似性,一阶模态在结构的振动过程中占据主导地位.基于此特性,可以对系统进行降阶处理,从而有效简化分析过程.这种降阶方法不仅能够显著减少计算复杂度,还能在保证精度的前提下提高计算效率,适用于处理复杂动力学系统.

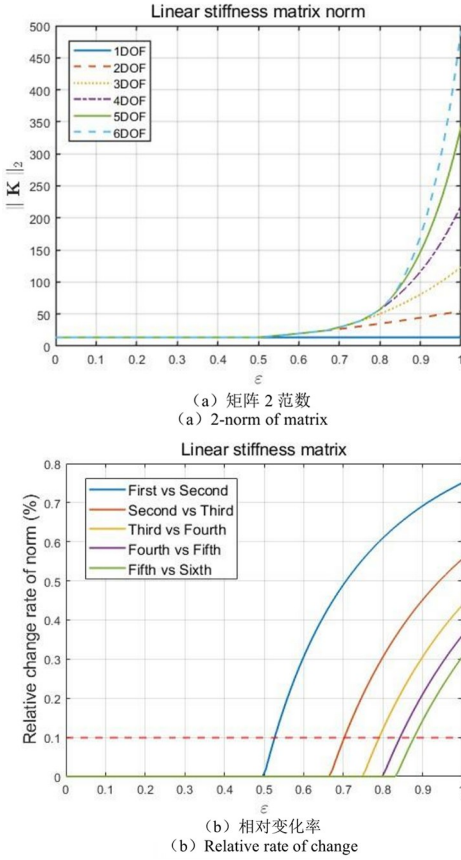


图2 前6个自由度系统的线性刚度矩阵范数
Fig.2 The linear stiffness matrix norm of the first six degrees of freedom system

系统包含了二次非线性刚度和三次非线性刚度,理解非线性刚度对于准确预测和分析结构的动态响应至关重要.非线性刚度矩阵的分析与线性刚度矩阵类似,二次非线性刚度矩阵:

$$\begin{aligned} K^{(2)} = & -\frac{1}{2} \frac{EA}{L} \int_0^L y'' \boldsymbol{\varphi}^T dx \int_0^L \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi} dx - \\ & \frac{EA}{L} \int_0^L \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi}''' dx \int_0^L \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi} dx \end{aligned} \quad (32)$$

二次刚度矩阵中包含广义坐标 \boldsymbol{q} ,它与时间有关,无法直接计算矩阵范数.为方便分析非线性刚度矩阵的 2-范数,记

$$K^{(2)} = G_1 \boldsymbol{q}^T G_2 + G_3 \boldsymbol{q}^T G_1 \quad (33)$$

其中,

$$\begin{aligned} G_1 = & -\frac{1}{2} \frac{EA}{L} \int_0^L y'' \boldsymbol{\varphi}^T dx \\ G_2 = & \int_0^L \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi} dx, \quad G_3 = -\frac{EA}{L} \int_0^L \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi}''' dx \end{aligned}$$

根据范数的三角不等式与相容性,可得

$$\|K^{(2)}\| \leq \|G_1\| \cdot \|\boldsymbol{q}^T\| \cdot \|G_2\| + \|G_3\| \cdot \|\boldsymbol{q}^T\| \cdot \|G_1\| \quad (34)$$

由于范数 $\|\boldsymbol{q}\|$ 必有上界,且恒为常数,即存在 $M \in \mathbf{R}$,使得 $\|\boldsymbol{q}\| \leq M$,从而有

$$\begin{aligned} \|K^{(2)}\| \leq & \|G_1\| \cdot \|\boldsymbol{q}^T\| \cdot \|G_2\| + \|G_3\| \cdot \|\boldsymbol{q}^T\| \cdot \|G_1\| \\ \|G_1\| \leq & M(\|G_1\| \cdot \|G_2\| + \|G_3\| \cdot \|G_1\|) \end{aligned} \quad (35)$$

令

$$g_2(\epsilon) = \|G_1\| \cdot \|G_2\| + \|G_3\| \cdot \|G_1\| \quad (36)$$

函数 $g_2(\epsilon)$ 能描述二次刚度的矩阵范数关于扰动参数的变化特征,因此,可以通过研究函数 $g_2(\epsilon)$ 对二次刚度进行定性分析.

图3(a)展示了前6个自由度系统的二次刚度矩阵的范数($\|K^{(2)}\|$)随扰动参数 ϵ 的变化情况.当 ϵ 增加到 0.5 以上时,系统的刚度矩阵范数随着

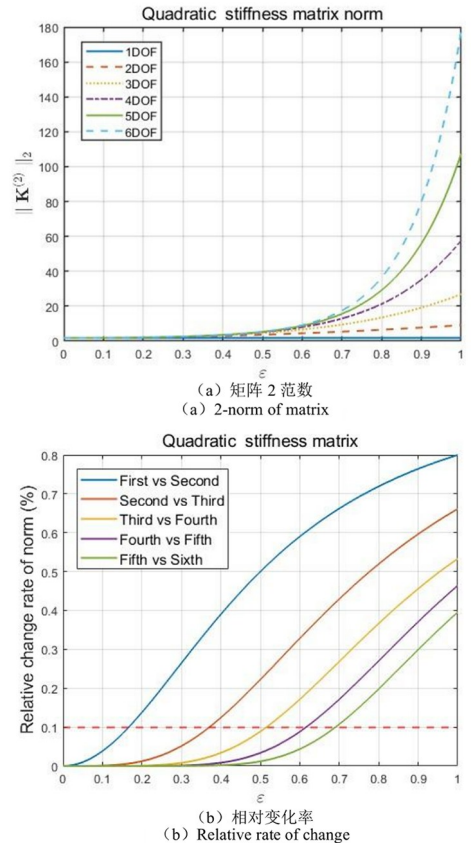


图3 前6个自由度系统的二次非线性刚度矩阵范数
Fig.3 The quadratic nonlinear stiffness matrix norm of the first six degrees of freedom system

摄动参数的增加而显著增加. 在图 3(b)中,6 自由度系统对应曲线上升最快,表明在大扰动下,多自由度系统的刚度矩阵范数增加更为显著. 图 3 表明,在小扰动下,系统的动态行为主要由低阶模态控制,高阶模态的影响较小.

同理,可处理三次非线性刚度矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(3)} &= -\frac{1}{2} \frac{EA}{L} \int_0^L \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi}'' \mathbf{q} dx \int_0^L \boldsymbol{\varphi}' \mathbf{q} \boldsymbol{\varphi}' dx \\ &= \mathbf{K}_1 \mathbf{q} \mathbf{q}^T \mathbf{G} \mathbf{K}_2 \end{aligned}$$

(37)

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= -\frac{1}{2} \frac{EA}{L} \int_0^L \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi}'' dx \\ \mathbf{K}_2 &= \int_0^L \boldsymbol{\varphi}'^T \boldsymbol{\varphi}' dx \end{aligned}$$

(38)

则有

$$\|\mathbf{K}^{(3)}\| = \|\mathbf{K}_1\| \cdot \|\mathbf{q} \mathbf{q}^T\| \cdot \|\mathbf{K}_2\|$$

(39)

令

$$g_3(\epsilon) = \|\mathbf{K}_1\| \cdot \|\mathbf{K}_2\|$$

(40)

图 4(a)展示了在不同模态数量下,三次非线性刚度矩阵范数 $\|\mathbf{K}^{(3)}\|$ 与参数 ϵ 之间的关系. 参

数 ϵ 对所有系统的三次刚度矩阵范数都有显著影响. 随着 ϵ 的增加, $\|\mathbf{K}^{(3)}\|$ 呈现出非线性增长的趋势. 这表明 ϵ 是影响系统三次非线性刚度特性的重要参数,其变化会导致系统刚度特性的显著改变. 图 4(b)展示了三次非线性刚度矩阵的相对变化率随摄动参数 ϵ 的变化情况. 图中的横轴表示摄动参数 ϵ ,纵轴表示范数的相对变化率(以百分比表示). 不同的曲线代表不同阶次之间的相对变化率. 在 ϵ 较小的范围内(大约 $\epsilon < 0.5$),所有曲线都显示出较小的增长,表明在小摄动下,系统的三次非线性刚度矩阵范数变化不大. 特别是第 5 阶与第 6 阶之间的相对变化率(绿色实线)在 $\epsilon < 0.5$ 时几乎为零,表明在这个范围内,这两阶之间的刚度矩阵范数几乎没有变化. 当 ϵ 增加到 0.5 以上时,所有曲线开始显著上升,表明系统的三次非线性刚度矩阵范数随着摄动参数的增加而显著增加. 随着阶次的增加,相对变化率的曲线在 ϵ 较大时上升得更快. 这可能反映了高阶模态在面对相同摄动时,其刚度矩阵范数的变化更为敏感.

2.5 数值验证

数值验证的主要目的是确认前面关于刚度矩阵中不同阶数组组合的范数相对变化率与参数 ϵ 关系的分析结果的准确性和可靠性. 图 5 展示了 2 自由度系统和 3 自由度的幅频响应曲线. 通过对比图 5 中的红色圆圈(代表 3-DOF 系统)和黑色星形线(代表 2-DOF 系统),发现两者在一阶模态上的频响曲线几乎无异. 这种一致性不仅验证了模态摄动法在模态截断中的准确性,也暗示了在某些情况下,高阶模态对拉索动态响应的影响可以忽略不计.

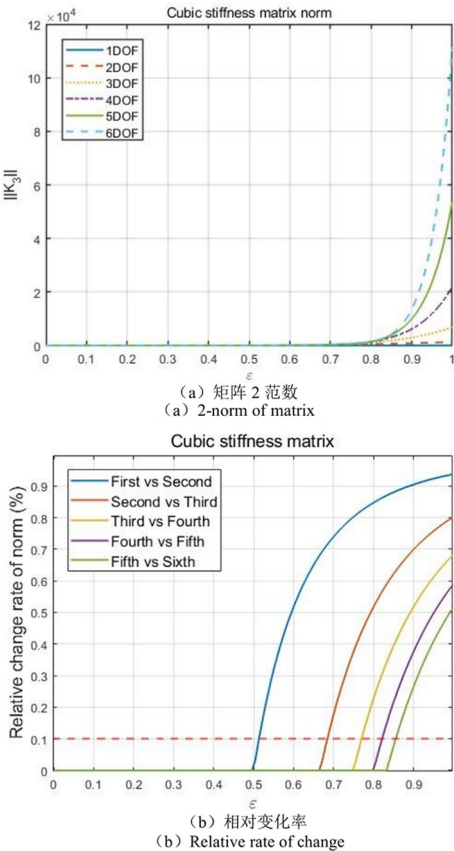


图 4 前 6 个自由度系统的三次非线性刚度矩阵范数
Fig. 4 The cubic nonlinear stiffness matrix norm of the first six degrees of freedom system

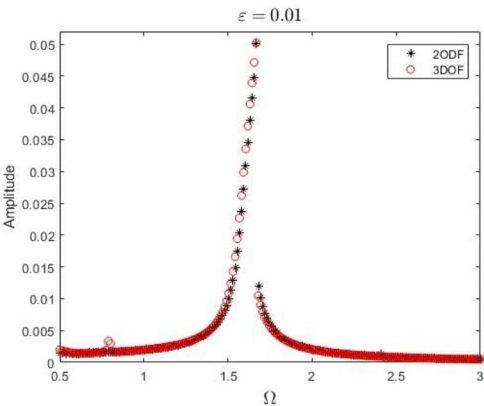


图 5 二自由度系统和三自由度的幅频响应曲线
Fig. 5 Frequency-response curves for the 2-DOF and 3-DOF systems

基于弹性体振动理论,系统动能 T 与势能 V 的传统表达式为:

$$T = \frac{1}{2} \dot{q} M \dot{q}, \quad V = \frac{1}{2} q K q.$$

图 6 展示了动能与势能的变化图,通过数值实验发现,当 $\epsilon > 0.6$ 时,高阶模态坐标的幅值变化较复杂,这可能会使得模态摄动法在选取较大的摄动参数时,模态截断方法在高维系统中失效.

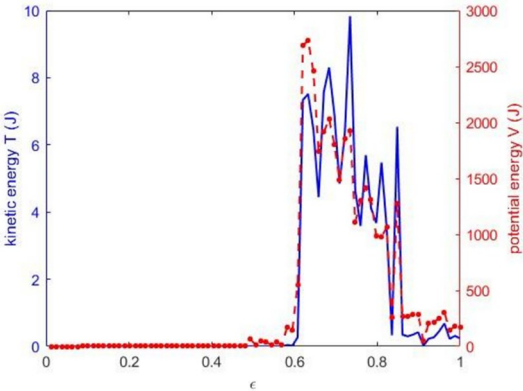


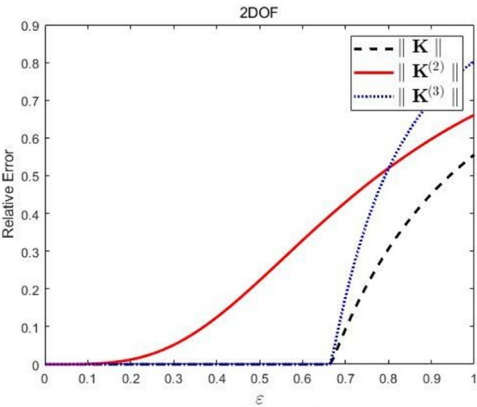
图 6 动能与势能关于摄动参数的变化
Fig. 6 The changes of kinetic energy and potential energy with respect to perturbation parameters

数值验证的结果进一步证实了模态摄动法在处理三次非线性刚度矩阵时的有效性和可靠性. 通过对比不同自由度系统的幅频响应曲线,不仅验证了模态截断的准确性,还揭示了在特定条件下高阶模态对动态响应影响的有限性. 这些发现对于结构设计和动态分析具有重要的实际应用价值.

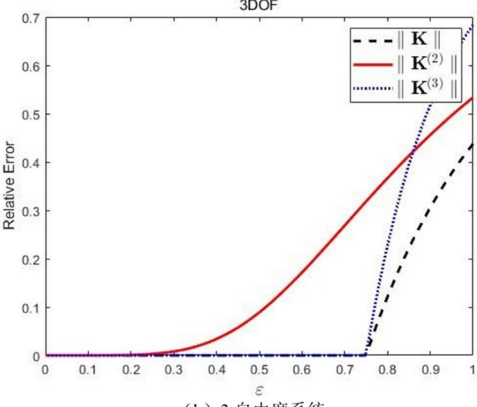
2.6 确定模态

在数值计算中,可以通过改变摄动参数的步长、迭代次数等计算参数,观察刚度矩阵范数误差的变化情况. 如果随着步长细化或迭代次数增加,范数误差逐渐减小并趋于一个稳定值,说明计算方法是收敛的;反之,如果误差没有明显减小甚至增大,则可能需要调整计算方法或参数.

根据误差设计[公式(4)],图 7 展示了刚度矩阵的范数误差,随着摄动参数 ϵ 的增加,线性刚度矩阵的相对误差较小,但在 ϵ 较大时也会有所增加,而非线性刚度矩阵的相对误差显著增大,尤其是在 ϵ 接近 1 时,这表明非线性效应在系统中的影响随着摄动参数 ϵ 的增加而显著增大. 这些结果表明,在处理具有显著非线性的结构问题时,需要特别注意非线性效应的影响,尤其是二次和三次非线性效应.



(a) 2 自由度系统
(a) 2 degree-of-freedom system



(b) 3 自由度系统
(b) 3 degree-of-freedom system

图 7 不同系统之间的范数误差
Fig. 7 Norm errors between different systems

3 对比 Galerkin 离散

在模态摄动法中,取 $\epsilon = 1$ 时,便是 Galerkin 方法^[20],这也意味着,Galerkin 方法是模态摄动法的一种特殊情形. 因此,在传统离散过程中,同样可以使用矩阵范数来确定模态数量. 图 8 展示了不同模态阶数下的刚度矩阵误差,低阶模态的相对误差较高,尤其是二次和三次刚度矩阵的误差,这表明这些模态对非线性效应非常敏感. 随着模态阶数的增加,所有刚度矩阵的相对误差都呈现出下降的趋势. 这可能意味着高阶模态对系统的整体动态行为影响较小. 在传统的离散方法,至少需要截断到第 11 阶模态才能更准确、有效地描述系统的动态行为. 该图表明,对于大多数模态,线性刚度矩阵提供了较好的近似,而非线性刚度矩阵(尤其是三次刚度矩阵)在低阶模态中引入了较大的误差. 这可能意味着在低阶模态下,非线性效应对系统动态行为有显著影响. 随着模态编号的增加,非线性效应的影响逐渐减小,高阶模态可以更好地用线性刚度矩阵来近似.

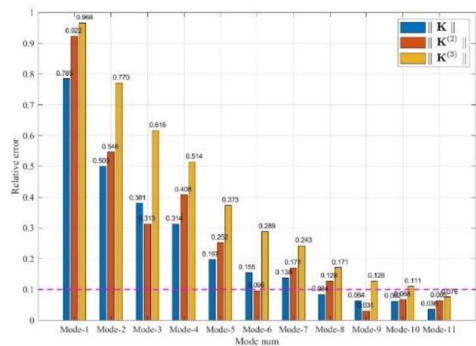


图 8 不同模态阶数下的刚度矩阵误差比较
Fig. 8 Comparison of stiffness matrix errors across different modal orders

4 总结

本文详细阐述了模态摄动法作为一种高效的模态分析技术,在处理复杂动力学系统方面的理论框架、关键步骤及应用实例。通过融合经典模态分析与摄动理论,模态摄动法为高维、非线性及参数不确定系统的动态响应分析与模态特性研究提供了一种强有力的工具。

(1)关键步骤的合理性:模态摄动法的实施步骤包括模态分析、引入摄动参数、构建系统、计算矩阵范数、数值验证及确定模态,每一步都紧密相连,共同确保了分析结果的准确性和可靠性。特别是矩阵范数的计算,通过量化模态对系统动态行为的影响,有效评估了模态的重要性,为模型降阶提供了科学依据。

(2)应用实例的验证性:通过拉索面内参数运动方程的具体应用实例,本文展示了模态摄动法在实际工程问题中的有效性和可靠性。特别是在处理非线性刚度矩阵时,模态摄动法展现了其独特的优势,能够准确预测和分析结构的动态响应。

(3)对比 Galerkin 方法的优越性:通过与 Galerkin 方法的对比分析,本文进一步揭示了模态摄动法的优越性。例如,在处理拉索在参数激励时的模态截断问题时,Galerkin 方法至少需要 11 阶模态,模态摄动法通过矩阵范数筛选机制,能够在更低的模态阶数下达到较高的计算精度,显著提高了计算效率。

尽管模态摄动法在本文的研究中表现出了良好的性能,但其在处理高度非线性和强耦合系统时的适用性仍需进一步研究。此外,将模态摄动法与其他数值方法结合,以提高分析的准确性和效率,也是未来研究的一个重要方向。

参考文献

[1] NAYFEH A H, MOOK D T. Nonlinear oscillations [M]. New York: John Wiley & Sons, 2008.

[2] 唐云. 复杂系统的建模与仿真[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.

TANG Y. Modeling and simulation of complex systems [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008. (in Chinese)

[3] 胡小金, 舒欣, 赖贞华, 等. 近地面系留气球—缆绳复杂系统动力学建模方法[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(5): 48—55.

HU X J, SHU X, LAI Z H, et al. Dynamics modeling of a near-ground tethered balloon cable system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(5): 48—55. (in Chinese)

[4] GAO T T, BARZEL B, YAN G. Learning interpretable dynamics of stochastic complex systems from experimental data [J]. Nature Communications, 2024, 15(1): 6029.

[5] PETER S, SCHREYER F, LEINE R I. A method for numerical and experimental nonlinear modal analysis of nonsmooth systems [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 120: 793—807.

[6] MAHDIABADI M K, TISO P, BRANDT A, et al. A non-intrusive model-order reduction of geometrically nonlinear structural dynamics using modal derivatives [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 147: 107126.

[7] 潘旦光, 李雪菊, 谭晋鹏, 等. 地震作用下悬臂类结构的模态截断方法[J]. 建筑结构学报, 2020, 41(2): 55—62.

PAN DG, LI XJ, TAN JP, et al. Modal truncation method on cantilever-type structures under seismic excitations [J]. Journal of Building Structures, 2020, 41(2): 55—62. (in Chinese)

[8] SUMAN S K, KUMAR A. Linear system of order reduction using a modified balanced truncation method [J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2021, 40(6): 2741—2762.

[9] LI L, HU Y J, WANG X L. Eliminating the modal truncation problem encountered in frequency responses of viscoelastic systems [J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(4): 1182—1192.

[10] 曾庆华. 复振型导数计算的移位多次模态加速法[J]. 计算结构力学及其应用, 1995, 12(2): 205—

- 211.
- ZENG Q H. A shifted-poles and multiple modal acceleration method for computing complex mode shape derivatives[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1995, 12(2): 205—211. (in Chinese)
- [11] HUANG M S, CHENG X H, ZHU Z G, et al. A novel two-stage structural damage identification method based on superposition of modal flexibility curvature and whale optimization algorithm [J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2021, 21(12): 2150169.
- [12] 田青龙, 於祖庆, 兰朋, 等. 热—动力学耦合多体系统建模与降阶[J]. 力学学报, 2022, 54(9): 2588—2600.
- TIAN Q L, YU Z Q, LAN P, et al. Thermal-dynamic coupled analysis and model order reduction of multibody system [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2022, 54(9): 2588—2600. (in Chinese)
- [13] 张听涛, 赵兆冰, 蔡绍辉, 等. 模态截断对悬索非线性耦合共振响应影响[J]. 振动与冲击, 2023, 42(3): 50—56.
- ZHANG X T, ZHAO Y B, CAI S H, et al. Effects of mode truncation on nonlinear coupled resonant responses of suspended cable [J]. Journal of Vibration and Shock, 2023, 42(3): 50—56. (in Chinese)
- [14] YOON G H. Structural topology optimization for frequency response problem using model reduction schemes [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199(25/26/27/28): 1744—1763.
- [15] LI Y Q, MA Y. Free vibration analysis of multi-bladed propeller propulsion system based on substructure modal synthesis method [J]. Applied Mathematical Modelling, 2025, 138: 115763.
- [16] SHI J Y, BAMER F, MARKERT B. A structural pounding formulation using systematic modal truncation [J]. Shock and Vibration, 2018, 2018(1): 6378085.
- [17] ROOK T E, SINGH R. Modal truncation issues in synthesis procedures for vibratory power flow and dissipation [J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1996, 99(4): 2158—2166.
- [18] KANG H J, YUAN Q, SU X Y, et al. Modal truncation method for continuum structures based on matrix norm: modal perturbation method [J]. Nonlinear Dynamics, 2024, 112(13): 11313—11328.
- [19] BÖTTCHER A, WENZEL D. The frobenius norm and the commutator [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2008, 429(8/9): 1864—1885.
- [20] 王晋麟, 曹登庆, 宋敕洵. 大型动力系统的降维: 基于模态截断的非线性 Galerkin 方法[J]. 动力学与控制学报, 2009, 7(2): 108—112.
- WANG J L, CAO D Q, SONG M T. Dimensional reduction of large dynamical systems: an nonlinear Galerkin method based on model truncation [J]. Journal of Dynamics and Control, 2009, 7(2): 108—112. (in Chinese)