

基于弗洛凯理论的非自治自激振动系统的 参数化模型降阶方法^{*}

范山 洪灵 江俊[†]

(西安交通大学 复杂服役环境重大装备结构强度与寿命全国重点实验室,西安 710049)

摘要 高维动力系统的降阶方法一直以来是非线性动力系统领域的重要研究内容,对非线性振动系统、软体机器人和复杂结构系统的响应识别、计算及预测有着重要的意义.本文在基于参数化方法和弗洛凯理论的自激周期解不变流形降阶方法的基础上,建立了在外激励下的非自治自激振动系统的参数化降阶方法.通过采用摄动近似方法,得到了受激励下的自激系统的参数化降阶模型.依据本文所提的方法,对含有交叉耦合刚度的转子与定子碰摩模型的准周期解及其随着外激励频率变化的幅频曲线进行了预测.结果显示本文的降阶模型能够有效的预测自激振动系统的受迫情况下的动力学响应.

关键词 降阶模型, 自激系统, 弗洛凯理论, 幅频曲线

中图分类号:O313

文献标志码:A

Model Reduction of Non-autonomous Self-excited Systems Using Floquet Theory based Parameterization Method^{*}

Fan Shan Hong Ling Jiang Jun[†]

(State Key Laboratory for Strength and Vibration, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract Model reduction methods for high-dimensional dynamical systems have consistently constituted a significant research topic within the field of nonlinear dynamical systems, significantly influencing the response identification, computation, and prediction of nonlinear vibration systems, soft robots, and complex structural systems. Building upon the invariant manifold reduced method for autonomous self-excited vibration systems by parameterization method and Floquet theory, this paper establishes a parameterization method for reduced model on non-autonomous self-excited vibration systems. By employing a perturbation approximation technique, a parameterization reduced-order model for the forced self-excited system is derived. Using the proposed method, the quasi-periodic solutions and the amplitude-frequency curves varying with external excitation frequency are predicted for a rotor-stator rubbing model incorporating cross-coupled stiffness. The results show that the reduced-order model in this paper can effectively predict the dynamic response of the self-excited vibration system under external force.

Key words reduced order model, self-excited system, Floquet theory, frequency response curve

引言

在工程实际和科学研究中,高维非线性的复杂动力学方程一直以来都面临着分析困难和计算消耗过大的难题.发展降阶方法并构建降阶模型可以显著地降低系统的维数和简化高维系统的运动.因此,模型降阶一直都是各个领域的研究的热点问题.

降阶方法根据模型建立的方式可以分为数据驱动方法和方程驱动方法.数据驱动方法要求有先验的实验或者仿真数据,通过数据中隐藏的动力系统对原系统进行识别或学习.以POD(本征正交分解)、DMD(动态模态分解)为代表的传统数据驱动降阶模型在流体领域得到广泛应用,对圆柱绕流模型进行了准确的预测和控制^[1].近年来依赖于神经网络的数据驱动降阶方法在物理计算领域也有显著的进步.以Autoencoder架构为例,其作为一种非线性的降阶方法相比传统POD降阶方法展现出更加优越的性能^[2].此外,通过降低系统维数进而提高计算效率有助于数据驱动降阶方法在高维系统的实时控制方面的应用^[3,4].对于基于方程驱动的方法要求系统的控制方程已知,可以是常微分方程组或者是离散的偏微分方程.特别的,POD-Galerkin同样可以应用到方程驱动的场景.

在振动领域,最早Shaw和Pierre^[5]定义非线性模态为“一种相切于线性特征空间的二维的不变子流形”,通过将原系统中的被动坐标(slave coordinates)降阶到控制坐标(master coordinates)以实现模型降阶,并广泛地应用于振动分析^[6-8].近年来,Haller^[9]提出了非线性谱子流形的概念(spectral submanifold,SSMs),同时阐明了非线性模态的概念和定义.这里谱子流形被考虑为线性谱子空间的最光滑的延拓,其存在和唯一性被证明.随后,利用参数化方法提出了基于SSMs的方程驱动的非线性的降阶方法^[10],并给出了骨架曲线、频响曲线和响应曲面^[11-14]的计算方法.该方法被总结在模型降阶工具箱SSMTool^[15].上述基于不变流形的非线性降阶方法通常建立在围绕平衡点的不变谱子流形上,尤其是自治系统中的平凡不动点.这些降阶方法的锚点不需要进行特别的计算,因为零不动点是已知的.此外,围绕该不动点附近的线性动力学可以很容易地使用特征值和特征向量确定,

简化了降阶模型的构建.针对在自治系统下有一个极限环的情况,即自激振动,基于该极限环的不变流形来构造降阶模型的方法就相对更加复杂.

针对预测周期解和准周期解的模型降阶,已有一些相关工作报道,但这些工作中的周期和准周期解实际上是由外激励引起,而不是产生于自治系统中的固有的自激属性.因此,这些有激励下的振动的周期解和准周期解是通过对自治系统下不动点的降阶模型进行参数扰动所得到的摄动解^[13,14,16].需指出的是,基于不动点的降阶模型在特定情况下可以预测自激周期解^[17],即该周期解恰好在不动点的不稳定流形上.对于更加一般的情况,例如由同宿分岔和逆鞍结分岔产生的周期解,需要一种更加普遍的降阶方法.对于参数激励系统中的周期解,模型降阶可以通过李雅普诺夫-弗洛凯变换将系统转换成时不变系统处理,因此本质上还是针对不动点的降阶模型^[18,19].

为了处理机械系统自激周期解的不变流形降阶,一些工作^[20-23]对周期解不变流形的参数化方法的实现提供了十分有用的理解.在文献[21]中,基于弗洛凯标准型的参数化方法被开发,同时傅里叶-泰勒级数展开被应用于推导同调方程,随后通过对几个低维模型的稳定/不稳定流形验证了算法的有效性.该方法在文献[24]中被应用于基于极限环吸引不变流形参数化的等时线和等稳定线的计算.另一种计算不变流形^[25]的方法依赖于积分计算,其难以在高维系统中实现.这些方法在天体力学与动力系统周期解的不变流形的计算中是至关重要的,但不适用于高维工程问题的模型降阶.转子系统在重大装备中发挥着关键性重要作用,转子动力学的发展对转子系统及装备的安全和性能提升发挥着促进作用^[26].转子与定子碰摩是一种危害极大的故障状态,由于碰撞的分段光滑性会产生丰富的动力学响应行为^[27].文献[28]以转子与定子碰摩系统为对象开发了一种针对自激周期解的高维不变流形降阶方法,并提出了两种求解不变方程的方法(基于弗洛凯标准型和直接代数计算).基于弗洛凯标准型的方法被证明难以应用到高维的机械振动系统,而利用直接代数求解的方法可以不依赖于弗洛凯标准型的求解,通过利用弗洛凯指数极大地提高了计算效率.在这种情况下,同调方程不再依赖弗洛凯标准型进行坐标转换,而是采用类

牛顿的数值求解方法直接求解出参数化展开的系数。

尽管前述工作^[28]已经建立起基于自激周期解不变流形的模型降阶基本框架,但对于降阶模型的基本应用,即导出受迫振动的频响曲线并没有提及。而基于不动点的降阶模型在利用摄动法求解受迫振动下的周期解已经有大量的成果^[11,13-15]。在这里,考虑到所研究的系统为自激系统,即自治系统中本就存在着一个周期解,在外激励摄动下系统会相应地增加一个频率,从而产生对应的准周期解。类似于不动点的情况,本文对于受迫振动的时变部分采用摄动法近似,在文献[28]的基础上,建立了有激励下的非自治自激系统的降阶模型,同时给出了计算准周期幅频曲线的公式,为此类系统的降阶预测提供了有力工具。

1 转子与定子碰摩模型

本文研究的对象是带有交叉耦合刚度的 Jeffcott 转子与定子碰摩模型(如图 1 所示),其由于碰摩面存在干摩擦效应是典型的自激系统。该模型包括转子和定子两个部分。转子由一根无质量且两端理想轴承支撑的轴,以及安装在轴跨中部质量为 m 的圆盘组成,圆盘的质心与几何中心 o 相距 e (即转子的质量偏心距),转轴以 ω 匀速转动且等效刚度记为 k_s ,转轴的涡动频率为 ω_w ,同时考虑由于叶尖气隙力和油膜力产生的转子交叉耦合刚度效应,记转子的阻尼系数和交叉耦合刚度分别为 c_s 和 Q_s 。转子与定子间的间隙为 r_0 ,定子的弹性接触面由一组对称各向同性的径向弹簧(刚度记为 k_b)和表面摩擦系数 μ 表征。当转子以恒定角速度 ω 旋转时,若发生碰摩,其将受到法向力 F_n 和切向库仑摩擦力 $F_t = \mu F_n$,摩擦力方向由转子与定子之间表面的相对速度 v_{rel} 决定。

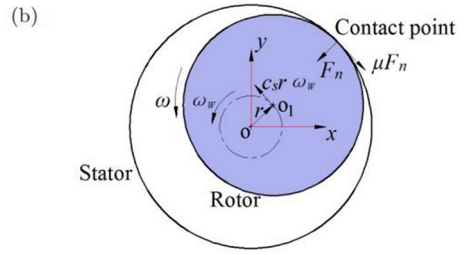
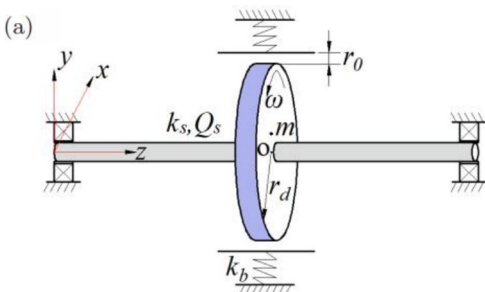


图 1 转子和定子碰摩模型:(a) 转子和定子碰摩系统的示意图;
(b) 转子和定子碰摩时的截面

Fig. 1 Contact and friction model of rotor and stator friction:
(a) Diagram of rotor and stator system; (b) The cross-section of rotor and stator system

不考虑质量偏心激励时转子与定子碰摩的方程可以表示为

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c_s\dot{x} + k_sx + Q_sy + \Theta k_b \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) [x - \mu y \cdot \text{sgn}(v_{rel})] &= 0 \\ m\ddot{y} + c_s\dot{y} + k_sy - Q_sx + \Theta k_b \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) [\mu x \cdot \text{sgn}(v_{rel}) + y] &= 0 \\ v_{rel} = \omega r_d + \omega_w r & \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, r_d 表示转子转盘的轴向半径, Θ 为 Heaviside 函数, 有 $\Theta = 0, r < r_0$; $\Theta = 1, r \geq r_0$ 。对方程(1)进行无量纲化可以得到

$$\begin{aligned} X'' + 2\zeta X' + \beta X + \gamma Y + \Theta \left(1 - \frac{R_0}{R}\right) [X - \text{sgn}(V_{rel})\mu Y] &= 0 \\ Y'' + 2\zeta Y' + \beta Y - \gamma X + \Theta \left(1 - \frac{R_0}{R}\right) [\text{sgn}(V_{rel})\mu X + Y] &= 0 \\ V_{rel} = \Omega R_d + \Omega_w R & \end{aligned} \quad (2)$$

其中无量纲参数定义为: $X = x/e, Y = y/e, R_0 = r_0/e, R_d = r_d/e, \tau = \omega_2 t, \omega_2 = \sqrt{k_b/m}, 2\zeta = c_s/\sqrt{mk_b}, \Omega = \omega/\omega_2, \Omega_w = \omega_w/\omega_2, V_{rel} = v_{rel}/e, \beta = k_s/k_b, \gamma = Q_s/k_b, R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 。

模型(2)发生碰摩时存在着两种自激效应,一种是交叉耦合刚度产生的转子正向涡动的自激振动,另一种是由于碰摩面干摩擦产生的转子反向涡动的自激振动。其中前者对应于系统稳定的非线性模态,而后者对应于系统不稳定的非线性模态。本文将重点讨论围绕稳定非线性模态的参数降阶模型,因此,将忽略由转子和定子之间接触所引起的非光滑干摩擦效应,并考虑转子与定子一直接触时的非线性转子与定子耦合系统,即在模型(2)中取 $\Theta = 1$ 和 $\text{sgn}(V_{rel}) = 1$ 。此时方程写为:

$$\begin{aligned} X'' + 2\zeta X' + \beta X + \gamma Y + \left(1 - \frac{R_0}{R}\right)(X - \mu Y) &= 0 \\ Y'' + 2\zeta Y' + \beta Y - \gamma X + \left(1 - \frac{R_0}{R}\right)(\mu X + Y) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

从物理意义上看:交叉耦合刚度的前向涡动自激效应与干摩擦的反向涡动自激效应是竞争关系,前者占优且与阻尼力平衡时,方程(3)存在以极限环形式表现的自激周期解,为稳定的非线性模态.如文献[29]所述,假设解析自激周期解可表示为自激频率 ω_n 的单一谐波项形式:

$$X = H \cos(\omega_n t), Y = H \sin(\omega_n t) \quad (4)$$

2 自治系统的参数化降阶模型

本节将简单地回顾对自治系统下关于自激周期解不变流形的降阶模型建立过程,详细推导请参见文献[26],其将作为下一节建立受激励自激系统的参数化降阶模型的基础.在文献[26]中提出了两类求解不变方程的方法:基于弗洛凯标准型的参数化降阶方法和基于直接线性代数方法的参数化降阶方法.由于本文所研究系统的维数较低且出于实施过程的简便性,将采用基于弗洛凯标准型的参数化降阶方法.

本文采用的转子与定子碰摩模型参数为: $\beta = 0.11, \xi = 0.05, \gamma = 0.05, R_0 = 1.05, \mu = 0.1$. 此时,系统(3)自激周期解的频率和幅值分别为: $\omega_n = -0.4274, H = 1.1322$.

在进行参数化降阶之前,需要了解关于系统非线性模态附近的线性动力学特性.在关于不动点的参数化降阶方法中,通过求解系统线性部分的特征值和特征向量,可以较为容易得到描述系统线性化的动力学行为.但对于求解关于自激周期解的参数化降阶方法,需要采用弗洛凯理论来描述系统线性化的动力学特性.

弗洛凯理论是一种经典的研究周期解附近的线性微分方程理论方法,对于关于周期解 $\gamma(\omega t)$ 的线性化微分方程,有

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Df}[\gamma(\omega t)]\mathbf{x} \quad (5)$$

其中: $\mathbf{Df}[\gamma(\omega t)]$ 表示向量场 $\mathbf{f}(x)$ 的雅可比矩阵.方程(5)的解,即单值矩阵 $\Phi(\omega t)$, 存在弗洛凯标准型满足

$$\Phi(\omega t) = \mathbf{Q}(t) e^{\mathbf{R}t} \quad (6)$$

其中: $\mathbf{Q}(t)$ 是时变的旋转矩阵,表示对于原坐标系

的转换,即:通过 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}(t)\mathbf{y}$, 可将方程(5)转换为常系数线性微分方程: $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{R}\mathbf{y}$. 实数矩阵 $\mathbf{R}$ 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ 被称为弗洛凯指数.

对于模型(3)在上述给定的系统参数下,采用文献[26]中所提到的谱方法可以得到弗洛凯标准型,对应的实数矩阵为:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -0.0602 & 0.0016 & 0.0037 & -0.0286 \\ 0.2341 & -0.0116 & -0.0272 & 0.5609 \\ -0.1034 & -0.0157 & -0.0367 & -0.2337 \\ -0.0186 & -0.0006 & -0.0013 & -0.0915 \end{bmatrix} \quad (7)$$

可求得弗洛凯指数为: $\lambda_1 = -0.1037, \lambda_2 = -0.0481 + 1.2867i, \bar{\lambda}_2 = -0.0481 - 1.2867i, \lambda_3 = 0$. 下面基于参数化方法建立极限环不变流形上的低维降阶模型,即确定参数化映射, $\mathbf{K}: \mathbb{C}^m \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ 将低维空间中的任意一点映射到高维空间的嵌入流形上,同时确定低维的降阶动力学: $\mathbf{R}_d: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$. 上述映射需满足下列的不变方程,

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{K} = \mathbf{D}_z \mathbf{K} \mathbf{R}_d + \mathbf{D}_t \mathbf{K} \quad (8)$$

其中, $\mathbf{F}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ 表示原系统的向量场,而降阶动力学的向量场表示为: $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{R}_d(\mathbf{z})$.

为了求解上述不变方程,将参数化映射展开成傅里叶-泰勒级数的形式,即,

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{K}_i \mathbf{z}^{\otimes i} = \sum_{k=-H}^k \mathbf{K}_{0,k} e^{-ik\omega t} + \\ &\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=-H}^k \mathbf{K}_{i,k} e^{-ik\omega t} \mathbf{z}^{\otimes i} \end{aligned} \quad (9)$$

其中: $\otimes$ 表示 Kronecker 积, $\mathbf{H}$ 表示截断的傅里叶级数, $\mathbf{z}^{\otimes i} \in \mathbb{C}^{m^i}$ 表示对于坐标向量 $\mathbf{z}$ 的 Kronecker 积连乘, $\mathbf{K}_{i,k} \in \mathbb{C}^{N \times m^i}$. 需要强调的是:在不考虑内共振的情况下,降阶动力学可以简易表示为线性动力学,即

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_m \mathbf{z}, \quad \mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{bmatrix} \quad (10)$$

将参数化映射的傅里叶-泰勒展开(9)和降阶动力学(10)代入不变方程(8),通过归纳泰勒级数的同阶系数,可以得到系统的同调方程,其详细的推导过程可以参考文献[26]. 这里给出得到的同调方程:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_1 + \mathbf{K}_1 \mathbf{A} &= \mathbf{Df}[\gamma(\omega t)] \mathbf{K}_1 \\ \tilde{\mathbf{K}}_i + \mathbf{K}_i \sum_{k=1}^i \mathbf{r}_k^{\otimes} &= \mathbf{Df}[\gamma(\omega t)] \mathbf{K}_i + \mathbf{B}_i \end{aligned} \quad (11)$$

其中,带有上标的 $\tilde{\mathbf{K}}_i$ 表示 $\mathbf{K}$ 对时间的一阶导数.其中 $\mathbf{z}_k^\otimes$ 表示对于降阶动力系统和2参数化系数耦合的项, $\mathbf{B}_i$ 表示由非线性项产生的耦合项,可由低阶的参数化系数计算求得.对于同调方程(11)的求解,文献[26]中给出了基于弗洛凯标准型和基于直接代数求解的两种方法,这里仅使用基于弗洛凯标准型的求解方法.

对于 $i > 1$ 阶的同调方程,通过坐标转换 $\mathbf{K}_i = \mathbf{Q}(t) \mathbf{P}_i$ 和弗洛凯关系式 $\mathbf{D}f[\gamma(\omega t)]\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{R} + \dot{\mathbf{Q}}(t)$,可以将同调方程转换为

$$\tilde{\mathbf{P}}_i + \mathbf{P}_i \sum_{k=1}^i \mathbf{r}_k^\otimes - \mathbf{R} \mathbf{P}_i = \mathbf{Q}(t)^{-1} \mathbf{B}_i \quad (12)$$

其中 $\tilde{\mathbf{P}}_i$ 表示 $\mathbf{P}_i$ 的一阶导数.由于实数矩阵 $\mathbf{R}$ 可以对角化,即 $\mathbf{R} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^{-1}$,可以将系数矩阵进行坐标转换 $\mathbf{P}_i = \mathbf{V} \mathbf{D}_i$,方程(12)可以写成为:

$$\tilde{\mathbf{D}}_i + \mathbf{D}_i \sum_{k=1}^i \mathbf{r}_k^\otimes - \mathbf{\Lambda} \mathbf{D}_i = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{Q}(t)^{-1} \mathbf{B}_i \quad (13)$$

通过对方程(13)向量化并将所有周期项展开为傅里叶级数的形式,归纳出同一傅里叶阶数 k 下的代数方程,可得

$$\left\{ \frac{ik\omega}{2} \mathbf{I}_{2nm_i} + \left[\left(\sum_{k=1}^i \mathbf{r}_k^\otimes \right)^T \otimes \mathbf{I}_{2n} \right] - (\mathbf{I}_{m_i} \otimes \mathbf{\Lambda}) \right\} \cdot \text{Vec}(\mathbf{D}_{i,k}) = \text{Vec}\{[\mathbf{V}^{-1} \mathbf{Q}(t)^{-1} \mathbf{B}_i]_k\} \quad (14)$$

由于方程(14)左侧系数矩阵是对角矩阵,因此可以直接得出参数化的系数矩阵,再通过还原当前阶数下参数化系数矩阵 $\mathbf{K}_i = \mathbf{Q}(t) \mathbf{V} \mathbf{D}_i$,即可逐阶地求解系统参数化映射,并得到相应的降价模型.

选取 $\lambda_2 = -0.0481 + 1.2867i$, $\tilde{\lambda}_2 = -0.0481 - 1.2867i$ 和 $\lambda_3 = 0$ 所对应的特征向量张成的线性子空间进行降阶的不变流形延拓.设置泰勒级数的截断阶数为 $N = 15$.降阶模型所生成的轨迹和原系统完整模型的轨迹比较如图2所示,图2(a)中黑

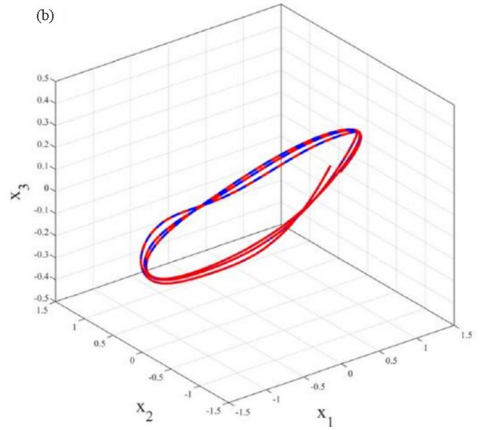


图2 降阶模型所生成的轨迹和原系统完整模型的轨迹比较:
(a)系统中收敛到自激周期解上的轨迹;
(b)系统在不变流形上的运动轨迹三维投影

Fig. 2 Comparison of trajectories generated by reduced model and original system integral model: (a) Trajectory converging to self-excited solution; (b) The three-dimensional projection of the trajectory of the system on the invariant manifold.

色实线为系统中收敛到自激周期解上的轨迹,黄色曲面表示三维流形在一个周期内几个不同时刻下的二维截面;图2(b)中红线代表降价模型,蓝虚线代表完整模型.

3 受激励自激系统的参数化降价模型

考虑在谐波激励下的本文的转子定子碰摩自激模型,与上述参数相同,受迫的自激振动控制方程可以写成

$$X'' + 2\zeta X' + \beta X + \gamma Y + \left(1 - \frac{R_0}{R}\right)(X - \mu Y) = h \cos(\Omega t)$$

$$Y'' + 2\zeta Y' + \beta Y - \gamma X + \left(1 - \frac{R_0}{R}\right)(\mu X + Y) = h \sin(\Omega t) \quad (15)$$

将动力学方程(15)写成四维的状态空间形式:

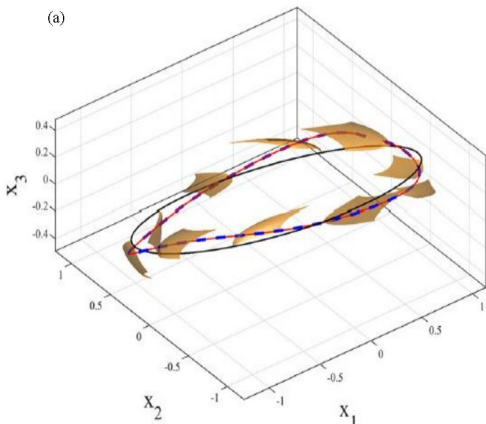
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\Omega t) \quad (16)$$

其中, $\mathbf{x} = [X, Y, X', Y']^T$, $\mathbf{L} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 表示线性项,第二项 $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x})$ 表示方程中的非线性项,第三项为外激励项.由于外激励频率的引入,对于系统(16)的参数化也相应地引入了新的频率成分,

$$\mathbf{x} = \mathbf{K}(z, \omega t, \Omega t) \quad (17)$$

其中, $\omega = -0.4274$ 为上一节中讨论的系统参数下的自激频率, Ω 为系统所受的外激励频率.假设外激励项为小扰动,从摄动法思想出发,参数化映射(17)可以是对原自治系统参数化映射的摄动.假设摄动解只保留至一阶摄动项:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^0(z, t) + \mathbf{K}^1(z, t) + \mathbf{O}(\epsilon^2)$$



$$\mathbf{R}_d = \mathbf{R}_d^0(\mathbf{z}, t) + \epsilon \mathbf{R}_d^1(\mathbf{z}, t) + \mathbf{O}(\epsilon^2) \quad (18)$$

其中: $\mathbf{K}^0(\mathbf{z}, t)$ 、 $\mathbf{R}_d^0(\mathbf{z}, t)$ 为上一节中自治系统的参数化映射, 而 $\mathbf{K}^1(\mathbf{z}, t)$ 、 $\mathbf{R}_d^1(\mathbf{z}, t)$ 则表示考虑外激励的一阶摄动项. 将摄动后的参数化映射和降阶动力学(18)代入不变方程, 可以得到

$$\begin{aligned} & L(\mathbf{K}^0 + \epsilon \mathbf{K}^1) + f_{nl} \mathbf{K}^0 + \epsilon \mathbf{K}^1 + \epsilon \mathbf{g}(t) \\ &= \frac{\partial \mathbf{K}^0}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{R}_d^0 + \epsilon \mathbf{R}_d^1) + \frac{\partial \mathbf{K}^0}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{K}^1}{\partial t} \end{aligned} \quad (19)$$

对于 ϵ^0 阶, 可以得到与上一节自治系统相同的参数化不变方程:

$$L\mathbf{K}^0 + f_{nl}(\mathbf{K}^0) = \frac{\partial \mathbf{K}^0}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{R}_d^0 + \frac{\partial \mathbf{K}^0}{\partial t} \quad (20)$$

其结果已经在上一节给出. 而对于 $(\epsilon^1, |\mathbf{z}|^0)$ 阶, 可以得到如下方程:

$$Df(\mathbf{K}_0^0) \mathbf{K}^1 + \mathbf{g}(\Omega t) = \frac{\partial \mathbf{K}^0}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{R}_d^1 + \frac{\partial \mathbf{K}^1}{\partial t} \quad (21)$$

其中, $\mathbf{K}^1$ 、 $\mathbf{R}_d^1$ 均不包含降价系统变量 $\mathbf{z}$ 的成分, 而仅仅是时间 t 的函数.

需要特别说明的是, 对于方程(21)中第一项, 由于需要取 ϵ^1 摄动项, 因此对方程(16)右端项泰勒展开, 得到一阶项 $Df(\mathbf{K})(\mathbf{K}^0 + \mathbf{K}^1)$, 取 $Df(\mathbf{K}) \mathbf{K}^1$. 此外, 由于对 $|\mathbf{z}|^0$ 阶的需求, $\mathbf{K}$ 需要取首次常数项, 即 $\mathbf{K}_0^0$.

在求解方程(21)时, 采用弗洛凯变换式: $Df[\gamma(\omega t)]\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{R} + \dot{\mathbf{Q}}(t)$, 同时考虑坐标变换 $\mathbf{K}^1 = \mathbf{Q}(t) \hat{\mathbf{K}}^1$, 方程(21)可以变换为:

$$\begin{aligned} & \mathbf{g}(\Omega t) + [\mathbf{Q}(t)\mathbf{R} + \dot{\mathbf{Q}}(t)]\hat{\mathbf{K}}^1 \\ &= \mathbf{Q}(t)[v_2, \bar{v}_2, v_3]\mathbf{R}_d^1 + \dot{\mathbf{Q}}(t)\hat{\mathbf{K}}^1 + \mathbf{Q}(t) \frac{\partial \hat{\mathbf{K}}^1}{\partial t} \end{aligned} \quad (22)$$

其中, $[v_2, \bar{v}_2, v_3]$ 表示所选取的特征子空间 (与 $\lambda_2, \bar{\lambda}_2, \lambda_3$ 相对应) 所对应的特征向量, 消去方程两端相同的项, 方程(22)可化简为:

$$\mathbf{Q}^{-1}(t)\mathbf{g}(\Omega t) + \mathbf{R}\hat{\mathbf{K}}^1 = [v_2, \bar{v}_2, v_3]\mathbf{R}_d^1 + \frac{\partial \hat{\mathbf{K}}^1}{\partial t} \quad (23)$$

考虑弗洛凯标准型中实数矩阵 $\mathbf{R}$, 将其分解为 $\mathbf{R} = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}\mathbf{M}^{-1}$, $\mathbf{\Lambda}$ 为对角矩阵. 引入坐标变换 $\hat{\mathbf{K}}^1 = \mathbf{M}\bar{\mathbf{K}}^1$, 由于特征矩阵和特征向量之间满足如下关系

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1}[v_2, \bar{v}_2, v_3]$$

方程(23)可写为:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}(t)\mathbf{g}(\Omega t) + \Delta\bar{\mathbf{K}}^1 = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_d^1)_{(1)} \\ (\mathbf{R}_d^1)_{(2)} \\ (\mathbf{R}_d^1)_{(3)} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\partial \bar{\mathbf{K}}^1}{\partial t} \quad (24)$$

需要强调的是, 这里建立的降阶模型 $\mathbf{K}^0$ 是三维的, 即包含 $\lambda_2, \bar{\lambda}_2, \lambda_3$ 对应的特征向量所张成的特征子空间. 由于 $\mathbf{g}(\Omega t)$ 为谐波激励, 其形已经在式(15)中给出. 因此可以将其转化为指数形式, $\mathbf{g}(\Omega t) = \mathbf{g}^+ e^{i\Omega t} + \mathbf{g}^- e^{-i\Omega t}$, 整理(24)可以得到:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}(t)(\mathbf{g}^+ e^{i\Omega t} + \mathbf{g}^- e^{-i\Omega t}) - \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_d^1)_{(1)} \\ (\mathbf{R}_d^1)_{(2)} \\ (\mathbf{R}_d^1)_{(3)} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial \bar{\mathbf{K}}^1}{\partial t} - \Delta\bar{\mathbf{K}}^1 \end{aligned} \quad (25)$$

由于激励频率的唯一性, 可考虑两类频率 $i(\Omega + k\omega_n)t$ 和 $i(-\Omega + k\omega_n)t$. 通过采用待定系数法, 令

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbf{K}}^1 = (\bar{\mathbf{K}}^1)^+ e^{i(\Omega + k\omega)t} + (\bar{\mathbf{K}}^1)^- e^{i(-\Omega + k\omega)t}, \mathbf{R}_d^1 = \\ & (\mathbf{R}_d^1)^+ e^{i(\Omega + k\omega)t} + (\mathbf{R}_d^1)^- e^{i(-\Omega + k\omega)t}, \text{可以求得:} \\ & \mathbf{K}^1 = \mathbf{Q}(t)\mathbf{M}[i(\Omega + k\omega) * \mathbf{I} - \Delta]^{-1} \cdot \\ & [\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}(t)\mathbf{g}^+ e^{i\Omega t} - (\mathbf{R}_d^1)^+] + \\ & \mathbf{Q}(t)\mathbf{M}[i(-\Omega + k\omega) * \mathbf{I} - \Delta]^{-1} \cdot \\ & [\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}(t)\mathbf{g}^- e^{-i\Omega t} - (\mathbf{R}_d^1)^-] \end{aligned} \quad (26)$$

其中, 由于不变方程(8)具有多解性, $\mathbf{R}_d^1$ 的系数可以任意选取. 考虑到系统是一阶系统, 即 k 仅在 1 或 -1 处傅里叶展开有较大的值, 这将会导致系统外激励与内激励频率相近的时候会产生共振, 而即: $\Omega \approx \omega$. 这种情况下, $\Omega - \omega \approx 0$ 或 $\omega - \Omega \approx 0$, 这将会导致 $[i(\Omega + k\omega) * \mathbf{I} - \Delta]^{-1}$ 或 $[i(-\Omega + k\omega) * \mathbf{I} - \Delta]^{-1}$ 的对角元素的第三项趋近于 0 (Δ 为特征矩阵, 第三项特征值为 0), 从而最终由于其处于分母上产生极大的数值. 由于在当前的动力学降阶的设置中, 这种数值过大会导致其超过降阶的边界, 而导致结果的不稳. 为了避免这类近共振的数值问题, 通常会考虑在对应的项上选取特殊的 $\mathbf{R}_d^1$, 使其对应项的分子为 0.

因此对于第三项的近内共振的情况, 这里考虑

$$\begin{aligned} & [\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}(t)\mathbf{g}^+ e^{i\Omega t}]_{(3)} = (\mathbf{R}_d^1)_{(3)}^+ \\ & [\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}(t)\mathbf{g}^- e^{-i\Omega t}]_{(3)} = (\mathbf{R}_d^1)_{(3)}^- \end{aligned} \quad (27)$$

以消除共振所带来的影响. 综上所述, 可将受激励下自激系统的降阶模型写为:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}^0 + \epsilon \mathbf{K}^1 \\ \mathbf{R}_d &= \mathbf{R}_d^0 + \epsilon \mathbf{R}_d^1 \end{aligned} \tag{28}$$

为了验证该降价模型的有效性, 取与上一节中相同的转子与定子碰摩模型参数, 即 $\beta=0.11, \xi=0.05, \gamma=0.05, \mathbf{R}_0=1.05, \mu=0.1$. 图 3 展示了在 $\epsilon=0.01, \Omega=0.3$ 时, 系统(15)的准周期碰摩响应在 X - Y 平面投影轨迹. 由于自激系统具有占优的自激能量, 而在该激励频率的外激能量相对较小, 该准周期解表现为自激频率占优的类周期响应.

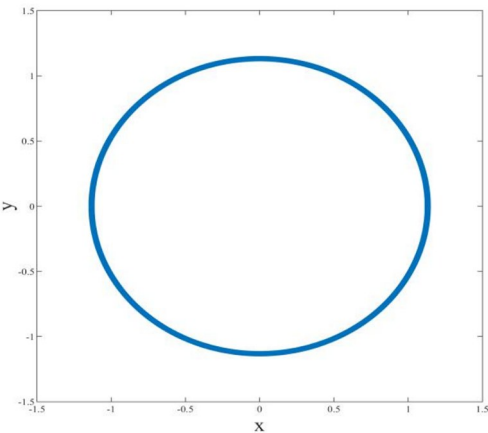


图 3 带交叉耦合的转子定子碰摩模型的准周期解, $\epsilon=0.01, \Omega=0.3$
Fig. 3 The quasi-periodic solution of the rotor-stator rubbing model with cross-coupling stiffness, $\epsilon=0.01, \Omega=0.3$

下面将比较降价模型和完整模型计算的准周期响应的幅频曲线, 展示降价模型的有效性. 设定外激励的参数为: $\epsilon=0.01, \Omega=[0.1, 1.2]$. 图 4 给出了自激转子与定子碰摩系统受外激励下的准周期解的频响曲线, 其中: 蓝色虚线为降价模型的计算结果, 红色实线为原系统(15)采用直接积分法得到的准周期解幅频曲线.

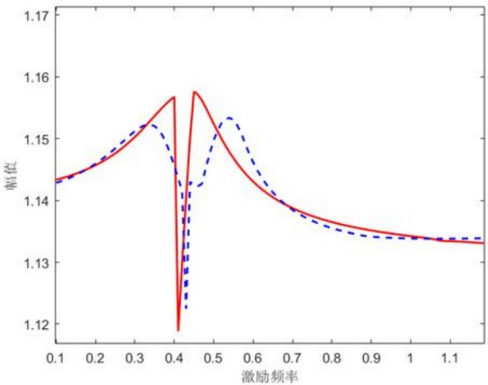


图 4 受外激励下自激转子与定子碰摩系统的准周期响应幅频曲线
Fig. 4 Amplitude-frequency response of quasi-periodic system with the self-excited rotor and stator rubbing system under external excitation

计算结果表明: 降阶模型可以较好地预测出在锁频频率以外的系统准周期响应的幅值, 但对于锁频区域附近的幅值仍有较大的误差. 需要强调的是, 在锁频频率附近, 系统的幅值突然减小, 此时原系统中的准周期响应坍塌为周期响应.

4 结论

本文在基于弗洛凯理论的自治自激周期解的参数化降阶方法基础上, 拓展得到受激励下的非自治自激振动系统的参数化降阶方法. 通过采用有激励情况下的摄动近似方法, 得到了受激励下的非自治自激振动系统的参数化降阶模型, 在降阶模型中包含了系统内在的(自治)振动特性, 由此可求得受激励下的非自治自激振动系统的频响应曲线.

本文通过转子与定子碰摩模型, 验证了所提受迫自激系统参数化降阶方法的有效性, 与完整模型的数值积分结果比较, 降阶模型在非锁频(共振频率)区域外有较好的预测精度, 但在多频区域内, 尽管定性反映出系统的响应特征, 定量预测存在明显的误差. 考虑本文中仅计及一种共振情况, 如果要获取更加精确的预测模型, 可能需要考虑更多的频率组合情况, 如: 外激励、自激频率以及弗洛凯指数的虚部等, 这些更复杂的情况仍需要今后探索.

参考文献

[1] KUTZ J N, BRUNTON S L, BRUNTON B W, et al. Dynamic mode decomposition: Data-driven modeling of complex systems [M]. Philadelphia, PA, USA: SIMA, 2016.

[2] FUKAMI K, HASEGAWA K, NAKAMURA T, et al. Model order reduction with neural networks: application to laminar and turbulent flows [J]. SN Computer Science, 2021, 2(6): 467.

[3] DRGONA J, TUOR A, KOCH J D, et al. Neuro-MANCER: Neural modules with adaptive nonlinear constraints and efficient regularizations [EB/OL]. [2025-05-28]. <https://github.com/pnnl/neuromancer>.

[4] ALORA J I, CENEDESE M, SCHMERLING E, et al. Data-driven spectral submanifold reduction for nonlinear optimal control of high-dimensional robots [C]//2023 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). New York:

- IEEE, 2023: 2627–2633.
- [5] SHAW S W, PIERRE C. Normal modes for non-linear vibratory systems [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, 164(1): 85–124.
 - [6] TOUZÉ C, VIZZACCARO A, THOMAS O. Model order reduction methods for geometrically nonlinear structures: A review of nonlinear techniques [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021 (105): 1141–1190.
 - [7] JIANG D, PIERRE C, SHAW S W. Nonlinear normal modes for vibratory systems under harmonic excitation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 288(4/5): 791–812.
 - [8] PESHECK E, BOIVIN N, PIERRE C, et al. Nonlinear modal analysis of structural systems using multi-mode invariant manifolds [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2001, 25(1): 183–205.
 - [9] HALLER G, PONSIOEN S. Nonlinear normal modes and spectral submanifolds: existence, uniqueness and use in model reduction [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 86(3): 1493–1534.
 - [10] PONSIOEN S, PEDERGNANA T, HALLER G. Automated computation of autonomous spectral submanifolds for nonlinear modal analysis [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, 420: 269–295.
 - [11] BREUNUNG T, HALLER G. Explicit backbone curves from spectral submanifolds of forced-damped nonlinear mechanical systems [J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2018, 474(2213): 20180083.
 - [12] LI M W, JAIN S, HALLER G. Fast computation and characterization of forced response surfaces via spectral submanifolds and parameter continuation [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, 112(10): 7771–7797.
 - [13] LI M W, JAIN S, HALLER G. Nonlinear analysis of forced mechanical systems with internal resonance using spectral submanifolds, Part I: Periodic response and forced response curve [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2022, 110(2): 1005–1043.
 - [14] LI M W, HALLER G. Nonlinear analysis of forced mechanical systems with internal resonance using spectral submanifolds, Part II: Bifurcation and quasi-periodic response [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2022, 110(2): 1045–1080.
 - [16] TOUZÉ C, AMABILI M. Nonlinear normal modes for damped geometrically nonlinear systems: Application to reduced-order modelling of harmonically forced structures [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 298(4/5): 958–981.
 - [17] LI M W, YAN H, WANG L. Nonlinear model reduction for a cantilevered pipe conveying fluid: a system with asymmetric damping and stiffness matrices [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2023, 188: 109993.
 - [18] SINHA S C, REDKAR S, BUTCHER E A. Order reduction of nonlinear systems with time periodic coefficients using invariant manifolds [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 284 (3/4/5): 985–1002.
 - [19] SINHA S C, PANDIYAN R. Analysis of quasilinear dynamical systems with periodic coefficients via Liapunov; Floquet transformation [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1994, 29(5): 687–702.
 - [20] HARO À, DE LA LLAVE R. A parameterization method for the computation of invariant tori and their whiskers in quasi-periodic maps: Numerical algorithms [J]. *Discrete & Continuous Dynamical Systems B*, 2006, 6(6): 1261–1300.
 - [21] HARO A, DE LA LLAVE R. A parameterization method for the computation of invariant tori and their whiskers in quasi-periodic maps: Rigorous results [J]. *Journal of Differential Equations*, 2006, 228(2): 530–579.
 - [22] CASTELLI R, LESSARD J P, MIRELES JAMES J D. Parameterization of invariant manifolds for periodic orbits I: efficient numerics via the floquet normal form [J]. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2015, 14(1): 132–167.
 - [23] CASTELLI R, LESSARD J P, JAMES J D M. Parameterization of invariant manifolds for periodic orbits (II): a posteriori analysis and computer assisted error bounds [J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2018, 30(4): 1525–1581.
 - [24] PÉREZ-CERVERA A, M-SEARA T, HUGUET G. Global phase-amplitude description of oscillatory dynamics via the parameterization method [J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2020, 30(8): 083117.
 - [25] GOODMAN, R. H., WRÓBEL, J. K. High-order bisection method for computing invariant manifolds of two-dimensional maps [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2011, 21(7): 2017–2042

[26] 韩清凯, 马辉. 转子动力学研究进展[J]. 动力学与控制学报, 2018, 16(6): 481—482.
HAN Q K, MA H, Research advancement in rotor dynamics [J]. Journal of Dynamics and Control, 2018, 16(6): 481—482. (in Chinese))

[27] 高文辉, 郭旭, 江俊. 基于胞参考点映射法对转子/定子碰摩响应的全局分析[J]. 动力学与控制学报, 2011, 9(4): 363—367.
GAO W H, GUO X, JIANG J. Global analysis on rotor/stator rubbing responses based on point mapping under cell reference method [J]. Journal of Dynamics and Control, 2011, 9(4): 363—367. (in Chinese))

[28] FAN S, HONG L, JIANG J. Model reduction of high-dimensional self-excited nonlinear systems using floquet theory based parameterization method [J]. Nonlinear Dynamics, 2025, 113(2): 1137—1161.

[29] WANG S Z, HONG L, JIANG J. Evaluation on spectral submanifold based reduced models of a rotor/stator rubbing system with cross-coupling stiffness [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2022, 228: 107486.