

基于路面几何约束的履带车辆动力学约化建模^{*}

孙博天¹ 李文涵¹ 柳月² 王雪峰^{1†}

(1. 北京大学 工学院, 北京 100871)

(2. 中国北方车辆研究所, 北京 100072)

摘要 履带车辆具有良好的路面适应能力, 被广泛应用于各类复杂地形中. 基于动力学建模的履带车辆仿真是研究履带车辆动力学性能与优化设计参数的有效手段. 履带车辆和路面之间的复杂接触常常会降低履带车辆模型的求解效率和稳定性. 本文提出了一种将路面视为几何约束嵌入到动力学模型中的约化建模方法, 在给定路面和轮子几何后, 通过离线计算得到一条不依赖于行驶速度和其他车辆参数的名义轮心轨迹, 即轮与路面接触的轨迹约束. 在轨迹的几何约束基础上, 依据负重轮所受路面支持力的大小及轮心位置, 可以判断车轮何时与路面接触, 这使得模型能有效模拟复杂路面条件下的履带车辆通过性. 所提出的模型在不同频率的正弦路面和带坑洞的路面上进行了仿真验证.

关键词 履带车辆, 动力学, 约束嵌入, 模型降维

中图分类号: O313.7

文献标志码: A

Reduced Dynamic Modeling and Simulation of Tracked Vehicles Based on Road Geometry Constraints^{*}

Sun Botian¹ Li Wenhan¹ Liu Yue² Wang Xuefeng^{1†}

(1. College of Engineering, Peking University, Beijing 100871, China)

(2. China North Vehicle Research Institute, Beijing 100072, China)

Abstract Tracked vehicles possess excellent terrain adaptability and are widely used in various complex terrains. Simulation of tracked vehicles based on dynamic modeling is an effective means to study the dynamic performance of tracked vehicles and optimize design parameters. The complex contact between the tracked vehicle and the ground often reduces the efficiency and stability of solving the tracked vehicle model. This paper proposes a modeling method that embeds the ground as a geometric constraint into the dynamic model. Given the ground and wheel radius, a nominal wheel center trajectory that does not depend on the vehicle's driving speed and other vehicle parameters can be pre-calculated. The contact between the wheel and the ground can be transformed into a constraint that the wheel center falls on the nominal trajectory. Based on the magnitude of the ground support force on the load wheels and the position of the wheel center, it can be determined when the wheel contacts the ground. This allows the model to effectively simulate the passing ability of tracked vehicles under challenging ground conditions. The proposed model is validated through simulations on sinusoidal terrains of different frequencies and the terrain with a pothole.

2024-09-22 收到第 1 稿, 2025-04-23 收到修改稿.

^{*} 项目名称略(JSZL2021208A001)

[†] 通信作者 E-mail: wang_xf@pku.edu.cn

Key words tracked vehicles, dynamics, constraint embedding, model order reduction

引言

履带车辆具有良好的地形适应性,在军事、农业等领域得到了广泛应用.履带车辆在路面激励下的振动响应,以及在具有挑战性的路面上的通过性,是影响车辆行驶平稳性、机动性与使用寿命的重要因素.为了对履带车辆进行设计验证和性能评估,有必要对车体振动响应进行分析^[1].通过样机实验开展测量与数据分析的方式,存在高成本、低效率的缺点.相较而言,基于动力学建模和仿真的方法具有耗费低、灵活性高的优点,被广泛应用于履带车辆振动响应分析中^[2,3].

履带车辆由车体、轮系、履带、悬挂系统等组成,是一种典型的多体动力学系统.系统中轮系和车体、履带之间存在多种串联或并联形式的碰撞,以及刚性约束和柔性相互作用.同时,路面也会通过接触对履带和车体施加法向支持力和切向的摩擦作用,这种约束关系依赖于路面的形状和材质,形式更加复杂.此外,在轮子和地面分离或重新接触时,路面约束会消失或重新生效,使得系统表现出变构型行为.这些特点导致履带车辆的动力学模型通常具有高维和强非线性的特征,其高效稳定的求解一直存在挑战.

为了完整地描述整车结构以进行整车动力学仿真,研究者应用多种方法建立了履带车辆完整的三维动力学模型,如递推方法^[4]、多体系统传递矩阵法^[5]、牛顿-欧拉方程^[6]等.此外,还有一些研究者利用各类动力学仿真软件对履带车辆进行建模和仿真,如 LMS Virtual. Lab Motion^[7,8]等.

履带车辆系统包含大量刚体,动力学方程维度很高,其完整的非线性多体动力学模型的求解通常需要较长的时间.因此,有必要对完整模型进行降维.研究者采取了不同方式对履带车辆的车体、悬挂系统、履带系统等进行降维简化建模.例如,将悬挂系统简化为竖直方向的单向线性弹簧阻尼器或者竖直和水平方向的两组弹簧阻尼器,建立了履带车辆二维动力学模型^[9,10];进一步将线性弹簧阻尼器用平衡肘和扭转弹簧代替^[11],可以更好地反映悬挂系统的动力学特性.履带系统由周期性重复的大量履带板构成,是履带车辆动力学方程高维度的

主要来源之一,将履带约化为一个或者少数几个弹性元件可以有效降低模型的维度.当前,常用的履带简化包括弹簧等效方法^[8]和柔性带等效方法^[12,13].

履带车辆的轮系与履带、履带与地面之间存在复杂的接触关系.履带和轮系在接触处受到路面提供的法向力和切向力,在刚性路面下法向力一般使用 Hertz 接触模型等局部弹性化方法建立^[5].在考虑土壤沉降的柔性路面中,通常基于 Bekker 土壤方程^[14,15]对路面压力和沉降深度的关系进行建模.履带负载下的路面切向力可能包含库仑摩擦、阻尼、黏滑等不同效应^[16].考虑到运行中车轮和履带可能出现悬空,可以在二维情况下按照车轮-履带-地面彼此是否接触将接触情况分为三类,进而建立多个履带接触模型^[8].这些复杂的接触关系进一步提高了履带车辆高维动力学系统的非线性和模型刚度,导致计算复杂度显著提升并且数值求解稳定性受到严重影响.通过将路面激励简化为线性弹簧阻尼器的点激励,并忽略波长小于履带节距的路面起伏,可以简化履带与路面的接触模型^[17].目前通过路面约束进行约化建模的研究较少.

对高维动力学系统进行降维是降低计算成本和提高计算稳定性的重要方法^[18].将约束嵌入动力学方程的约化建模方法是一种含约束动力学方程的模型降维方法.本工作中,通过预先计算给定路面下车轮轮心的名义轨迹,将路面接触视为一种几何约束嵌入到履带系统的动力学方程当中.当轮和地面之间存在接触时,其对应的扭杆自由度被几何约束代替,从而实现了模型的降维.同时,本文基于轮地接触力建立了轮悬空和接地的切换条件,使得模型具有通过复杂路面的仿真能力.与整车仿真模型对比显示,本文建立的约化动力学模型计算效率具有显著优势.

1 履带车辆模型

1.1 车体模型

履带车辆由车体、履带、轮系组成.本工作关注展现路面几何约束嵌入履带车辆动力学方程的降维方法,因此本文假设车辆沿直线在具有起伏的路

面上行驶. 基于此假设, 本文首先给出履带车辆约束动力学模型的一般形式, 然后介绍路面几何约束嵌入动力学模型的方法. 车体被视为一个刚体, 通过旋转关节与轮系中的导向轮、驱动轮相连, 并通过扭杆悬挂系统和 N 个负重轮相连, 履带被简化为一个环绕在轮系上的轻质弹性带.

设履带车辆的地面固连系 $\{O; i, j, k\}$. 车体质心平动惯性系 $\{H; e_1^H, e_2^H, e_3^H\}$ 的原点为车体质心 H , 在地面系下的位置为 $[x_c, y_c]$, 坐标轴与地面固连系平行. 车体质心固连系 $\{C; e_1^C, e_2^C, e_3^C\}$ 原点 C 与 H 重合, 相对于地面系的俯仰角为 ψ . 车体前后、上下和俯仰方向的等效阻尼系数分别为 c_x, c_y 和 c_ψ . 履带车辆第 i 个扭杆被安装在点 B_i 处, 在质心固连系下相对于质心 C 的位置为 r_{CB_i} . 扭杆 i 通过长度为 l_e 的平衡肘与负重轮轮心 W_i 相连. 设当扭杆未发生变形时, 平衡肘与 e_1^C 的初始夹角为 α_0 , 记平衡肘相对于初始位置的角度为 α_i . 扭杆的扭转刚度系数和扭转阻尼系数分别为 k_{tb} 和 c_{tb} . 车体、导向轮、驱动轮、负重轮的质量分别为 $m_{chs}, m_{idr}, m_{spr}, m_w$, 平衡肘的质量远小于其他零件质量, 可以忽略不计. 车架俯仰方向的转动惯量为 J_{chs} , 负重轮在忽略绕轮心的自转时绕扭杆旋转的转动惯量为 $J_w = (1/2)m_w R_w^2 + m_w l_e^2$. 驱动轮、导向轮和负重轮半径分别为 R_{spr}, R_{idr}, R_w . 履带简化成的弹性带的等效拉伸刚度为 K_{es} .

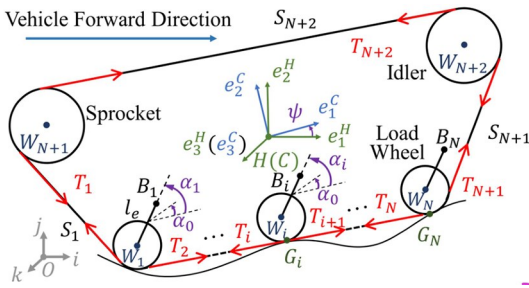


图1 履带车辆结构图
Fig. 1 Schematics of the tracked vehicle

导向轮、驱动轮和负重轮的转动惯量相对于车体的转动惯量而言很小, 在考虑旋转运动时可以忽略. 负重轮的质量相对于车体而言同样很小, 在考虑车体在路面激励下的平动运动时, 负重轮相对于车体的平动加速度可以忽略. 于是系统的自由度可以记为 $q = [x_c, y_c, \psi, \alpha_1, \dots, \alpha_N]^T$, 其中包括车体的三个运动自由度和每个扭杆相对初始位置的转角, N 为负重轮数量. 车体平面运动动力学方程为

$$m\ddot{r}_c = \sum_{i=1}^N F_{N_i} + \sum_{i=1}^N F_{f_i} - c^T \dot{r}_c - (m_{chs} + m_{idr} + m_{spr} + m_w)g \cdot j \quad (1)$$

$$J\ddot{\psi} = \sum_{i=1}^N (F_{N_i} + F_{f_i}) \times r_{CB_i} \cdot k - c_\psi \dot{\psi} \quad (2)$$

其中 $m = m_{chs} + m_{idr} + m_{spr} + m_w$ 是车的总质量, F_{N_i} 和 F_{f_i} 是第 i 个负重轮处路面的法向支持力与切向摩擦力, $c = [c_x, c_y]^T$ 为车体 x 和 y 方向运动的阻尼力, $r_c = [x_c, y_c]$ 为车体质心在地面系下的坐标, g 为重力加速度.

由于忽略了负重轮自转的转动惯量, 每个扭杆—平衡肘—负重轮的组合可以视为一个刚体, 其相对于车身只有绕扭杆安装点的旋转运动. 履带相对于车体的质量很小, 因此在计算履带对车体作用时其惯性可以忽略. 如图2所示, 对于负重轮 i , 履带简化后的连续体弹性带与负重轮上的一段圆弧贴合, 并在圆弧上的 G_i 点与路面接触. 将与负重轮贴合的履带分成三部分, 包括 G_i 点附近微元 D_i , 微元 D_i 左侧的弧形 L_i 以及右侧的弧形 R_i . 微元 D_i 受到轮子的压力 F_{wN_i} 与摩擦力 F_{wf_i} , 地面支持力 F_{N_i} 与摩擦力 F_{f_i} , 以及分别来自 L_i 和 R_i 的张力 T_i 与 T_{i+1} , 其切线方向与法向的力平衡方程分别为:

$$T_{i+1} - T_i = F_{f_i} + F_{wf_i} \quad (3)$$

$$F_{N_i} = F_{wN_i} \quad (4)$$

其中, 车轮与履带之间的滚动摩擦力 F_{wf_i} 远小于履带张力 T_i 和路面摩擦力 F_{f_i} , 可以忽略. 于是微元 D_i 作用在轮子上的力仅有支持力 F_{wN_i} , 并且 D_i 前后的履带张力差仅由该点的路面摩擦力决定. 弧形 L_i 受到两端的履带张力以及车轮法线方向的分布式正压力和切线方向的蠕变摩擦力的作用. 由于蠕变摩擦力相对于履带张力而言很小, 因此在计算车轮受力时可以忽略, 并认为 L_i 上的履带张力的合力 $N_{wL_i}^{d_i}$ 等于其两端的张力的矢量和. 同理, R_i 对车轮的正压力 $N_{wR_i}^{d_i}$ 等于其两端大小为 T_{i+1} 的张力的矢量和. 于是, 履带对其包覆的负重轮的作用力就是 L_i 左端和右端大小为 D_i 的张力, R_i 左端和右端的大小为 T_{i+1} 的张力, 以及 D_i 对车轮的支持力 F_{wN_i} 这五个力的合力. 由于 D_i 是微元, L_i 的右端和 R_i 的左端的张力共线, 因此这两个力的合力的大小为 $T_{i+1} - T_i = F_{f_i}$, 方向沿路面摩

擦力方向.再结合法向力平衡方程可以发现,车轮受到的履带力就可以表示为整个与负重轮贴合的履带圆弧段两端的张力以及路面接触点处的路面支持力和摩擦力之和,这从结果上来看,就是地面接触力直接作用到了负重轮上.

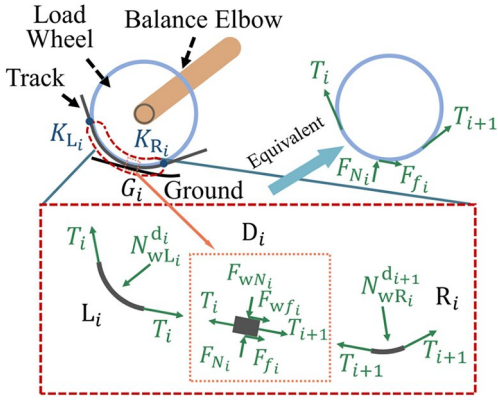


图 2 履带与负重轮受力分析

Fig. 2 Force analysis of the track and load wheel

基于上述受力分析,第 i 个负重轮以扭杆安装点为矩心的旋转动力学方程可以写为

$$J_w(\ddot{\alpha}_i + \ddot{\psi}) = M_i^{\text{tb}} + M_i^G + M_i^s + M_i^{\text{tk}} \quad (5)$$

其中 M_i^{tb} 、 M_i^G 、 M_i^s 、 M_i^{tk} 分别为第 i 个负重轮的扭杆力矩、重力力矩、路面支持力和摩擦力的合力矩,以及履带张力力矩.扭杆力矩 M_i^{tb} 可以通过如下本构方程表达:

$$M_i^{\text{tb}} = -k_{\text{tb}}(\alpha_i - \alpha_0) - c_{\text{tb}}\dot{\alpha}_i \quad (6)$$

其中 k_{tb} 和 c_{tb} 为扭杆的刚度系数和阻尼系数.重力力矩为

$$M_i^G = \mathbf{r}_{B_i W_i} \times (-m_w \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} \quad (7)$$

路面支持力的本构方程表达为

$$\mathbf{F}_{N_i} = \begin{cases} (-k\delta - c\dot{\delta})\mathbf{n}_i, & \text{if } \delta \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

其中 δ 为依据 \mathbf{q} 计算得到的穿透深度, k 和 c 分别为路面刚度系数和阻尼系数, \mathbf{n}_i 为轮地接触点处路面的单位外法向量.切向摩擦力的大小为

$$\mathbf{F}_{f_i} = -\frac{\text{sign}(\mathbf{v}_i^a)}{\mu \|\mathbf{F}_{N_i}\|} \mathbf{t}_i \quad (9)$$

其中 sign 为符号函数, μ 为路面摩擦系数, $\mathbf{t}_i = \mathbf{n}_i \times \mathbf{k}$ 为车轮接触点处的单位切向量, \mathbf{v}_i^a 为接触点 G_i 处履带相对路面的绝对速度.这里 \mathbf{v}_i^a 满足

$$\mathbf{v}_i^a = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{CG_i}) \cdot \mathbf{t}_i - R_{\text{spr}} \omega_{\text{spr}} \quad (10)$$

其中 ω_{spr} 为驱动轮的转动速度,式中第一项代表车

轮接触点处对地面的牵连速度,而第二项代表履带相对车体运动的相对速度.进而,路面支持力和摩擦力力矩可以由下式给出:

$$M_i^s = \mathbf{r}_{B_i G_i} \times (\mathbf{F}_{N_i} + \mathbf{F}_{f_i}) \cdot \mathbf{k} \quad (11)$$

其中 G_i 为轮子 i 的轮地接触点位置.

履带张力扭矩 M_i^{tk} 依赖于履带上的张力分布.在轻质履带假设下,两个负重轮之间的履带受到的路面摩擦力可以忽略,所以履带张力仅仅在经过车轮时发生改变.如图 1 所示,从驱动轮下方开始对每两个轮子之间的履带进行编号,整条履带上的张力分布可以由第 $i=1 \sim N+2$ 条履带上的张力 T_i 进行描述.履带跨过导向轮时承受某一常数摩擦阻力矩,可以写为

$$T_{N+2} - T_{N+1} = \frac{M_{\text{idr}}}{R_{\text{idr}}} \quad (12)$$

履带的本构方程为

$$\sum_{i=1}^{N+2} T_i \frac{S_i}{K_{\text{es}}} = S - S_0 \quad (13)$$

其中 S_i 代表当前构型下第 i 段履带的长度, S 代表当前构型下履带的总长度, S_0 代表履带在未变形时的总长度.将式(3)、(12)和(13)和在 $i=1 \sim N+2$ 时联立,可以求解得到所有履带张力 T_i , $i=1 \sim N+2$.张力对负重轮的力矩 M_i^{tk} 可以由下式给出:

$$M_i^{\text{tk}} = (T_i \mathbf{n}_{L_i} \times \mathbf{r}_{B_i K_{L_i}} + T_{i+1} \mathbf{n}_{R_i} \times \mathbf{r}_{B_i K_{R_i}}) \cdot \mathbf{k} \quad (14)$$

其中 K_{L_i} 与 K_{R_i} 分别是第 i 个负重轮上履带从左侧和右侧离开轮子的点, \mathbf{n}_{L_i} 和 \mathbf{n}_{R_i} 分别是 K_{L_i} 和 K_{R_i} 处履带离开轮子时的方向,且满足 $\mathbf{n}_{R_i} = -\mathbf{n}_{L_{i+1}}$,在已知当前构型后可以通过几何求解得到.

1.2 路面接触约化方法

在前面的模型中,路面对车轮的法向支持力的大小依赖于轮子相对于路面的穿透深度.较大的路面刚度系数则会导致模型刚度增加,降低数值求解的稳定性和效率.为了解决这个问题,本文中将路面几何约束嵌入到车体的动力学方程中,以消去各个轮子的扭杆摆角自由度 α_i .

假设二维路面函数 $f(x)$ 是连续可微的,当轮和路面相接触时,必然满足轮与路面接触点重合条件,接触点的相切条件.对于一般的崎岖路面而言,可以使用分段三次多项式函数将崎岖路面拟合为连续可微路面.因此,如果不考虑车轮脱离地面的

情况,在已知车体三自由度平面运动位姿后,可以先算出各个扭杆的位置,然后再依次对每个负重轮数值求解上述两个条件给出的非线性方程组,以得到轮子接触点在平面上的位置,进而得到接触点法线方向以及扭杆转角。但是,这种方式需要在每一个积分步下对每个车轮分别求解一个二维非线性代数方程,使得计算代价增加。

进一步观察发现,当一个负重轮沿着连续路面 $f(x)$ 滚动时,它的轮心会划过一条唯一的轨迹。对于运行中的履带车辆而言,假设履带厚度忽略,只要负重轮和地面之间存在接触,负重轮轮心必然会位于这条名义轮心轨迹上。这条轨迹只依赖于路面形状和负重轮半径,与车辆其他几何参数、动力学参数、行驶速度等无关。因此,在生成之后可以重复应用于不同行驶速度和车辆参数的仿真中,从而提高每次仿真的计算效率。

如图3所示,名义轮心轨迹的求法如下:连续可微路面 $f(x)$ 上点 x 的法线方向角为 $\theta(x) = \arctan[f'(x)] + \pi/2$,如果轮子在点 $[x, f(x)]$ 处与地面存在接触,则其轮心位置为

$$[f_0^x(x), f_0^y(x)] = \{x + r_w \cos[\theta(x)], f(x) + r_w \sin[\theta(x)]\} \quad (15)$$

求解得到的参数曲线 $[f_0^x(x), f_0^y(x)]$ 中可能存在同一个横坐标 $f_0^x(x)$ 对应多个纵坐标 $f_0^y(x)$ 的情况,其中最高的纵坐标对应于物理可实现的接触点。因此,名义轮心轨迹 $[x, f_{wc}^y(x)]$ 可以写为

$$f_{wc}^y(x) = \max\{f_{wc}^y(x_1) \mid f_0^x(x_1) = x\} \quad (16)$$

该轨迹下,对应的路面接触点法向向量方向角为

$$\theta_w(x) = \theta[\operatorname{argmax} f_0^y(x_1)] \quad \text{with } x_1 = f_0^x(x) \quad (17)$$

得到名义轮心轨迹之后,在已知车体三个平面运动自由度的情况下,只需要搜索以车体当前位姿下的扭杆位置 $(x_i^{\text{tb}}, y_i^{\text{tb}})$ 为圆心,平衡肘长度 l_e 为半径的圆弧,即可找到对应的车轮轮心所在位置,从而解出扭杆摆角 α_i ,进而通过后向差分的方式得到扭杆摆角速度 $\dot{\alpha}_i$ 。此时扭杆摆角不再通过动力学方程(5)的积分获得,而是仅依赖于求解这个代数方程:

$$f_{wc}^y[x_i^{\text{tb}} - \cos(\alpha_i + \psi)l_e] = y_i^{\text{tb}} - l_e \sin(\alpha_i + \psi) \quad (18)$$

这是一个一维非线性方程,其数值求解代价小于前述二维方程组。得到 α_i 后,扭杆力矩 M_i^{tb} 的值可以依据本构方程(6)求出。

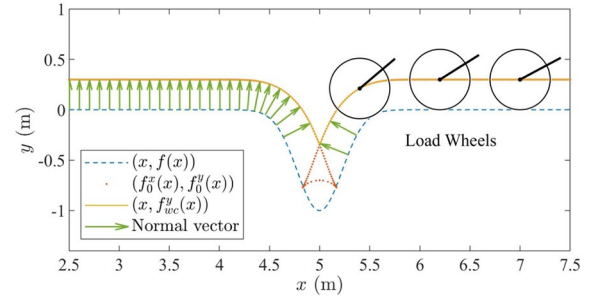


图3 名义轮心轨迹示意图

Fig. 3 Diagram of the nominal wheel center trajectory

负重轮的质量通常远小于车辆的质量,由于路面支持力需要负担车体自重,其值通常要远大于扭杆的角加速度项 $J_w(\ddot{\alpha}_i + \ddot{\psi})$ 引起的惯性力,因此该项在式(5)当中也可以忽略。于是,扭杆动力学方程退化为

$$M_i^{\text{tb}} + M_i^G + M_i^s + M_i^{\text{tk}} = 0 \quad (19)$$

在给定构型时,方程中的扭杆力矩 M_i^{tb} 和负重轮重力矩 M_i^G 均已知,路面力矩 M_i^s 依赖于支持力 F_{N_i} 的大小,履带张力力矩 M_i^{tk} 同样依赖于支持力 F_{N_i} 的大小。因此,联立方程(3)、(12)、(13)与(19),可以同时解得履带张力 T_i 与路面支持力 F_{N_i} 。进而可以代入到方程(1)、(2)中,得到当前车体平面运动的加速度。

上述讨论给出了当车轮与路面之间存在接触时路面支持力和扭杆转角自由度的求解方法,但在履带车辆运行在某些路面下,例如越过沟壑时,负重轮存在脱离地面的行为。当负重轮 i 悬空时,无法再通过路面约束的方式将扭杆转角自由度 α_i 消去。此时由于负重轮—平衡肘—扭杆结构只受到扭杆力和自身重力的影响,可以直接得到地面接触力 $F_{N_i} = 0$ 。其动力学方程退化为

$$J_w \ddot{\alpha}_i = M_i^{\text{tb}} + M_i^{\text{tk}} + M_i^G \quad (20)$$

其中扭杆扭矩 M_i^{tb} 、重力力矩 M_i^G 均已求出,在求解履带张力时,只需将接触地面的轮子的对应方程(19)替换为 $F_{N_i} = 0$,即可以按照前述方法得到所有履带张力 T_i 和张力力矩 M_i^{tk} ,进而可以求得此时平衡肘的角加速度。

在仿真过程中,对每一个负重轮的扭杆自由度均可以按照与地面接触或者不接触,选择相应的方式计算扭杆摆角以及给车体提供的支持力。最后,只需要给出轮子在接触和不接触这两种状态之间的切换规律即可。当某一负重轮处于与地面接触的状态时,存在两种可能性使其转为不接触状态。第

一个是利用扭杆位置和名义轮心轨迹求解扭杆摆角时,如果运动学上的解不存在,说明负重轮绕扭杆旋转到任何位置都无法碰到地面,则轮子此时应当进入不接触状态;第二个是虽然存在运动学上的解,但计算得到的路面支持力 $F_{N_i} < 0$,由于路面不能提供拉力,这说明轮子已经脱离地面,进入不接触状态.当轮子按照不接触状态进行计算时,可以通过角加速度积分的方式获得下一时刻扭杆转角.如果该扭杆转角对应的轮心位置低于名义轮心轨迹,则说明负重轮与地面发生了接触,重新进入接触状态当中.在仿真的每一个时间步中,当检测到轮地接触状态发生改变时,应当按照变化后的接触状态的扭杆动力学重新计算扭杆摆角的运动行为.

于是,经过路面约束约化的履带车辆动力学模型包括车体二维动力学方程(1)、(2),负重轮的扭杆本构方程(6),重力力矩方程(7),路面力矩方程(11)和履带张力力矩方程(14),履带约化成的弹性带的张力方程(3)、(12)、(13),接触地面的负重轮的扭杆摆角约束方程(18)以及从约束中求路面力的方程(19),悬空负重轮的扭杆摆角动力学方程(20),以及负重轮悬空状态的切换规则.这其中,与地面存在接触的负重轮扭杆摆角的约束方程依赖于通过方程(14)、(16)、(17)预先计算得到的名义轮心轨迹.

2 仿真结果对比分析

基于本文提出的履带车辆数值计算方法,对履带车辆在不同频率的正弦路面下进行了仿真.路面函数表达式为:

$$f(x) = A \sin(2\pi\omega x) \tag{21}$$

其中 $A=0.05\text{ m}$ 为振幅, ω 为路面空间频率.车辆参数如表 1 所示.仿真中所使用的履带车辆几何参数与动力学参数也均在表 1 中列出.

图 4 展示了路面频率 $\omega=0.15\text{ m}^{-1}$,车速 $v=60\text{ km/h}$ 下,车体竖直位移 y_c 以及俯仰角 ϕ 在 4 s 内的振动响应.图 5 展示了 30 km/h 和 60 km/h 两个不同车速下的车体竖直方向振幅随路面频率的变化关系.从图中可知,在路面频率 $0.1\sim0.3\text{ m}^{-1}$ 之间,车体的竖直方向振幅较大,在其他频率上振幅较小.仿真中扭杆 1 和 6 的安装距离为 4.2 m,对应的空间频率为 $\omega_0=0.238\text{ m}^{-1}$,与仿真得到的振幅较大的路面频率区间一致.因此,车体较大的

竖直方向振幅可能是由于路面激励的周期和车体长度相匹配,因此产生了较大的激振效果.

为了验证约化模型的性能,在车速 $v=30\text{ km/h}$,路面频率 ω 为 0.05 m^{-1} 、 0.2 m^{-1} 、 0.5 m^{-1} 的工况下进行了仿真,并与传统多体动力学仿真算法的结果进行比较,结果如表 2 所示.仿真发现,约化模型和传统算法均表现出了在接近车体长度的空间频

表 1 履带车参数
Table 1 Parameters of the tracked vehicle

Parameter	Symbol	Value
Coordinate of torsion bar 1	r_{CB_1}	(−2.1 m, −0.77 m)
Coordinate of torsion bar 2	r_{CB_2}	(−1.36 m, −0.77 m)
Coordinate of torsion bar 3	r_{CB_3}	(−0.66 m, −0.77 m)
Coordinate of torsion bar 4	r_{CB_4}	(−0.22 m, −0.77 m)
Coordinate of torsion bar 5	r_{CB_5}	(1.15 m, −0.77 m)
Coordinate of torsion bar 6	r_{CB_6}	(2.1 m, −0.77 m)
Coordinate of the sprocket	r_{CW_7}	(−2.7 m, −0.77 m)
Coordinate of the idler	r_{CW_8}	(3 m, −0.31 m)
Chasis mass	m_{chs}	7800 kg
Chasis moment of inertia	J_ϕ	31 000 kgm ³
Load wheel mass	m_w	190 kg
Sprocket mass	m_{spr}	370 kg
Idler mass	m_{idr}	190 kg
Balance elbow length	l_e	0.46 m
Load wheel radius	R_w	0.3 m
Sprocket radius	R_{spr}	0.216 m
Vertical damping coefficient	c_x	100 kg/s
Horizontal damping coefficient	c_y	5000 kg/s
Pitch damping coefficient	c_ϕ	30 000 kgm ² /s
Track stiffness	K_{es}	800 000 N
Road friction coefficient	μ	0.5
Idler friction moment	M_{idr}	10 Nm
Torsion bar stiffness	K_{tb}	160 000 Nm/rad
Torsion bar damping coefficient	c_{tb}	5000 Nms/rad

表 2 模型验证
Table 2 Model validation

	Amplitude/m	Time/s
Reduced model ($\omega=0.05\text{ m}^{-1}$)	0.1	58
Traditional algorithm ($\omega=0.05\text{ m}^{-1}$)	0.17	280
Reduced model ($\omega=0.02\text{ m}^{-1}$)	0.37	59
Traditional algorithm ($\omega=0.02\text{ m}^{-1}$)	0.45	275
Reduced model ($\omega=0.5\text{ m}^{-1}$)	0.07	61
Traditional algorithm ($\omega=0.5\text{ m}^{-1}$)	0.13	291

率上竖直方向振动幅度增大的特性,两者具有较好的一致性,并且约化模型在仿真时间上具有显著的优势.

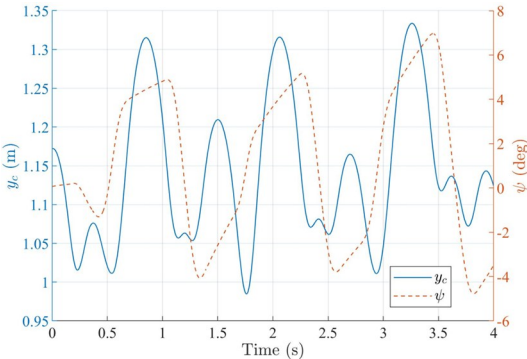


图4 车体时域振动响应
Fig. 4 Vibration response of the tracked vehicle

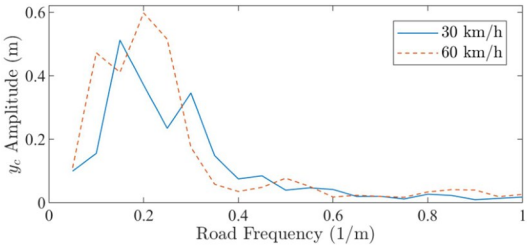


图5 不同路面频率下的车体竖直方向振幅
Fig. 5 Amplitude of the vertical vibration of the vehicle under different road frequencies

2.1 通过性分析

为了展示所提出的约化模型对履带车辆通过性的验证能力,我们使用相同的履带车辆参数,在坑洞路面上以 10 km/h 和 30 km/h 两种速度进行了仿真. 选取的深坑路面的路面函数为

f(x)=Ae^(-(x-x_0)^2/σ) (22)

其中 $A=2\text{ m}$ 为坑的深度, $\sigma=0.5\text{ m}^2$ 为影响坑宽度的参数, x_0 为坑洞位置. 图 6 和图 7 分别展示了这两个车速下履带车辆越过坑洞时的仿真图像,图 8 对比了两个速度下车在过坑时竖直方向 y_c 的振动响应. 这三张图显示,在 30 km/h 的较高速度下,履带车辆过坑时具有更小的竖直振幅响应和更

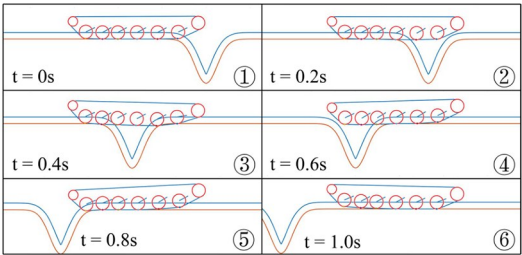


图7 30 km/h 下的过坑仿真快照
Fig. 7 Snapshot of pothole-crossing at 30 km/h

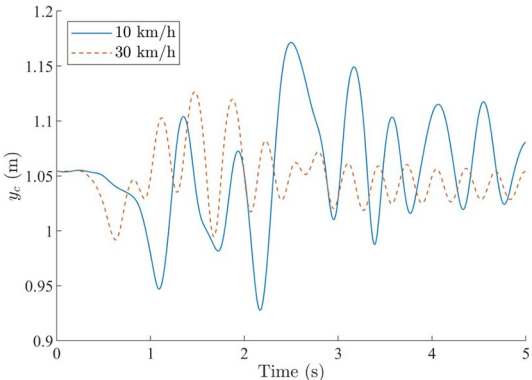


图8 越过坑洞时的振幅
Fig. 8 Amplitude ofduring pit-crossing

小的俯仰角变化. 这是因为当车辆速度较高时,履带车辆可以在更短的时间内飞跃坑洞,重力引起的下坠对车体影响更小.

3 结论

本文提出了一种嵌入了路面约束的履带车辆二维约化动力学模型,减少了模型自由度数量,降低了由车轮与路面接触碰撞带来的计算复杂度. 约化模型针对连续可微路面函数和车轮半径,可离线地预先计算一条名义轮心轨迹,并将负重轮与地面的接触通过负重轮轮心落在名义轮心轨迹上的约束代替,从而消去了负重轮的扭杆转角自由度. 这一轨迹可以用于不同车辆参数和行驶速度下的履带车辆仿真,而无需重复计算. 仿真表明,和前后两端的负重轮间距倒数相近的低频路面激励会使得履带车辆产生幅值较大的竖直方向受激振动. 同时,本文还基于负重轮受到的路面支持力的符号以及轮心位置给出了车轮与地面是否接触的判断方式,使得模型具有模拟复杂路面上履带车辆通过性的能力.

参考文献

[1] 李欣业, 张华彪, 郭晓强. 工程中的振动问题的研

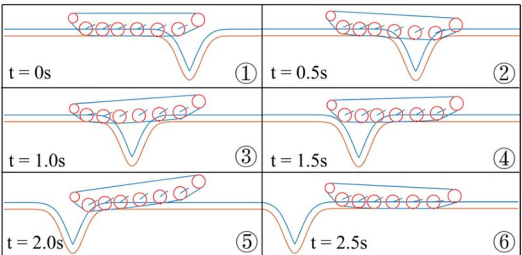


图6 10 km/h 下的过坑仿真快照
Fig. 6 Snapshot of pothole-crossing at 10 km/h

- 究进展[J]. 动力学与控制学报, 2022, 20(6): 1—9.
- LI X Y, ZHANG H B, GUO X Q. Research progress of vibration problems in engineering [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(6): 1—9. (in Chinese)
- [2] PECKA M, ZIMMERMANN K, SVOBODA T. Fast simulation of vehicles with non-deformable tracks [C]//2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). New York: IEEE, 2017: 6414—6419.
- [3] RYU H S, BAE D S, CHOI J H, et al. A compliant track link model for high-speed, high-mobility tracked vehicles [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 48(10): 1481—1502.
- [4] CHOI J H, LEE H C, SHABANA A A. Spatial dynamics of multibody tracked vehicles part I: spatial equations of motion [J]. Vehicle System Dynamics, 1998, 29(1): 27—49.
- [5] WANG P X, RUI X T, YU H L. Study on dynamic track tension control for high-speed tracked vehicles [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 132: 277—292.
- [6] 吴锐, 于会龙, 董昊天, 等. 履带式特种车辆精细化动力学建模与仿真[J]. 兵工学报, 2024, 45(5): 1384—1401.
- WU R, YU H L, DONG H T, et al. Refined dynamics modeling and simulation of special tracked vehicles [J]. Acta Armamentarii, 2024, 45(5): 1384—1401. (in Chinese)
- [7] 孟磊, 李晓雷, 邱实, 等. 履带对履带车辆车体振动影响的分析[J]. 车辆与动力技术, 2015(4): 1—5, 41.
- MENG L, LI X L, QIU S, et al. Influence analysis of tracks on body vibration for a tracked vehicle [J]. Vehicle & Power Technology, 2015(4): 1—5, 41. (in Chinese)
- [8] CHEN B Y, SUN X C, ZHENG K F, et al. A rigid flexible coupling dynamics simulation of one type of tracked vehicle based on the RecurDyn [C]//2017 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA). New York: IEEE, 2017: 711—716.
- [9] 韩宝坤, 李晓雷, 孙逢春. 高速履带车辆平稳性能模型与仿真[J]. 计算机仿真, 2003, 20(2): 107—108, 58—59.
- HAN B K, LI X L, SUN F C. Modeling and simulation of high speed tracked vehicles [J]. Computer Simulation, 2003, 20(2): 107—108, 58—59. (in Chinese)
- [10] 李春明, 吴维, 郭智蓄, 等. 履带车辆纵向与垂向耦合动力学模型及功率特性[J]. 兵工学报, 2021, 42(3): 449—458.
- LI C M, WU W, GUO Z Q, et al. Longitudinal and vertical coupled dynamic model and power characteristics of tracked vehicle [J]. Acta Armamentarii, 2021, 42(3): 449—458. (in Chinese)
- [11] 王克运, 张相洪, 史力晨, 等. 履带车辆越障过程的动力学仿真[J]. 兵工学报, 2005, 26(5): 577—583.
- WANG K Y, ZHANG X H, SHI L C, et al. Dynamic simulation of tracked vehicle across obstacle [J]. Acta Armamentarii, 2005, 26(5): 577—583. (in Chinese)
- [12] DHIR A, SANKAR S. Analytical track models for ride dynamic simulation of tracked vehicles [J]. Journal of Terramechanics, 1994, 31(2): 107—138.
- [13] SANDU C, FREEMAN J S. Military tracked vehicle model. Part I: multibody dynamics formulation [J]. International Journal of Vehicle Systems Modelling and Testing, 2005, 1(1/2/3): 48.
- [14] LI Y L, TANG C. Research on coupled dynamic model of tracked vehicles and its solving method [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015(1): 293125.
- [15] 刘好, 谢锐, 张拓, 等. 履带车辆软坡地面力学建模及行驶性能分析[J]. 机械设计, 2021, 38(3): 110—118.
- LIU Y, XIE N, ZHANG T, et al. Ground mechanic modeling and analysis on driving performance of tracked vehicles on the soft slope road [J]. Journal of Machine Design, 2021, 38(3): 110—118. (in Chinese)
- [16] MARQUES F, FLORES P, PIMENTA CLARO J C, et al. A survey and comparison of several friction force models for dynamic analysis of multibody mechanical systems [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 86(3): 1407—1443.
- [17] 尹忠俊, 陈兵, 顾亮, 等. 基于多体理论的履带车辆半主动悬挂仿真研究[J]. 系统仿真学报, 2006, 18(2): 286—289, 305.
- YIN Z J, CHEN B, GU L, et al. Simulation re-

- search of semi-active suspension system of tracked vehicles based on multi-body dynamics theory [J]. Journal of System Simulation, 2006, 18(2): 286—289, 305. (in Chinese)
- [18] 桑瑞涓, 龚坚, 路宽, 等. 高维非线性动力系统降维理论综述[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(9): 1—15.
- SANG R J, GONG J, LU K, et al. Dimension reduction theory review of high-dimensional nonlinear dynamical systems [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(9): 1—15. (in Chinese)