

# 基于双场动力学降阶模型的高效预测与最优控制<sup>\*</sup>

周文祥<sup>1,2</sup> 罗凯<sup>1,2†</sup>

(1. 北京理工大学 空天科学与技术学院, 北京 100081)

(2. 北京理工大学 临近空间环境特性及效应全国重点实验室, 北京 100081)

**摘要** 大变形结构动力学模型常用于模拟大型化、轻量化结构的瞬态响应, 但其几何非线性特征使高效而精确的建模与控制面临挑战。基于数据驱动的本征正交分解(POD)与 Hellinger-Reissner 变分原理, 可构造大变形结构的双场动力学降阶模型。该模型引入先验的应力信息, 并将位移基推导的刚度不变量阶数由四阶降低至三阶, 由此提升了瞬态动力学降阶计算的精度与效率。在双场动力学降阶模型基础上, 进一步探讨柔性结构动响应的高效预测与最优控制问题, 嵌入模型预测控制框架, 实现轨迹优化控制。通过细长杆系与机翼骨架两个结构算例表明, 该方法在保证精度的同时显著降低了在线计算成本, 相较于传统位移 POD 降阶方法, 在精度与实时性方面均表现出更优性能, 并展现出良好的模型预测控制适用性。

**关键词** 双场动力学降阶, Hellinger-Reissner 变分原理, 几何非线性, 瞬态响应, 模型预测控制

中图分类号:O39

文献标志码:A

## Efficient Prediction and Optimal Control Based on the Two-Field Dynamics Reduced-Order Model<sup>\*</sup>

Zhou Wenxiang<sup>1,2</sup> Luo Kai<sup>1,2†</sup>

(1. School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

(2. State Key Laboratory of Environment Characteristics and Effects for Near-space, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract** Dynamic models of large-deformation structures are widely used to simulate the transient response of large-scale and lightweight structures, but their geometric nonlinearity poses significant challenges for efficient and accurate modeling and control. The two-field reduced-order model (ROM) for large-deformation structures can be constructed, via data-driven Proper Orthogonal Decomposition (POD) with the Hellinger-Reissner variational principle. This model incorporates prior stress information and reduces the order of stiffness invariants derived from displacement bases from fourth to third order, thereby improving both the accuracy and efficiency of transient dynamic model reduction. Based on the two-field ROM, this work further investigates efficient prediction and optimal control of flexible structural responses by embedding the ROM into a model predictive control (MPC) framework to achieve trajectory optimization and tracking. Case studies on a slender beam system and a wing skeleton demonstrate that the proposed approach significantly reduces online computational cost while maintaining accuracy, and outperforms traditional displacement-based POD methods in both efficiency and accuracy, showing strong applicability to MPC-based control of nonlinear flexible structures.

2025-09-02 收到第 1 稿, 2025-09-24 收到修改稿。

\* 国家自然科学基金资助项目(12522201, 12494563), National Natural Science Foundation of China(12522201, 12494563).

† 通信作者 E-mail: kailuo@bit.edu.cn

**Key words** two-field dynamic reduction, Hellinger-Reissner variational principle, geometric nonlinearity, transient response, model predictive control

## 引言

随着空天科技的快速发展,高端装备正加速向大型化与轻量化方向演进。在航天领域,为实现高分辨率的对地观测,需构建具备大口径与高型面精度的空间结构,以支撑高增益在轨天线系统的应用<sup>[1]</sup>;在航空领域,大型化与轻量化结构设计不仅能够显著提升燃油效率与载荷能力,还可改善飞行舒适性,从而带来显著的经济与社会效益<sup>[2]</sup>。

然而,此类结构在力学建模与分析中往往面临维数高、非线性强等挑战,使得基于非线性有限单元构建的动力学模型难以实现高效求解<sup>[3]</sup>。在工程应用中,尤其是面向大型结构瞬态响应的主动调控,基于模型的最优控制方法需对系统动力学方程进行频繁调用,进一步加剧计算负担<sup>[4]</sup>。相较之下,降阶动力学建模凭借突出的计算效率,已成为应对高维非线性动力学实时在线计算的重要途径之一<sup>[5]</sup>。

为兼顾效率与精度,模型降阶方法通过提取系统的低维主导动力学特征,在保证精度的前提下显著降低模型维数<sup>[6,7]</sup>。目前,基于降阶模型的研究已在动力学高效预测方面取得重要进展<sup>[5]</sup>,并广泛应用于流场重构<sup>[8]</sup>、结构振动分析<sup>[9]</sup>及柔性机构运动仿真<sup>[10]</sup>等。然而,在工程任务中,降阶模型的作用不仅是实现高效、精确的正向动力学计算,更需有效嵌入动力学控制框架,以支撑高性能的在线求解,从而实现结构的实时调控与优化。

相比正向预测,在线优化控制对模型的计算效率更为苛刻,因此模型降阶技术在该领域受到了广泛关注<sup>[5]</sup>。对于存在大变形的系统,几何非线性效应限制了降阶模型效率的进一步提升<sup>[11]</sup>。在模型预测控制(MPC)等框架中,动力学模型的规模与计算效率又直接决定可实现的控制频率,从而限制应用范围,并对降阶方法的高效性提出更严格要求<sup>[12]</sup>。围绕这一问题,已发展出动态模态分解(DMD)<sup>[13]</sup>、本征正交分解(POD)<sup>[14]</sup>以及谱子流形(SSM)<sup>[15,16]</sup>等多种降阶方法,用于实现系统的高效动力学预测并与最优控制。

典型的模型降阶方法通常可分为两个阶段:首

先,构造低维子空间的基向量;其次,在该子空间内建立系统的降阶模型(ROM)。其中,基向量的质量决定了 ROM 能否有效捕捉系统的主要动力学特征。其合理性不仅直接影响在保留关键动力学特性的前提下可降的维度,还影响 ROM 的泛化能力<sup>[3]</sup>。

适用于小变形线性系统的模态叠加法,以振动模态为基向量构建 ROM。然而,由于振动模态通常在平衡位置求得,难以准确描述远离平衡点的刚体运动或大变形,导致难以对大变形非线性系统进行有效降阶<sup>[17]</sup>。近年来,随着数据驱动方法的发展,POD 受到广泛关注,它能够从响应数据直接提取模态基向量,并基于能量进行模态截断,有效捕捉主要非线性动力学行为<sup>[5]</sup>。在此基础上,双场变分 POD 方法通过引入应力基,并结合 Hellinger-Reissner(H-R)变分原理,对缩减内力重新表述,相比同维数的位移基单场降阶模型,能更准确刻画几何非线性系统的动力学特性<sup>[18]</sup>。

当降阶基向量构建完成后,需要将全模型动力学方程映射至低维子空间,以获得降阶动力学方程并实现高效求解。对于基于线性模态的降阶方法,通常假设广义位移可表示为基向量与缩减坐标的线性组合,并利用 Galerkin 投影将全模型方程映射为降阶模型方程<sup>[6,7]</sup>。然而,对于大变形非线性系统,该方法需频繁在全模型与降阶模型间进行映射,计算复杂度仍依赖于全模型维数,限制了效率提升<sup>[6]</sup>。为此,可采用超降阶技术,通过在有限采样点或单元上执行投影,替代全模型计算,从而在保留主要动力学特征的同时,显著降低残差与雅可比矩阵的组装和求解成本,实现所谓的“二次降阶”<sup>[7]</sup>。此外,对于仅含几何非线性的系统,可在离线阶段预先计算刚度不变量,并在降阶模型中以最高阶为四阶张量的形式表示,从而消除在线求解对全模型的依赖,典型代表为 STEP(stiffness evaluation procedure)方法<sup>[14,15]</sup>。进一步,在双场 POD 降阶模型中,应力基的引用使得刚度不变量的最高阶张量由四阶降低至三阶,从而实现更高效的非线性动力学求解<sup>[18]</sup>。

本文针对大变形结构的非线性动力学系统,构

建位移+应力 POD 基的双场降阶动力学模型,研究基于降阶动力学的高效预测与最优控制.通过细长杆系结构与机翼骨架结构算例,验证该方法的计算精度和效率,并在 MPC 框架下实现轨迹跟踪控制,推动双场动力学降阶方法向工程应用的拓展.

## 1 动力学降阶建模与控制

采用双场 POD 方法对高维非线性结构动力学系统进行降阶建模时,首先需建立系统全模型,并开展数值计算以生成数据快照矩阵.随后,对快照矩阵进行奇异值分解(SVD),分别提取位移基向量与应力基向量.最后,基于这两组基向量建立系统的降阶动力学方程.

为了简化后续推导表述,本研究约定:以黑体符号(如  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{A}$ )表示向量或张量,以带下标的斜体符号(如  $a_i$  和  $A_{ij}$ )表示其分量.

### 1.1 系统动力学全模型

对于非线性结构动力学系统,采用有限元方法离散化后,可建立如下全模型动力学方程<sup>[3]</sup>:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}^{\text{ext}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0} \quad (1)$$

其中,  $t$  表示时间,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$  表示系统的广义坐标向量,  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  和  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  分别为系统的常数质量阵与常数阻尼阵,  $N$  为全模型的广义坐标个数, 即全模型维数;  $\mathbf{F}^{\text{int}} : \mathbf{q} \mapsto \mathbb{R}^N$  表示系统的非线性内力向量,  $\mathbf{F}^{\text{ext}} : (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \mapsto \mathbb{R}^N$  表示系统受到的外力向量.

对于含几何非线性的结构动力学系统,随着结构的变形,式(1)的内力向量  $\mathbf{F}^{\text{int}}$  呈现显著的非线性特征,因此在求解过程中需对其进行迭代更新.在全模型中,该非线性内力向量的计算复杂度与系统的维数密切相关.进一步,采用隐式时间积分算法对全模型动力学方程进行离散后,需计算系统切线刚度矩阵,并通过牛顿迭代法求解非线性代数方程组,其计算复杂度亦会随系统维数的升高而显著上升.通过提取系统的低维动力学特征,构建相应的降阶动力学方程,可在保证精度的同时提升动力学计算效率.

### 1.2 POD 基向量

在构建降阶模型时,采用 POD 方法构建位移降阶基向量(ROB),依赖于全模型的动力学行为.

为此,需预先收集全模型的响应数据,并组装成如下形式的位移快照矩阵:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0 \quad \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_0 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_D - \mathbf{q}_0] \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_D$  为通过全模型计算得到的由  $t_1$  到  $t_D$  离散时刻的广义坐标向量,  $D$  是预先选取的系统动力学响应样本数,  $\mathbf{q}_0$  为初始状态的广义坐标向量.对快照矩阵  $\mathbf{Q}$  进行奇异值分解得到

$$\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\tilde{\mathbf{V}}^T \quad (3)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  与  $\tilde{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{D \times D}$  分别为正交的空间模态矩阵与时间模态矩阵,组成  $\tilde{\mathbf{U}}$  的列向量称为 POD 位移模态;对角矩阵  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathbb{R}^{N \times D}$  的主对角线元素为系统的奇异值,用于表征各阶 POD 模态所包含的数据能量.为了构建低维的降阶模型,可根据  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  内各阶模态的奇异值占比(即能量占比),取  $\tilde{\mathbf{U}}$  中的前  $n$  ( $n \ll N$ ) 阶模态截断,组成位移 ROB 矩阵  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times N}$ .利用该位移 ROB 矩阵,近似表达系统的广义位移向量为

$$\Delta\mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 \approx \mathbf{U}\boldsymbol{\xi} \quad (4)$$

其中,  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$  表示降阶模型的广义位移向量.

在上述位移 POD 模态基础上,进一步采用双场 POD 方法,引入应力 POD 模态,构造双场 ROB,并借助 H-R 变分原理对系统的非线性内力向量进行重新描述.本研究中,定义系统的广义应力向量  $\mathbf{q}^s \in \mathbb{R}^{N_s}$  由全模型所有单元高斯积分点处的应力向量组成,其形式为

$$\mathbf{q}^s = [\mathbf{s}_1^T \quad \mathbf{s}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{s}_{N_G}^T]^T \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_{N_G}$  为  $N_G$  个高斯积分点处以 Voigt 符号形式表示的第二类 Piola-Kirchhoff 应力向量,满足  $N_s = 6N_G$ .为确保位移场和应力场之间的兼容性,构造广义应力向量  $\mathbf{q}^s$  使用的高斯积分点与用于位移场数值积分的高斯积分点保持一致.由此,可构建应力快照矩阵:

$$\mathbf{Q}^s = [\mathbf{q}_1^s - \mathbf{q}_0^s \quad \mathbf{q}_2^s - \mathbf{q}_0^s \quad \cdots \quad \mathbf{q}_D^s - \mathbf{q}_0^s] \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{q}_1^s, \mathbf{q}_2^s, \dots, \mathbf{q}_D^s$  表示全模型计算的由  $t_1$  到  $t_D$  时刻的广义应力向量;  $\mathbf{q}_0^s$  为初始状态的广义应力向量,对于初始构型不含预应力的结构,  $\mathbf{q}_0^s$  为零向量.

为获得系统应力 ROB,对上述应力快照矩阵进行奇异值分解,其形式与式(3)一致.随后,截取其空间模态矩阵的前  $m$  ( $m \ll N$ ) 阶,得到应力 ROB 矩阵  $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{m \times N_s}$ .对于初始构型无应力的系

统, 其广义应力向量可由应力 ROB 矩阵近似表达为

$$\mathbf{q}^s \approx \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\eta} \quad (7)$$

其中,  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^m$  为降阶模型的广义应力向量, 对于第  $e$  个单元的第  $g$  个高斯积分点, 其应力张量  $\bar{\mathbf{S}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  可被重构为

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{T}^s \bar{\mathbf{L}}^{eg} \mathbf{q}^s \quad (8)$$

其中, 布尔矩阵  $\bar{\mathbf{L}}^{eg} \in \mathbb{R}^{6 \times N_s}$  用于从全局广义应力向量中获取第  $e$  个单元的第  $g$  个高斯积分点处的应力分量,  $\mathbf{T}^s \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 6}$  将 Voigt 记号下的应力向量转换为对称张量形式.

在 H-R 双场变分原理中, 系统广义应力与广义位移的耦合关系可通过广义势能表示. 若给定系统位移 ROB 的阶数  $n$ , 则应力 ROB 阶数  $m$  须满足 inf-sup 条件给出的下界限制. 同时, 若  $m$  取值过大, 则可能导致应力子空间包含无法与位移子空间相匹配的冗余信息. 基于上述考虑, 本研究在计算中选取  $m=2n$ , 以兼顾数值精度和计算效率.

### 1.3 降阶动力学方程

基于描述大变形的 St. Venant-Kirchhoff 本构模型, 在 H-R 双场变分原理框架下, 将单元的广义弹性势能表示为

$$\bar{U}^e = -\frac{1}{2} \int_{V^e} \bar{\mathbf{S}}_{an} C_{anbc} \bar{\mathbf{S}}_{bc} dV^e + \int_{V^e} \bar{\mathbf{S}}_{an} C_{anbc} S_{bc} dV^e \quad (9)$$

其中,  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  和  $\bar{\mathbf{S}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  分别表示由位移 ROB 和应力 ROB 构建的应力张量,  $\mathbf{C}$  表示材料的四阶柔度张量. 具体地, 由式(4)的降阶模型广义位移向量, 经非线性几何方程与本构方程计算  $\mathbf{S}$ ; 可通过式(7)和式(8)计算  $\bar{\mathbf{S}}$ . 进一步, 将单元广义弹性势能  $\bar{U}^e$  对缩减广义坐标向量  $\boldsymbol{\kappa} = [\boldsymbol{\eta}^T \quad \boldsymbol{\xi}^T]^T \in \mathbb{R}^{m+n}$  求导, 并对全体单元进行求和, 可得到系统降阶模型的缩减内力向量  $\bar{\mathbf{f}}^{\text{int}}$ :

$$\bar{\mathbf{f}}_i^{\text{int}} = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\partial \bar{U}^e}{\partial \boldsymbol{\kappa}_i} = \begin{cases} -\bar{\alpha}_{ij} \boldsymbol{\eta}_j + \bar{\beta}_{ij} \boldsymbol{\xi}_j + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{irp} \boldsymbol{\xi}_r \boldsymbol{\xi}_p, & i \leq m \\ \bar{\beta}_{ji} \boldsymbol{\eta}_j + \bar{\gamma}_{jip} \boldsymbol{\eta}_j \boldsymbol{\xi}_p, & i > m \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 、 $\bar{\beta} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 、 $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}^{m \times n \times n}$  称为降阶

模型的刚度不变量, 具体表达式参见文献[18], 可在离线阶段预先计算. 与仅采用位移 ROB 的模型降阶方法相比, 双场 POD 方法将刚度不变量的最高阶次由四阶降低到三阶<sup>[11,14]</sup>, 从而在计算非线性缩减内力向量时显著提升效率.

在双场 POD 方法中, 系统的缩减动能和外力功均由位移 ROB 计算, 由此建立降阶动力学方程:

$$m_{ij} \boldsymbol{\xi}_j + c_{ij} \dot{\boldsymbol{\xi}}_j + \bar{\beta}_{ji} \boldsymbol{\eta}_j + \bar{\gamma}_{jik} \boldsymbol{\eta}_j \boldsymbol{\xi}_k - \mathbf{f}_i^{\text{ext}} = 0 \quad (11)$$

$$-\bar{\alpha}_{ij} \boldsymbol{\eta}_j + \bar{\beta}_{ij} \boldsymbol{\xi}_j + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{ijk} \boldsymbol{\xi}_j \boldsymbol{\xi}_k = 0 \quad (12)$$

其中,  $\mathbf{m} = \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  与  $\mathbf{c} = \mathbf{U}^T \mathbf{C} \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  分别为缩减质量阵与阻尼阵,  $\mathbf{f}^{\text{ext}}(\boldsymbol{\xi}^k) = \mathbf{U}^T \mathbf{F}^{\text{ext}}(\boldsymbol{\xi}^k) \in \mathbb{R}^n$  为外力向量在降阶位移子空间的投影, 即缩减外力向量. 式(11)表示降阶系统的动力学平衡, 式(12)表示降阶系统的非线性应力一位移关系.

进一步, 将式(12)的代数关系简化为:

$$\boldsymbol{\eta}_i = \bar{\beta}_{ij} \boldsymbol{\xi}_j + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{ijk} \boldsymbol{\xi}_j \boldsymbol{\xi}_k \quad (13)$$

其中,  $\bar{\beta}_{ij} = \bar{\alpha}_{in}^{-1} \bar{\beta}_{nj}$  且  $\bar{\gamma}_{ijk} = \bar{\alpha}_{in}^{-1} \bar{\gamma}_{njk}$ . 将式(13)代入式(11), 缩减内力表达为位移缩减坐标的三次形式, 并使待求解的降阶动力学方程维数由  $m+n$  降低至  $n$ , 从而避免了应力 ROB 引入导致降阶模型的维数提升. 非线性内力的表达式有:

$$\bar{\mathbf{f}}_i^{\text{int}} = (\bar{\beta}_{ji} + \bar{\gamma}_{jik} \boldsymbol{\xi}_k) \left( \bar{\beta}_{jn} \boldsymbol{\xi}_n + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{jnm} \boldsymbol{\xi}_n \boldsymbol{\xi}_m \right) \quad (14)$$

对于隐式时间积分算法所需的缩减内力 Jacobi 矩阵, 也仅需缩减内力对缩减广义位移向量  $\boldsymbol{\xi}$  求导, 得到

$$\bar{k}_{ij}^{\text{int}} = \bar{\beta}_{ni} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_n}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} + \bar{\gamma}_{nij} \boldsymbol{\eta}_n + \bar{\gamma}_{nik} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_n}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} \boldsymbol{\xi}_k \quad (15)$$

$$\text{其中, } \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_i}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} = \bar{\beta}_{ij} + \bar{\gamma}_{ijk} \boldsymbol{\xi}_k.$$

## 2 基于降阶模型的最优控制

通过双场 POD 方法得到高效降阶模型后, 在控制系统分析与设计中, 上述降阶动力学方程可进一步写成状态方程形式:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{x}) + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_t \mathbf{x} \end{aligned} \quad (16)$$

其中,  $x = [\xi^T \ \dot{\xi}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$  为降阶系统的状态变量,  $y \in \mathbb{R}^p$  为包含  $p$  个输出量的输出向量,  $C_t \in \mathbb{R}^{p \times 2n}$  为输出矩阵, 表征降阶广义坐标到结构观测点的映像;  $f^{\text{int}}(x) = [(\bar{f}^{\text{int}})^T \ 0]^T \in \mathbb{R}^{2n}$  为状态变量表示的系统非线性内力向量,  $B \in \mathbb{R}^{2n \times k}$  为系统输入矩阵, 其具体形式为:

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ m^{-1} B_u \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中,  $B_u \in \mathbb{R}^{2n \times k}$  为降阶模型缩减外力的模式矩阵, 即降阶模型缩减外力向量可表示为:

$$f^{\text{ext}} = B_u u \quad (18)$$

其中,  $u \in \mathbb{R}^k$  为缩减外力的待定系数向量, 即控制输入向量. 在每次滚动时域优化中, 以当前状态向量  $x_0$  对非线性系统进行线性化, 并以此构造出优化问题的局部近似模型:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0^{\text{int}} + k_0^{\text{int}}(x - x_0) + Bu \\ y &= C_t x \end{aligned} \quad (19)$$

式中  $f_0^{\text{int}}$  表示  $x_0$  下的系统非线性内力,  $k_0^{\text{int}} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  为非线性内力的切线刚度在  $x_0$  处的取值, 表达为:

$$k_0^{\text{int}} = \begin{bmatrix} \bar{k}_0^{\text{int}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (20)$$

基于双场动力学降阶模型, 解决基于非线性模型预测控制(MPC)的振动主动控制问题, 即求解如下离散动力学优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{u_i} J &= \sum_{i=0}^{N_p} \|(\mathbf{y}_i^r - \mathbf{y}_i)\|_Q^2 + \sum_{i=0}^{N_p} \|u_i\|_R^2 \\ \text{s. t.} & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{i+1} = k_0^{\text{int}} \mathbf{x}_i + Bu_i + f_0^{\text{int}} - k_0^{\text{int}} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_i = C_t \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{u}_{\min} \leq u_i(t) \leq \mathbf{u}_{\max} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (21)$$

其中,  $y_i$  表示  $t_i$  时刻观测点的实际响应,  $y_i^r$  表示  $t_i$  时刻观测点的目标响应;  $Q$  和  $R$  为权重系数矩阵, 用于平衡优化问题中的轨迹跟踪误差与控制成本;  $x_0$  为降阶系统的初始状态; 控制输入向量限制在  $u_{\min}$  与  $u_{\max}$  之间.

整体求解流程如图 1 所示. 首先, 基于双场 POD 构建高效的非线性降阶动力学模型以替代全模型计算; 随后在每次滚动时域优化中, 在当前状态对该降阶模型进行局部线性化, 将非线性优化问

题转化为线性二次规划(QP)并高效求解.

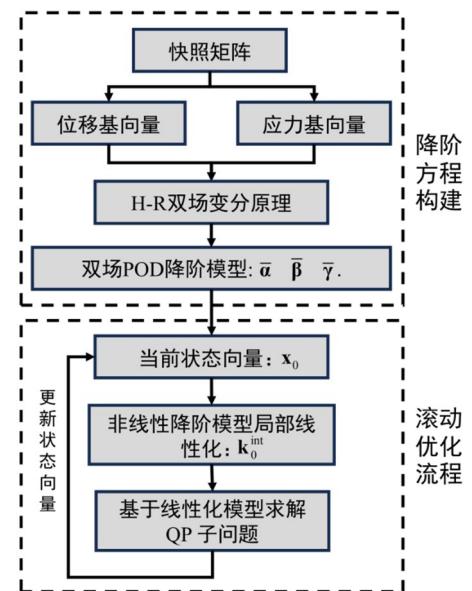


图 1 降阶动力学建模与非线性模型预测控制的计算框架  
Fig. 1 Framework for reduced-order dynamic modeling and nonlinear model MPC

### 3 数值仿真

本节针对不同的结构对象, 给出正向预测与最优控制的两个数值算例, 验证双场动力学降阶模型的高效性与控制适用性. 计算过程在配备 Intel(R) Core(TM) i7-11800H@2.30 GHz 的 16 线程处理器和 16 GB 内存的计算工作站上完成.

#### 3.1 算例 1: 细长杆系结构的响应预测

本算例针对细长杆系结构, 利用降阶模型对指定外力作用下的瞬态动力学响应进行计算. 如图 2 所示, 该杆系结构由两根 0.5 m 的杆件与一根 1 m 的杆件组成. 各杆件的横截面均为边长 12 mm 的正方形, 远小于其长度, 因此可视作细长梁. 所有杆件的材料参数为密度  $\rho = 1500 \text{ kg/m}^3$ 、杨氏模量  $E = 30 \text{ GPa}$ 、泊松比  $\mu = 0.3$  以及质量比例阻尼系数  $\xi = 0.05 \text{ s}^{-1}$ . 杆件间采用固定连接约束, 且在杆系结构的末端放置了一个观测点, 用于表征柔性结构动态变形情况. 初始状态下, 结构位 X-Y 平面内并水平放置, 其左侧端点被固定. 集中外载荷  $P$  作用于结构右侧自由端, 其方向位于 Y-Z 平面第三象限且与 Z 轴负方向成 45° 夹角, 其大小表达为

$$P(t) = -70.71 \sin\left(\frac{\pi}{5} t\right) \text{ N} \quad (22)$$

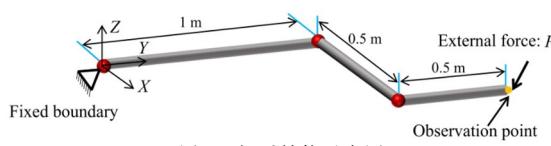


图 2 杆系结构示意图  
Fig. 2 Schematic of the slender beam system

在数值仿真中, 杆系结构的全模型采用 16 个全参数 ANCF 梁单元进行离散, 总广义坐标数为 240. 总仿真时间为 10 s, 采用广义- $\alpha$  算法, 时间积分步长为 10 ms. 为衡量全模型与降阶模型之间的偏差, 定义相对误差  $\epsilon_{\text{rel}}$  为

$$\epsilon_{\text{rel}} = \frac{1}{L_c} \sqrt{\frac{1}{3N_p} \sum_{i=1}^{N_p} (\tilde{\mathbf{r}}_i - \mathbf{r}_i)^T (\tilde{\mathbf{r}}_i - \mathbf{r}_i)} \quad (23)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{r}}_i$  和  $\mathbf{r}_i$  分别为全模型与降阶模型在第  $i$  个节点处的广义位置向量,  $N_p$  为节点总数,  $L_c$  为结构的特征长度. 对于图 2 所示杆系结构, 特征长度设定为 Y 轴方向的总长度 1.5 m. 算例 1 中使用总样本数  $D = 100$ .

图 3 给出了外力作用下 Y 和 Z 两个方向上的动响应, 其中图 3(a)与图 3(b)分别为位移 ROB 阶数  $n=2$  与  $n=8$  的结果. 蓝色实线为全模型(记为 FOM)的响应, 黄色线与绿色线分别为双场降阶模型(记为 Two fields)与基于 STEP 方法位移场降阶模型(记为 Direct STEP)的响应. 图 3 比较了不同降阶模型相比全模型计算结果的相对误差  $\epsilon_{\text{rel}}$ .

由图 3 与图 4 可见, 双场动力学降阶模型在计算精度上明显优于位移场动力学降阶模型. 同时, 即使降阶模型维数较低, 即  $n=2$  时, 双场降阶模型仍能捕捉结构的主要动响应特征.

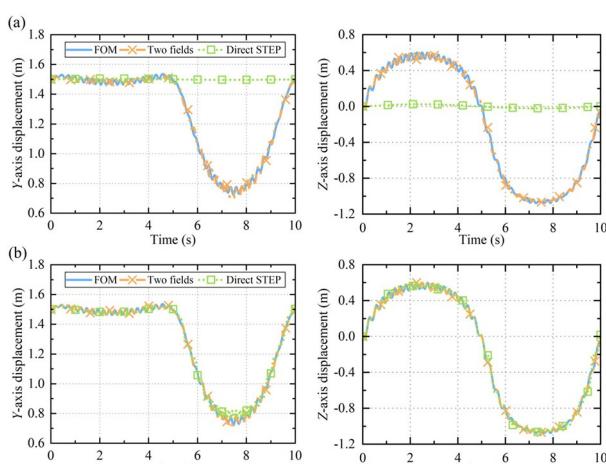


图 3 杆系结构观测点在 Y 轴与 Z 轴方向的动响应对比:

(a) 位移 ROB 阶数  $n=2$ ; (b) 位移 ROB 阶数  $n=8$

Fig. 3 Comparison of the dynamic responses of the slender beam system observation point in the Y-and Z-directions: (a) Displacement ROB order  $n=1$ ; (b) Displacement ROB order  $n=8$

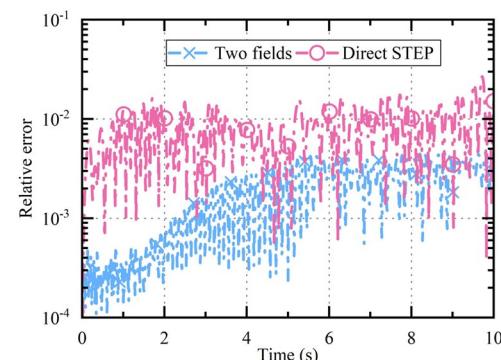


图 4 位移 ROB 阶数  $n=8$  时降阶模型与全模型相对误差  
Fig. 4 Relative displacement error between the ROM order  $n=8$  and the FOM

表 1 给出了使用全模型、STEP 位移场降阶模型及双场降阶模型进行正向动力学预测的在线计算时间, 表中的加速比定义为全模型与降阶模型的在线计算时间之比. 由表 1 可见, 相较于基于位移 ROB 的直接 STEP 方法, 双场动力学降阶方法在计算效率上表现出更优的性能.

表 1 杆系结构动力学正向计算效率与精度对比

Table 1 Forward dynamic efficiency and accuracy comparison for the slender beam system

参数	全模型	STEP 降阶	双场降阶
在线计算时间/ms	7418	78	44
最大相对误差	0	0.026 78	0.004 63
加速比	1	95.10	185.45

### 3.2 算例 2: 机翼骨架的最优控制

本算例针对图 5 所示的机翼骨架结构, 采用两节基于双场动力学降阶模型的最优控制框架, 模拟结构在大变形条件下的轨迹跟踪控制过程.

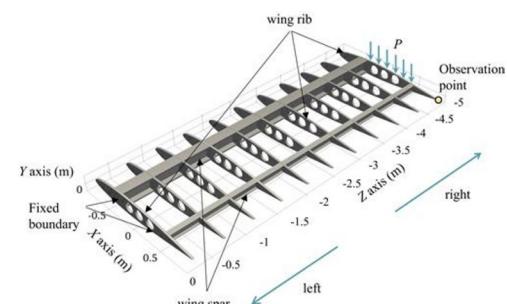


图 5 机翼骨架结构示意图  
Fig. 5 Schematic of the wing-skeleton structure

如图 5 所示, 机翼骨架由两个翼梁和十一个翼肋组成. 整体翼展长度为 4.50 m, 翼宽为 1.86 m, 翼高为 0.153 m. 材料的密度、杨氏模量、泊松比及

质量比例阻尼系数分别为  $2700 \text{ kg/m}^3$ 、 $14 \text{ GPa}$ 、 $0.3$  和  $1 \text{ s}^{-1}$ 。机翼最左端翼肋被完全固定,作为边界条件;在最右端翼肋的上表面施加均布外载荷,同时在该翼肋的后缘设置观测点,用于表征结构的动力学响应。机翼骨架的全模型采用 22 806 个八节点六面体单元进行离散,总广义坐标个数为 129 261。广义- $\alpha$  算法时间步长设为 5 ms。算例 2 中使用总样本数  $D=500$ 。

使用 POD 方法构造降阶模型时,预先施加一组沿 Y 轴方向的均布载荷  $P$ ,其幅值表示为

$$P(t) = 1.6522 \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) \text{ MPa} \quad (24)$$

当位移 ROB 阶数为  $n=6$  与  $n=1$  时,图 6(a) 和(b)对比了全模型、双场降阶模型和 STEP 降阶模型计算的观测点处 Y 轴位移动态响应。图 7 展示了位移 ROB 阶数时不同降阶模型与全模型计算结果的相对误差  $\epsilon_{\text{rel}}$ ,表 2 则对比了各模型的最大相对误差、在线计算时间及加速比。结果表明,在相同降阶维数下,双场降阶模型比 STEP 降阶模型在计算效率与精度方面均更优。在位移 ROB 阶数较低,即  $n=1$  时,双场降阶模型仍保持较高的计算精度。

进一步,在图 5 所示的均布外载荷作用下,基

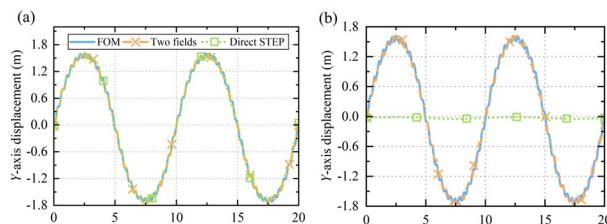


图 6 机翼骨架结构观测点处 Y 轴位移:(a) 位移 ROB 阶数  $n=6$ ;(b) 位移 ROB 阶数  $n=1$

Fig. 6 Y-direction displacement at the observation point of the wing-skeleton structure: (a) Displacement ROB order  $n=6$ ; (b) Displacement ROB order  $n=1$

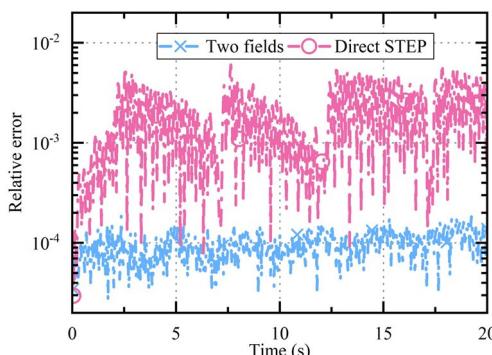


图 7 位移 ROB 阶数  $n=6$  时降阶模型与全模型的相对误差  
Fig. 7 Relative displacement error between the ROM and the FOM at displacement ROB order  $n=6$

表 2 位移 ROB 阶数  $n=6$  时,机翼骨架结构动力学  
正向计算的效率与精度

Table 2 Forward dynamic efficiency and accuracy of the wing-skeleton structure at displacement ROB order  $n=6$

参数	全模型	STEP 降阶	双场降阶
在线计算时间/s	4727.86	0.055	0.033
最大相对误差	0	6.04E-3	1.86E-4
加速比	1	8.596E+4	1.4327E+5

于建立的双场降阶动力学模型,采用非线性 MPC 控制器实现机翼骨架观测点沿预定轨迹的运动。在本算例中,假设机翼上的均布载荷作用形式保持不变,控制输入仅影响其幅值,即  $k=1$ 。优化问题的动力学约束由  $n=1$  下的双场降阶模型构建,预测时域长度取  $N_p=5$  个离散步长。

图 8 和图 9 分别展示了机翼骨架模型参考点在两种不同目标轨迹下的非线性 MPC 预测结果。其中,蓝色曲线表示目标轨迹,黄色曲线表示在非线性降阶 MPC 控制下全模型的动力学响应。图 8(b)与图 9(b)进一步给出了机翼均布控制载荷的幅值变化情况。结果表明,所提出的双场动力学降阶控制算法能够有效实现对预设参考变形轨迹的跟踪。在优化求解阶段中,单次 MPC(预测时域  $N_p=5$ )使用 OSQP 进行二次规划的求解平均时间为  $33 \mu\text{s}$ ,最长时间为  $87 \mu\text{s}$ ,均小于时间步长 5 ms,满足实时控制要求。

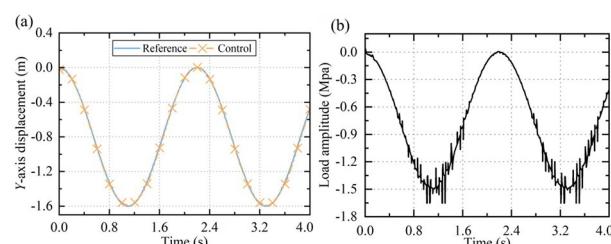


图 8 余弦轨迹跟踪:(a) 机翼观测点轨迹跟踪结果;  
(b) 均布控制载荷的幅值变化

Fig. 8 Cosine trajectory tracking: (a) Wing observation point results; (b) Amplitude variation of uniform control load

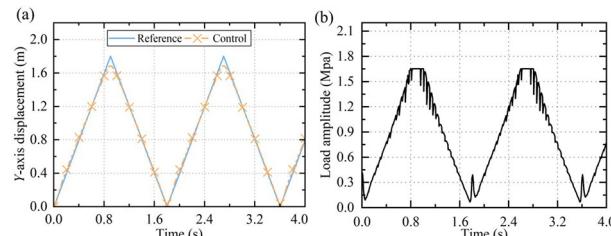


图 9 三角波轨迹跟踪:(a) 机翼观测点轨迹跟踪结果;  
(b) 均布控制载荷的幅值变化

Fig. 9 Triangular wave trajectory tracking: (a) Wing observation point results; (b) Amplitude variation of uniform control load

## 4 结论

本文针对含几何非线性的柔性结构动力学系统, 研究基于双场动力学降阶模型的高效预测与最优控制. 该降阶模型在位移基的基础上引入应力基, 并结合 H-R 双场变分原理, 将刚度不变量的最高阶由四阶降低至三阶, 在保证精度的同时提升了非线性动力学求解效率; 进一步将双场降阶模型嵌入非线性 MPC 框架, 高效求解离散动力学优化问题, 以实现复杂结构的最优控制. 通过杆系结构与机翼骨架两个算例表明, 提出的方法在降阶维数较低时仍能保持较高精度, 且在线计算效率优于位移单场降阶模型. 此外, 机翼骨架参考点的轨迹跟踪结果表明了该方法在非线性结构最优控制中的可行性.

## 参考文献

- [1] 胡海岩, 田强, 文浩, 等. 极大空间结构在轨组装的动力学与控制[J]. 力学进展, 2025, 55(1): 1–29.  
HU H Y, TIAN Q, WEN H, et al. Dynamics and control of on-orbit assembly of ultra-large space structures [J]. Advances in Mechanics, 2025, 55 (1): 1–29. (in Chinese)
- [2] 张卫红, 唐长红. 航空航天装备的轻量化: 挑战与未来[J]. 航空学报, 2024, 45(5): 529965.  
ZHANG W H, TANG C H. Lightweighting of aerospace and aeronautical equipment: challenges and perspectives [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2024, 45(5): 529965. (in Chinese)
- [3] LUO K, HU H Y, LIU C, et al. Model order reduction for dynamic simulation of a flexible multi-body system via absolute nodal coordinate formulation [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2017, 324: 573–594.
- [4] 孙杰, 黄庭轩, 朱东方, 等. 基于压电纤维复合材料的航天器动力学建模与振动抑制[J]. 飞控与探测, 2019, 2(3): 70–76.  
SUN J, HUANG T X, ZHU D F, et al. Dynamics modeling and vibration suppression of spacecraft based on macro fiber composites [J]. Flight Control & Detection, 2019, 2(3): 70–76. (in Chinese)
- [5] LU K, JIN Y L, CHEN Y S, et al. Review for order reduction based on proper orthogonal decomposition and outlooks of applications in mechanical systems [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 123: 264–297.
- [6] CARLBERG K, BOU-MOSLEH C, FARHAT C. Efficient non-linear model reduction via a least-squares Petrov-Galerkin projection and compressive tensor approximations [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011, 86(2): 155–181.
- [7] FARHAT C, CHAPMAN T, AVERY P. Structure-preserving, stability, and accuracy properties of the energy-conserving sampling and weighting method for the hyper reduction of nonlinear finite element dynamic models [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2015, 102(5): 1077–1110.
- [8] 李天一, Buzzicotti Michele, Biferale Luca, 等. Gappy POD 方法重构湍流数据的研究[J]. 力学学报, 2021, 53(10): 2703–2711.  
LI T Y, MICHELE B, LUCA B, et al. Reconstruction of turbulent data with Gappy POD method [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(10): 2703–2711. (in Chinese)
- [9] LU K, JIN Y L, HUANG P F, et al. The applications of POD method in dual rotor-bearing systems with coupling misalignment [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 150: 107236.
- [10] HOU Y S, LIU C, HU H Y. Component-level proper orthogonal decomposition for flexible multi-body systems [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 361: 112690.
- [11] ZHOU W X, LUO K, TIAN Q, et al. Highly-efficient dynamics simulation of flexible mechanical systems via the hyper reduction method of POD-based hybrid strains [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2025, 230: 112638.
- [12] 沈强, 赵泽阳, 康泽禹, 等. 航天器模型预测控制方法综述[J]. 南京航空航天大学学报, 2023, 55 (6): 941–955.  
SHEN Q, ZHAO Z Y, KANG Z Y, et al. Review on model predictive control in spacecraft [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2023, 55(6): 941–955. (in Chinese)
- [13] 洪泽宇, 董国朝, 韩艳, 等. 基于 DMD 方法的矩形断面涡振模态分析[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(4): 48–58.

- HONG Z Y, DONG G C, HAN Y, et al. Modal analysis of vortex-induced vibration in rectangular section based on DMD method [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(4): 48—58. (in Chinese)
- [14] NGUYEN V B, TRAN S B Q, KHAN S A, et al. POD-DEIM model order reduction technique for model predictive control in continuous chemical processing [J]. *Computers & Chemical Engineering*, 2020, 133: 106638.
- [15] SHEN C, LI M W. Active vibration control of nonlinear flexible structures via reduction on spectral submanifolds [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2025, 113 (10): 11069—11091.
- [16] ALORA J I, CENEDESE M, HALLER G, et al. Discovering dominant dynamics for nonlinear continuum robot control [J]. *NPJ Robotics*, 2025, 3: 5.
- [17] RUTZMOSER J B, RIXEN D J, TISO P, et al. Generalization of quadratic manifolds for reduced order modeling of nonlinear structural dynamics [J]. *Computers & Structures*, 2017, 192: 196—209.
- [18] ZHOU W X, LUO K, TIAN Q, et al. A two-field proper orthogonal decomposition for nonlinear model reduction via a Hellinger-Reissner variational formulation [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2025, 446: 118325.
- [19] MIGNOLET M P, PRZEKOP A, RIZZI S A, et al. A review of indirect/non-intrusive reduced order modeling of nonlinear geometric structures [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332 (10): 2437—2460.