

# 基于模型缩聚的波纹板结构动力学分析和优化方法<sup>\*</sup>

赵自强 何昊南<sup>†</sup> 宋智广<sup>†</sup>

(哈尔滨工程大学 航天与建筑工程学院, 哈尔滨 150001)

**摘要** 本文采用模型缩聚理论对波纹板结构进行降阶建模, 并开展振动特性分析和结构优化研究。首先, 采用相对自由度壳单元结合 Hamilton 原理建立波纹板结构的有限元动力学模型, 进而应用 Craig-Bampton (C-B) 法对模型进行降阶处理; 同时, 将 C-B 法与遗传算法结合, 设计了一套高效的波纹板结构优化流程。通过与传统有限元方法的对比分析, 验证了基于 C-B 法的相对自由度壳元缩聚模型的准确性。数值算例结果表明, 降阶模型虽然会略微牺牲计算精度, 却可以显著缩减模型规模, 自由度数目减少 95% 以上, 计算时间缩短 99% 以上, 计算效率得到大幅提升。此外, 通过两组典型算例验证了基于 C-B 法的遗传算法在结构优化上的有效性, 充分展现了模型缩聚在波纹板动力学分析和结构优化设计中的显著优势。

**关键词** 波纹板, 相对自由度壳元, C-B 法, 模型缩聚, 有限元法, 遗传算法优化

中图分类号:V214.3+3

文献标志码:A

## Dynamic Analysis and Optimization Method of Trapezoidal Corrugated Plate Based on Model Condensation<sup>\*</sup>

Zhao Ziqiang He Haonan<sup>†</sup> Song Zhiguang<sup>†</sup>

(College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

**Abstract** In this paper, a model reduction approach is employed to develop a reduced-order model of a trapezoidal corrugated plate structure for vibration analysis and structural optimization. A finite element dynamic model of the corrugated plate is first established using relative degree of freedom shell elements combined with Hamilton's principle. The model is then reduced using the Craig-Bampton (C-B) method. Furthermore, an efficient optimization framework for the corrugated plate structure is designed by integrating the C-B method with a genetic algorithm. The accuracy of the reduced-order model based on the C-B method is validated through a comparative analysis with the traditional finite element method. Numerical examples demonstrate that, although computational accuracy is slightly sacrificed, the reduced model significantly decreases the model size, with degrees of freedom reduced by over 95% and computational time shortened by more than 99%, resulting in a substantial improvement in computational efficiency. Additionally, the effectiveness of the genetic algorithm based on the C-B method is verified through two typical optimization examples, showcasing the notable advantages of model reduction in the dynamic analysis and structural optimization of corrugated plates.

**Key words** corrugated plate, shell element of relative degree of freedom, C-B method, model reduce, finite element method, genetic algorithm optimization

2025-03-31 收到第 1 稿, 2025-05-13 收到修改稿。

\* 中国国家重点研发计划资助项目(2024YFB4205400), National Key Research and Development Program of China (2024YFB4205400).

<sup>†</sup> 通信作者 E-mail: haonan.he@hrbeu.edu.cn; z.g.song@hrbeu.edu.cn

## 引言

波纹板由于波浪形状赋予了其独特的力学特性,有着较大的比刚度与比强度,同时还可以有效分散应力、减少变形,广泛应用于建筑与结构工程、航空航天以及交通运输等领域。对波纹板进行动力学分析和结构优化,对于提升其综合性能具有重要的工程意义。

从20世纪80年代开始,国内外学者对波纹板的动力学特性分析<sup>[1-6]</sup>和结构优化<sup>[7-9]</sup>展开了广泛研究。作为一种特殊的点阵结构,学者们依据等效思想,将波纹板等效为梁、板结构,采用假设模态法、有限元法及其他分析方法,对波纹板结构进行了深入的研究。其中,Zhuang等<sup>[10]</sup>提出了一种基于均质化技术和分层理论的梯形波纹夹芯板模型,将整个夹芯板等效为三层连续体,通过假设模态法评估了结构的频率、阵型与颤振速度。Zheng等<sup>[11]</sup>基于能量法将梯形和正弦波纹板均质化为各向同性板,利用假设模态法建立复合材料夹芯板的气动弹性方程,揭示了颤振机理,评估了波纹板在超声速流中的稳定性。Kim等<sup>[12]</sup>推导了等距横钢制波纹板的等效性能,并利用有限元法对比了等效波纹板与正交各项异性板的抗弯特性。郑宇宁等<sup>[13]</sup>推导了波纹板等效拉伸和弯曲刚度模型,结合有限元思想计算出复合材料波纹板临界剪切屈曲载荷。虽然采用等效方法对波纹板进行振动分析可以简化分析流程,但要求波纹板等距、等波顶宽度甚至等波纹角,较大限制了波纹板的可设计性。

随着计算机性能的不断提升,采用有限元方法并选用多种类型单元对波纹板进行精细建模,逐渐开始取代传统的等效建模思想。其中,大量学者<sup>[14,15]</sup>采用考虑了一阶剪切变形理论的壳单元对波纹板的每个平板进行建模,通过坐标转换矩阵将不同坐标系内的板单元组合在一起。但不同学者进行坐标转换时,在刚度矩阵的对应位置添加的刚度系数不同,同时由于刚度系数的大小会影响振动分析的结果且刚度系数目前并没有明确的定义。这导致采用一阶剪切变形壳元对波纹板进行振动分析仍存在计算精度不够等问题。同样的,实体单元的泛用性使得波纹板的振动特性得到了进一步的研究<sup>[16,17]</sup>,但波纹板作为一种特殊的薄壁结构,不同方向上的刚度相差过大,采用实体单元可能会出现

数值困难,只能通过加密网格来加以应对。基于实体单元,学者开发出了相对自由度壳元。例如,Cen等<sup>[18]</sup>等采用相对自由度壳元为旋转圆柱壳进行建模,结合子结构法获取完整结构的屈曲载荷和模态。Xue等<sup>[19]</sup>基于有限元法,设计了一种特殊的相对自由度壳元,依据此单元准确描述了夹芯结构的热结构行为。陈丽华等<sup>[20]</sup>构造了一种带有沙漏控制的相对自由度壳元并提出了一种新的有限元冲击算法,提高了线性和非线性问题的计算效率。Li等<sup>[21]</sup>开发了一种多层相对自由度壳元,以较为粗糙的网格数量为任意层数的复合壳进行建模,并获得足够精确的振动分析结果。但即使相对自由度壳元相较于实体单元对于网格的需求已经降低了许多,但当计算结构复杂的庞大模型时,高额的计算成本依旧是亟待解决的问题。

通过上述文献综述可以发现,国内外学者对波纹板的振动分析和结构优化方法进行了大量的研究,但这些方法都存在着计算精度不足、计算成本过高等缺陷,如何快速精确地对波纹板进行振动分析和结构优化,依旧值得关注。本文以梯形波纹板作为主体,基于有限元法,采用相对自由度壳元结合Hamilton原理,建立波纹板结构动力学分析模型。之后,通过C-B法对结构模型降阶,并对缩聚模型进行振动特性分析和结构优化。本文的研究将为波纹板乃至点阵结构的振动分析和结构优化提供新的研究思路。

本文第一节推导了相对自由度壳元的理论并对C-B法理论进行了详细的阐述;第二节对比了相对自由度壳元和一阶剪切变形壳元的优势与局限,同时比较了完整模型和缩聚模型在计算精度和计算效率方面的表现,并通过遗传算法对两个模型进行结构优化。

## 1 模型建立与降阶

本节详细描述了相对自由度壳元和C-B法的理论推导过程,并分析了采用C-B法对波纹板结构进行模型缩聚时的计算优势。C-B法作为一种经典的子结构降阶方法,具有良好的通用性与适应性,不依赖于结构的具体形状、几何尺寸或边界条件,因而可广泛应用于各类复杂结构的降阶和计算。基于便于阐述和验证等方面的考虑,选择具有典型特征的梯形波纹板结构作为示例说明。在实际应用

中, 该方法同样适用于其他形式的波纹板(比如圆形波纹板、U形波纹板等)乃至更一般的结构形式, 相关的建模流程和求解策略可以直接移植, 无需根据结构修改方法。

### 1.1 基于相对自由度壳元的建模方法

相对自由度壳元的本质仍为等参元。然而, 传统等参元在分析薄壁结构时, 沿着厚度方向的刚度相较于其他两个方向相差较大, 导致求解过程中出现舍入误差和精度损失等数值计算问题。通过对原等参元结点进行线性变换, 用相对位移代替之前的绝对位移, 新的相对自由度壳元可以避免上述问题。综合考虑计算效率和简便程度, 选择相对自由度壳元作为波纹板有限元建模的单元类型。

梯形波纹板如图 1 所示, 其中  $W$  为波纹板的横向长度,  $t$  为波纹板的厚度,  $L_1$  为波底两侧的长度,  $L_2$  为波形单元的波顶宽度,  $H$  为波形单元的波高, 波纹角为  $\alpha$ 。

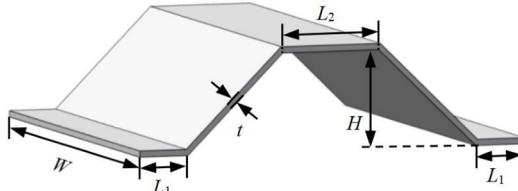


图 1 梯形波纹板示意图

Fig. 1 Schematic diagram of trapezoidal corrugated plates

图 2(a)为 16 结点等参元, 图 2(b)为相对自由度壳元。为了便于区分两组单元的位移与坐标, 将三维等参元的位移和坐标称为绝对位移和绝对坐标, 将相对自由度壳元的位移和坐标称为相对位移和相对坐标。

通过插值可以获得 16 结点等参元的位移和坐标, 表达式如下:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{16} N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{16} N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (2)$$

其中棱中点结点的形函数为:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i), \quad (i=9,11,13,15) \\ N_i &= \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2)(1+\zeta\zeta_i), \quad (i=10,12,14,16) \end{aligned} \quad (3)$$

棱端点结点的形函数为:

$$N_i = N_i^* - \frac{1}{2}(N_k - N_l), \quad (i=1,2,\dots,8) \quad (4)$$

其中,

$$N_i^* = \frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i)$$

$k$  和  $l$  分别代表与结点  $i$  相邻的两个棱中结点的编号。

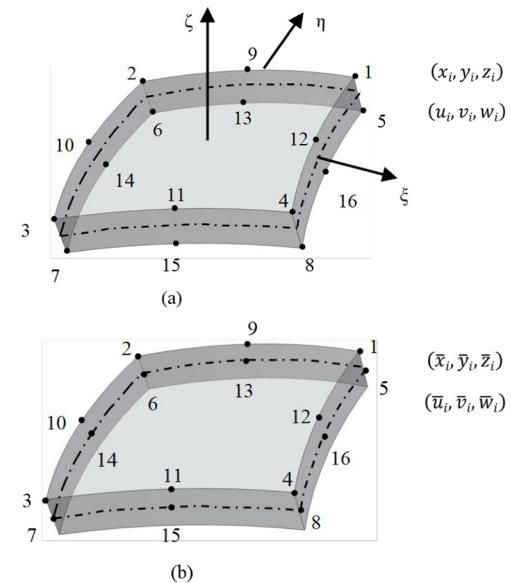


图 2 两单元节点分布及位移定义示意:

(a) 16 节点三维等参单元; (b) 相对自由度壳元

Fig. 2 Illustration of the nodal distribution and displacement definitions of the two elements: (a) 16-node 3D isoparametric element; (b) Shell element of relative degrees of freedom

相对位移和相对坐标与绝对位移和绝对坐标的关系为:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_i &= \frac{1}{2}(u_i - u_{i+4}) \\ \bar{u}_{i+4} &= \frac{1}{2}(u_i + u_{i+4}) \end{aligned} \right\}, \quad (i=1,2,3,4,9,10,11,12) \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_i &= \frac{1}{2}(x_i - x_{i+4}) \\ \bar{x}_{i+4} &= \frac{1}{2}(x_i + x_{i+4}) \end{aligned} \right\}, \quad (i=1,2,3,4,9,10,11,12) \quad (6)$$

剩余结点位移  $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$  和坐标  $\bar{y}$ 、 $\bar{z}$  的形式与上述表达式相同。

由上述关系可知, 相对自由度壳元的结点  $i$  ( $i=5,6,7,8,13,14,15,16$ ) 的位移与坐标即为等参元结点  $i$  与结点  $i-4$  的连线与中面的交点的位移与坐标, 而相对自由度壳元的结点  $i-4$  的位移与坐标即

为原等参元结点  $i-4$  到中面的位移与距离.

简化后, 相对自由度壳元的位移和坐标表示为如下形式:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{16} \bar{N}_i \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{16} \bar{N}_i \begin{Bmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \\ \bar{z}_i \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

式(7)可以写为:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}_1 \quad \mathbf{D}_2 \quad \dots \quad \mathbf{D}_{16}] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{16} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_i \mathbf{q}_i, \quad (i=1,2,\dots,16) \quad (9)$$

其中  $\mathbf{q}_i = [\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i]^T$ ,

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \bar{N}_i & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}_i & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_i \end{bmatrix}, \quad (i=1,2,\dots,16) \quad (10)$$

单元应变位移关系可表示为:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \dots \quad \mathbf{B}_{16}] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{16} \end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{B}_i \mathbf{q}_i \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} & \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

本构方程可表示为如下形式:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}\}^T = \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (13)$$

其中,  $E$  为弹性模量,  $\mu$  为泊松比, 弹性矩阵  $\mathbf{Q}$  的具体形式见附录 1.

通过 Hamilton 原理建立运动学方程如下:

$$\int_0^t [\delta(T-U) + \delta W] dt = 0 \quad (14)$$

其中  $T$ 、 $U$  和  $\delta W$  分别代表动能、势能以及外力产生的虚功, 它们可通过下式获得:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right)^2 \right] dV \quad (15)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (16)$$

$$\delta W = \mathbf{F}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \quad (17)$$

其中  $\rho$  为材料密度,  $V$  为单元体积,  $\mathbf{F}_0$  为外力矢量.

单元体积可以由下式给出:

$$\begin{aligned} dV &= d\zeta \cdot (d\boldsymbol{\xi} \times d\boldsymbol{\eta}) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \end{bmatrix} d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\eta} d\zeta \\ &= |\mathbf{J}| \end{aligned} \quad (18)$$

通过计算动能和势能, 单元的运动方程为

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e(t) + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e(t) = \mathbf{F}_e \quad (19)$$

其中  $\mathbf{F}_e$  为单元外力矢量,  $\mathbf{M}_e$  和  $\mathbf{K}_e$  分别为单元的质量矩阵和刚度矩阵, 可以通过下式得出:

$$\mathbf{M}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \mathbf{D}^T \mathbf{D} |\mathbf{J}| d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\eta} d\zeta \quad (20)$$

$$\mathbf{K}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\eta} d\zeta \quad (21)$$

$$\mathbf{F}_e = (\mathbf{F}_0 \mathbf{D})^T \quad (22)$$

## 1.2 基于 C-B 法的模型降阶

对于复杂、循环结构的振动分析, 将 C-B 法引入到模型的降阶过程中. 如图 3 所示, 将波纹板分成  $n$  个波形单元, 每个波形单元视为一个子结构, 共  $n$  个子结构; 子结构与子结构之间通过红线标注的界面边界连接.

根据 C-B 法, 每个波形单元的自由度被划分为两个部分: 界面自由度和内部自由度. 因此, 子结构

的运动方程如下所示:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} \\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_m \\ \ddot{\mathbf{q}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_m \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_m \\ \mathbf{F}_s + \mathbf{R}_s \end{bmatrix} \quad (23)$$

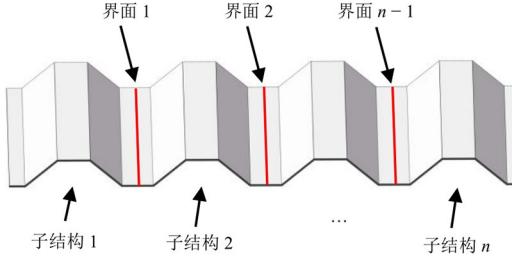


图 3  $n$  个波形单元的波纹板

Fig. 3 Corrugated plate with  $n$  corrugated units

其中下标“m”和“s”分别代表子结构的内部和界面,  $\mathbf{R}_s$  为子结构之间的内力.

界面自由度的结点位移由如下两个部分组成:

$$\mathbf{q}_m = \mathbf{q}^{ms} + \mathbf{q}^{mm} \quad (24)$$

其中  $\mathbf{q}^{ms}$  为实际中不受约束的界面自由度, 可以通过下式的 Guyan 法求解获得:

$$\mathbf{q}^{ms} = -\mathbf{K}_{mm}^{-1} \mathbf{K}_{ms} \mathbf{q}_s \quad (25)$$

由子结构界面固定时的振动产生的  $\mathbf{q}^{mm}$  可以通过对下列方程求解得到:

$$\mathbf{M}_{mm} \ddot{\mathbf{q}}^{mm} + \mathbf{K}_{mm} \mathbf{q}^{mm} = 0 \quad (26)$$

根据模态截断的思想, 高阶模态对结构的能量贡献相对较小, 因此有:

$$\mathbf{q}^{mm} = \boldsymbol{\Phi}_N \mathbf{r}_N = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_N^L & \boldsymbol{\Phi}_N^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_N^L \\ \mathbf{r}_N^H \end{bmatrix} \approx \boldsymbol{\Phi}_N^L \mathbf{r}_N^L \quad (27)$$

其中  $\boldsymbol{\Phi}_N$  为当该子结构界面固定时的正则模态矩阵, “L”和“H”分别代表模态的低阶与高阶.

经过模态截断后, 子结构的位移矢量可以写为:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^{ms} + \mathbf{q}^{mm} \\ \mathbf{q}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_N^L & -\mathbf{K}_{mm}^{-1} \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_N^L \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{\Phi}_c \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_N^L \\ \mathbf{q}_s \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

其中  $\boldsymbol{\Phi}_c$  为 C-B 法的第一次坐标转换矩阵.

经过第一次坐标转换后, 质量矩阵和刚度矩阵写为如下形式:

$$\bar{\mathbf{K}} = \boldsymbol{\Phi}_c^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{mm} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{K}}_{ss} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\Phi}_c^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{mm} & \bar{\mathbf{M}}_{ms} \\ \bar{\mathbf{M}}_{sm} & \bar{\mathbf{M}}_{ss} \end{bmatrix} \quad (30)$$

其中,  $\mathbf{A}_{mm}$  为  $m$  阶对角矩阵,  $\mathbf{I}_{mm}$  为  $m$  阶单位矩阵.

与此同时, 子结构的外载荷转换为:

$$\bar{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\Phi}_c^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_m \\ \mathbf{F}_s + \mathbf{R}_s \end{bmatrix} \quad (31)$$

同样的, 广义坐标在经过第一次坐标转换后可写为如下形式:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_N^L & -\mathbf{K}_{mm}^{-1} \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_N \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}_c \begin{bmatrix} \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_s \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}_c \mathbf{P} \quad (32)$$

经过上述转换后, 子结构的运动方程可以表示为如下形式:

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{P} = \bar{\mathbf{F}} \quad (33)$$

值得注意的是, 此时的界面自由度仍然保留在物理空间, 这不仅为子结构的装配带来了极大便利, 还使得在完成缩聚后, 无需进行模态还原即可直接观察界面边界的模态特征.

由图 3 可知, 完整梯形波纹板的运动方程由  $n$  个子结构组合而成:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{M}}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\mathbf{M}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{P}}_1 \\ \ddot{\mathbf{P}}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{P}}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{K}}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\mathbf{K}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_1 \\ \bar{\mathbf{F}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{F}}_n \end{bmatrix} \quad (34)$$

完整结构的坐标矢量为:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2 \ \cdots \ \mathbf{P}_n]^T \quad (35)$$

其中

$$\mathbf{P}_1 = [\mathbf{P}_1^m \ \mathbf{P}_1^{s2}]^T$$

$$\mathbf{P}_n = [\mathbf{P}_n^m \ \mathbf{P}_n^{s1}]^T$$

$$\mathbf{P}_i = [\mathbf{P}_i^m \ \mathbf{P}_i^{s1} \ \mathbf{P}_i^{s2}]^T \quad (36)$$

其中  $i = 2, 3, \dots, n-1$ , 上标“m”和“s”分别代表子结构的内部与界面.

由于子结构间是连续的, 因此有:

$$\mathbf{P}_j^{s1} = \mathbf{P}_{j-1}^{s2}, \quad (j = 2, 3, \dots, n) \quad (37)$$

通过合并不同子结构间相同的界面坐标矢量, 完整结构的坐标矢量可以写为:

$$[\mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2 \ \cdots \ \mathbf{P}_n]^T = \mathbf{T}_c \mathbf{P} \quad (38)$$

其中  $\mathbf{T}_c$  为第二次坐标转换矩阵。

基于第二次坐标转换,完整结构的运动方程可以表示为:

$$\bar{\bar{\mathbf{M}}}\ddot{\mathbf{P}} + \bar{\bar{\mathbf{K}}}\mathbf{P} = \bar{\bar{\mathbf{F}}} \quad (39)$$

其中:

$$\bar{\bar{\mathbf{M}}} = \mathbf{T}_c^T \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{M}}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\mathbf{M}}_n \end{bmatrix} \mathbf{T}_c \quad (40)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{K}}} = \mathbf{T}_c^T \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{K}}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\mathbf{K}}_n \end{bmatrix} \mathbf{T}_c \quad (41)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{F}}} = \mathbf{T}_c^T [\bar{\bar{\mathbf{F}}}_1 \ \bar{\bar{\mathbf{F}}}_2 \ \cdots \ \bar{\bar{\mathbf{F}}}_n]^T \quad (42)$$

至此,梯形波纹板的模型缩聚全部完成.通过数据恢复矩阵  $\mathbf{T}_{RM}$  将广义坐标从模态空间转换回物理空间,即:

$$[\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \cdots \ \mathbf{q}_n]^T = \mathbf{T}_{RM} \mathbf{P} \quad (43)$$

其中

$$\mathbf{T}_{RM} = \begin{bmatrix} \Phi_{c,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Phi_{c,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Phi_{c,n} \end{bmatrix} \mathbf{T}_c \quad (44)$$

由 C-B 法理论推导过程可知,在对等波形单元的梯形波纹板进行缩聚时,仅计算一个子结构的相关矩阵即可完成完整结构的振动分析,显著降低了计算时间.同时将子结构模型降阶可以进一步简化优化过程,提高优化效率.

## 2 数值算例

本节首先对比了相对自由度壳元和一阶剪切变形壳元对悬臂折板结构振动分析的计算结果,其次针对两个典型波纹板模型,比较了完整模型与缩聚模型在振动特性分析方面的精度与效率,最后对上述的波纹板模型进行了结构优化设计.

### 2.1 单元对比

在采用考虑了一阶剪切变形的壳元对折板结

构进行建模时,壳元需要通过坐标转换从局部坐标系统一到整体坐标系.需要指出的是,在坐标转换前,需要在各自矩阵的对应位置添加零行和零列,并在刚度矩阵的对应结点上给定刚度系数  $K_{\theta z}$ .当前研究中关于刚度系数的具体数值定义尚未统一,例如:Niyogi 等<sup>[11]</sup>给出的刚度系数为刚度矩阵中主对角线项最小值的千分之一, Thinh<sup>[12]</sup>给出刚度系数为刚度矩阵中主对角线项最小值的万分之一以下.现对悬臂折板模型采用考虑了一阶剪切变形的壳元和相对自由度壳元进行建模分析,考虑了一阶剪切变形的壳元采用不同的刚度系数,并与 COMSOL 仿真结果进行对比.

折板模型如图 4 所示,板长  $a_1 = 0.5$  m,  $a_2 = 0.5$  m,板宽  $b = 1$  m,厚度  $h = 0.02$  m,折板角  $\theta = 150^\circ$ ,折板的材料参数为密度  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>、弹性模量  $E = 10.92$  GPa.采用相对自由度壳元和一阶剪切变形壳元时创建的网格数量相同.对比结果如表 1 所示,括号内的比值为当前频率与仿真解的误差.

表 1 悬臂折板模型频率对比  
Table 1 Frequency comparison of cantilever folded plate structure

频率/Hz	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
COMSOL (实体单元)	26.8	44.1	97.3	103.6
$K_{\theta z}$ 取千分之一 (壳元)	29.8 (11.2%)	71.5 (62.1%)	99.5 (2.2%)	162.1 (56.5%)
$K_{\theta z}$ 取万分之一 (壳元)	27.8 (3.7%)	64.1 (45.3%)	97.7 (0.4%)	153.8 (48.4%)
相对自由度壳元	27.1 (1.1%)	45.6 (3.4%)	102.4 (5.2%)	108.6 (4.8%)

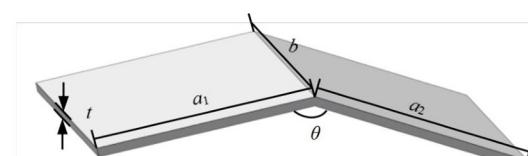


图 4 折板结构模型  
Fig. 4 Folded plate structure

由对比结果可知,在采用考虑一阶剪切变形的壳元时,刚度系数  $K_{\theta z}$  的选择会影响计算结果.而与之相比,相对自由度壳元则可以获得较高精度分析结果.

### 2.2 模型验证

为了验证基于 C-B 法的相对自由度壳元缩聚模型在计算精度、计算效率等方面的优势,设计两

个梯形波纹板模型进行数值仿真, 分别用于模拟工程中的方形结构(模型 1)与细长矩形结构(模型 2)。模型 1 由八个波形单元组成, 每个波形单元的几何尺寸为: 横向长度  $W=0.28$  m、波纹板的厚度  $t=0.001$  m、波底两侧长  $L_1=0.004$  m、波顶宽度  $L_2=0.008$  m、波高  $H=0.016$  m、波纹角  $\alpha=60^\circ$ 。模型 2 由 10 个波形单元组成, 每个波形单元的几何尺寸为: 横向长度  $W=0.08$  m、波底两侧长  $L_1=0.008$  m、波顶宽度  $L_2=0.016$  m、波高  $H=0.016$  m、波纹角  $\alpha=45^\circ$ 。两个模型的材料参数为: 密度  $\rho=1000$  kg/m<sup>3</sup>、弹性模量  $E=10.92$  GPa。为了验证有限元计算程序的正确性以及缩聚模型的计算效率, 通过有限元法计算完整模型和缩聚模型以及 COMSOL 仿真软件实体单元获取两个两端

固支的梯形波纹板模型的前四阶固有频率和模态, 如表 2 和表 3 所示, 括号内为当前自由度数与仿真软件自由度数的比值以及当前频率与仿真软件频率的误差。

根据两组频率与模态结果的对比可知, 采用相对自由度壳元的完整模型理论解与采用实体单元的 COMSOL 仿真解基本吻合, 但两组完整模型的自由度数均仅为仿真软件的 14% 左右, 同样的两组缩聚模型在基本不降低计算精度的前提下, 将自由度数进一步缩聚到仿真模型的 0.6%。对比计算时间, 缩聚模型相较于完整模型由 27.3 s 降低至 0.074 s, 降低幅度约为 99.7%。综上所述, 模型缩聚保证了精度与效率的平衡, 在提升计算效率的同时保证了较高的计算精度。

表 2 模型 1 固有频率和模态  
Table 2 Natural frequencies and mode shapes of model 1

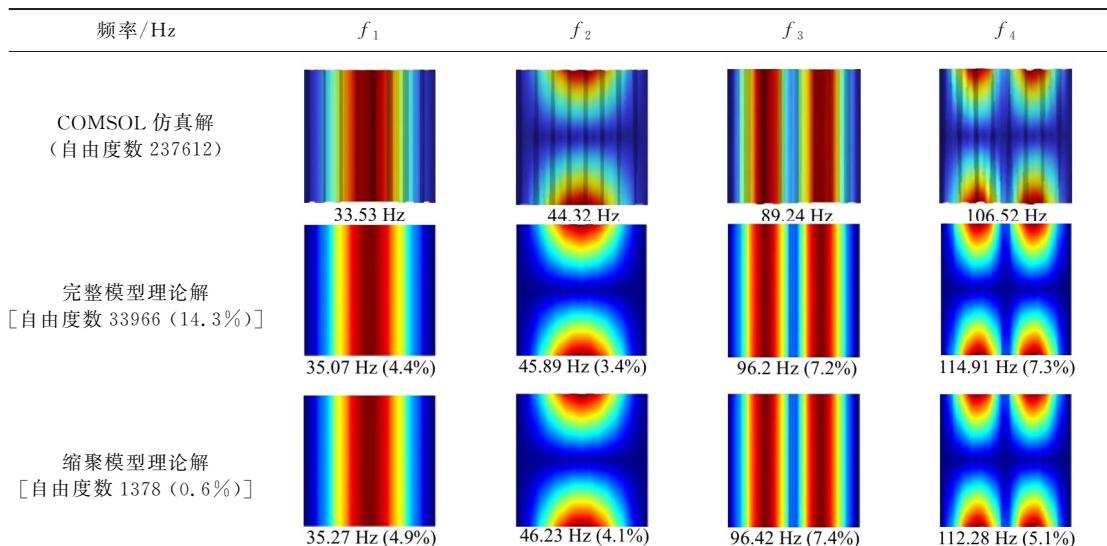
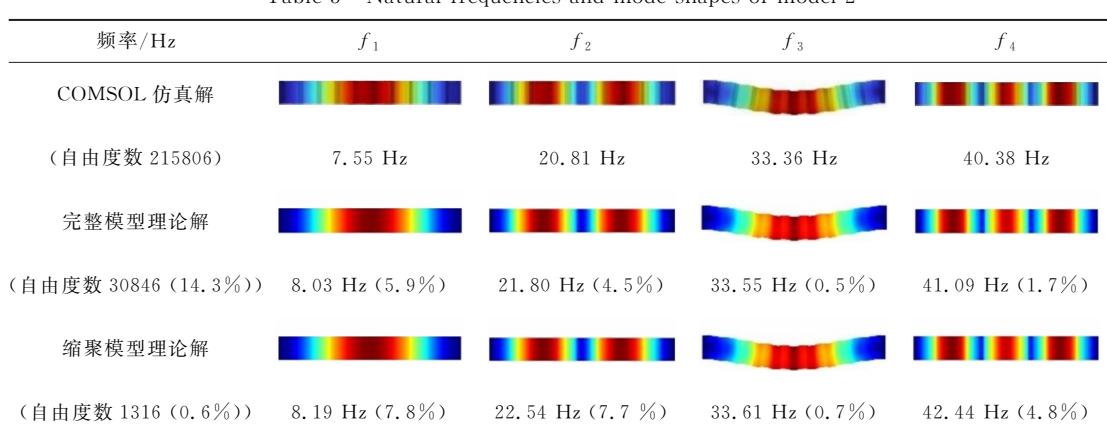


表 3 模型 2 固有频率和模态  
Table 3 Natural frequencies and mode shapes of model 2



## 2.3 结构优化

为了进一步提升结构性能和满足特定设计要求,可以通过修改波纹板中每个波形单元的波纹角、波顶宽度等一系列几何参数,从均匀波纹板结构向非均匀的方向转变,以此来达到抑制振动、控制结构振动带隙等目的。当优化对象为其他类型的波纹结构(如圆形波纹板)时,仅需在优化过程中将相应的圆形波形单元作为预设染色体嵌入算法中即可,整体优化流程无需修改。模型缩聚方法在应用于波纹板动力学分析方面的有效性与准确性已经通过上述数值分析得到了验证,现在对上述的两个结构进行优化。传统的优化思想是通过将预定义的波形单元相关矩阵储存,在优化过程中调用,但每次迭代需要对完整波纹板的矩阵进行求解,消耗大量时间,而基于模型缩聚的优化方法可以将缩聚后的波形单元矩阵储存,调用时仅提取缩聚矩阵,极大降低迭代的时间。

选择遗传算法作为优化方法,将表中列出的64种预定义波形单元作为遗传算法的染色体,结构的每个波形单元从其中选出,要求优化后波纹板的展开长度与优化前一致。模型1的优化目标是将第一阶模态的振型峰值集中在结构的一侧,模型2的优化目标是将第二节模态左侧的振动尽可能地抑制。在遗传算法优化过程中,用欧几里得距离表示结构与预期结果的接近程度,

$$\min_X f(X) = \|\phi_t(X) - \phi_c\|_2 = \sqrt{\sum_i (\phi_{t,i} - \phi_{c,i})^2} \quad (45)$$

其中  $X$  是当前基因选择下的一组波形单元,  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ ,  $\phi_t(X)$  是选择当前基因下的波纹板归一化模态矢量,  $\phi_c$  是预期结果的归一化模态矢量。

将不同波形单元的选择以及波纹板展开长度作为优化过程中的约束,有:

$$x_i \in \{s_1, s_2, \dots, s_{32}\}, (i = 1, 2, \dots, N) \quad (46)$$

$$|L_X - L_c| \leq \psi \quad (47)$$

其中,  $s$  代表预设的 64 种波形单元,  $x_i$  表示优化结构中第  $i$  个波形单元的构型,  $N$  为优化结构的总波形单元数,  $L_X$  和  $L_c$  分别为优化前波纹板的展开长度和优化后的展开长度,  $\psi$  为预设的阈值, 若严格遵守优化前后波纹板展开长度相等这一约束条件, 则在优化过程中仅会出现有限个优化结果, 同时预

期的优化结果可能存在, 因此设置阈值扩展设计空间, 提升设计灵活性。预设的波形单元构型如表 4 所示。

图 5 为两组模型模态优化前后的对比。由于受限于材料种类的单一性、可调几何参数幅度的有限性以及波形单元数量较少等因素, 本轮优化所得性能提升幅度相对有限, 尚未表现出显著的优化效果, 但通过图 5 依旧可以看出, 模型 1 的模态峰值位置向左侧移动; 模型 2 左侧振动峰相较于优化前的第二阶模态, 已经得到了较大程度的抑制。上述优化目标的设置旨在验证上述流程在不同振动控制需求下的适应能力: 模型 1 通过迁移第一阶模态的振型峰值, 展示了该方法在控制整体振动分布方面的有效性; 模型 2 则通过抑制第二阶模态中局部区域的响应, 体现了其在多峰响应调控中的选择性控制能力。结果表明, 该流程不仅能够实现振动峰的迁移, 还具备针对性地抑制局部振动峰的能力, 从而验证了其在波纹板结构优化设计中的可行性和实用价值。

表 4 预设波形单元参数  
Table 4 Preset waveform unit parameters

规格编号	1	2	3	4
波纹角 $\alpha$ / (°)	30	40	50	60
波底两侧 $L_1$ / mm	2	4	8	12
波顶宽度 $L_2$ / mm	4	8	12	24

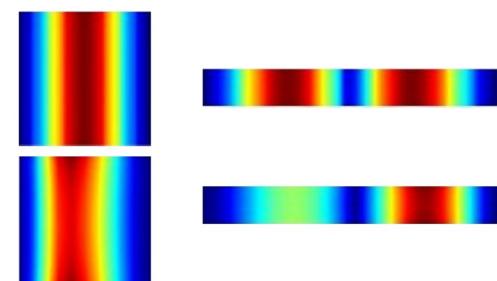


图 5 模型 1(左)和模型 2(右)优化前后的模态对比  
Fig. 5 modal comparison of model 1 (left) and model 2 (right) before and after optimization

## 3 结论

本文采用了基于 C-B 模型缩聚的有限元法对梯形波纹板进行动力学分析和结构优化。具体以相对自由度壳元为波纹板建模, 通过 C-B 法对完整结构进行子结构划分和模型降阶, 并利用遗传算法对波纹板进行结构优化。需要再次说明的是, 尽管本文以具有代表性的梯形波纹板为例进行说明, 但所

采用的动力学分析与结构优化的建模流程和求解策略并不依赖于具体结构形式。在应用于其他类型波纹板结构时,仅在建模阶段因几何差异造成的网格划分不同,整体计算流程无需额外调整。因此,出于篇幅控制及避免内容重复的考虑,本文不再对其他波纹板结构进行展开,相关分析可直接参照本文所述方法进行推广应用。主要结论如下:

(1) 通过对基于相对自由度壳单元的完整模型与基于实体单元的 COMSOL 模型在频率与模态特性方面的对比分析,可以发现相对自由度壳单元在薄壁结构建模中能够以较低的单元数量实现较高的计算精度。

(2) 通过完整模型与缩聚模型的计算结果对比可以得出,缩聚模型在维持较高计算精度的同时,大幅降低了模型的自由度数,极大地提高了计算效率。

(3) 基于模型缩聚理论,非均匀波纹板的优化过程得到了显著简化。通过在优化过程中引入已缩聚的模型矩阵以替代完整矩阵,显著提升了遗传算法在结构优化中的计算效率。

## 参考文献

[1] 李文杰, 毕皓皓, 张欣刚, 等. 温度场下波纹型薄膜基底结构的动态屈曲分析[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(10): 77—83.  
LI W J, BI H H, ZHANG X G, et al. Dynamic buckling analysis of wrinkled film substrate structure under the thermal effect [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(10): 77—83. (in Chinese)

[2] 刘勇, 冀伟, 赵彦华, 等. Q460 高强钢焊接波形钢腹板梁的剪切性能研究[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2025, 46(2): 234—242.  
LIU Y, JI W, ZHAO Y H, et al. Shear performance of welded corrugated steel web girder using Q460 high-strength steel [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2025, 46(2): 234—242. (in Chinese)

[3] 王圣保. 不同连接形式对波纹钢腹板 PC 组合梁性能影响[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2012, 33(12): 1492—1497.  
WANG S B. Influence of different connectors on mechanical performance of composite box girder with corrugated steel webs [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2012, 33(12): 1492—1497. (in Chinese)

[4] CIOFALO M, DI PIAZZA I, STASIEK J A. Investigation of flow and heat transfer in corrugated-undulated plate heat exchangers [J]. Heat and Mass Transfer, 2000, 36(5): 449—462.

[5] MO Y L, JENG C H, CHANG Y S. Torsional behavior of prestressed concrete box-girder bridges with corrugated steel webs [J]. ACI Structural Journal, 2000, 97(6): 849—859.

[6] MEHRABIAN M A, POULTER R. Hydrodynamics and thermal characteristics of corrugated channels: computational approach [J]. Applied Mathematical Modelling, 2000, 24(5/6): 343—364.

[7] 章海亮, 胡阳鸣, 罗伟峰, 等. 结合灵敏度分析的圆锥壳—折板结构动力学研究[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(3): 56—61.  
ZHANG H L, HU Y M, LUO W F, et al. Structural dynamics of conical shell-folding plate based on sensitivity analysis [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(3): 56—61. (in Chinese)

[8] 李拓, 江俊. 点阵多孔金属夹芯板振动特性分析及优化设计[J]. 动力学与控制学报, 2009, 7(1): 39—44.  
LI T, JIANG J. Vibration characteristics and optimization of truss-cored metal sandwich plates [J]. Journal of Dynamics and Control, 2009, 7(1): 39—44. (in Chinese)

[9] 王祥宇, 臧健. 点阵夹芯梁在气动力下的振动控制与能量采集[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(7): 38—49.  
WANG X Y, ZANG J. Vibration control and energy harvesting of lattice sandwich beam under aerodynamic forces [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(7): 38—49. (in Chinese)

[10] ZHUANG W Z, YANG C, WU Z G. Modal and aeroelastic analysis of trapezoidal corrugated-core sandwich panels in supersonic flow [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2019, 157: 267—281.

[11] ZHENG Y N, WANG Y F, HUANG J D, et al. Flutter stability analysis of composite corrugated plates in supersonic flow [J]. Archive of Applied Mechanics, 2024, 94(4): 1079—1098.

[12] KIM C, SUN Q S, SUN G Y, et al. Flexural performance of SCSP-concrete composite structures with equidistant transverse rebar [J]. Journal of

Building Engineering, 2024, 84: 108355.

[13] 郑宇宁, 邱志平, 苑凯华. 复合材料波纹板在剪切载荷下的屈曲特性分析与可靠性优化[J]. 振动与冲击, 2016, 35(19): 7—14, 25.  
ZHENG Y N, QIU Z P, YUAN K H. Buckling-performance analysis and reliability optimization of composite corrugated plates under shear loading [J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35(19): 7—14, 25. (in Chinese)

[14] NIYOGI A G, LAHA M K, SINHA P K. Finite element vibration analysis of laminated composite folded plate structures [J]. Shock and Vibration, 1999, 6(5/6): 273—283.

[15] 于野, 盈亮, 胡平, 等. 高强钢波纹夹芯结构的力学性能研究[J]. 固体力学学报, 2014, 35(3): 302—307.  
YU Y, YING L, HU P, et al. Research on the mechanical property of high strength steel corrugated core sandwich structure [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2014, 35(3): 302—307. (in Chinese)

[16] KHEIRIKHAI M M, BABAGHASABHA V, NAEIMI-ABKENARI A, et al. Free vibration analysis of corrugated-face sheet composite sandwich plates [J]. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2016, 38(7): 1973—1985.

[17] 吴华新, 孙刚, 张文雍, 等. 水在波纹板间结冰过程的数值模拟[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2008, 29(10): 1046—1049.  
WU H X, SUN G, ZHANG W Y, et al. Numerical simulation of the water frozen between corrugated plates [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2008, 29(10): 1046—1049. (in Chinese)

[18] CEN Z, LI J, LIE S T. Buckling analysis of rotationally periodic structures using shell element with relative degrees of freedom [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 51(11): 1299—1315.

[19] XUE M D, ZHANG X D, HU N. Thermal stress analysis of sandwich structures [J]. Journal of Thermal Stresses, 2006, 29(3): 229—244.

[20] 陈丽华, 程建钢, 黄文彬. 带有沙漏控制的相对自由度壳元非线性动力分析[J]. 固体力学学报, 2002, 23(2): 237—242.  
CHEN L H, CHENG J G, HUANG W B. An 8-node shell element of relative degrees of freedom with hourglass control for nonlinear dynamic analysis [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2002, 23(2): 237—242. (in Chinese)

[21] LI J, XIANG Z H, XUE M D. Buckling analysis of rotationally periodic laminated composite shells by a new multilayered shell element [J]. Composite Structures, 2005, 70(1): 24—32.

## 附录 1

弹性常数矩阵  $Q$  为:

$$Q = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix}$$

其中,  $E$  为弹性模量,  $\mu$  为泊松比.