

基于全局模态理论的柔性组合结构非线性动力学 建模与模型降阶研究进展^{*}

曹登庆^{1,2†} 曹或腾³ 宋救淘⁴ 魏进⁵ 何贵勤⁶ 方波¹

(1. 哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001) (2. 山东理工大学 数学与统计学院, 淄博 255000)
(3. 北京信息科技大学 机电工程学院, 北京 102206) (4. 江苏大学 土木工程与力学学院, 镇江 212013)
(5. 烟台大学 机电汽车工程学院, 烟台 264005) (6. 北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100191)

摘要 在工程结构设计中,理论建模是确保结构具备安全、持续与稳定运行能力的关键步骤,尤其是在动力学特性分析中不可或缺。组合结构的动力学模型通常需要降阶处理,以便进行非线性动力学分析和控制器设计。传统基于单一部件模态函数的动力学模型在经典静定边界条件下构建,结果与整体结构模态存在显著差异。全局模态理论能够揭示刚性与柔性结构运动间的耦合效应,提供准确反映组合结构振动的整体模态。本文综述了近年来全局模态方法在索、梁、板等组合结构动力学模型降阶问题中的研究进展,主要介绍基于笛卡尔和拉格朗日坐标系的多刚柔体系统全局模态求解方法;通过多梁刚性连接、索-梁组合、刚柔耦合航天器等实例,阐述全局模态方法在复杂组合结构固有特性分析中的应用。多项研究结果表明,全局模态方法不仅克服了传统方法对模态形式与数量的依赖,还在揭示复杂动力学现象及优化结构设计和振动控制中展现了显著优势。

关键词 组合结构, 模型降阶, 模态分析, 全局模态, 动力学特性

中图分类号: O322

文献标志码: A

Research Progress for Nonlinear Dynamics Modeling and Model Reduction of Flexible Composite Structures Based on Global Modal Theory^{*}

Cao Dengqing^{1,2†} Cao Yuteng³ Song Mitao⁴ Wei Jin⁵ He Guiqin⁶ Fang Bo¹

(1. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

(2. School of Mathematics and Statistics, Shandong University of Technology, Zibo 255000, China)

(3. College of Mechanical and Electrical Engineering, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 102206, China)

(4. School of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

(5. School of Mechanical and Electrical Automotive Engineering, Yantai University, Yantai 264005, China)

(6. School of Astronautics, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract The theoretical modeling is the critical step to ensure the safe, sustainable and stable operation of the engineering structure in the design phase, especially in the dynamical characteristics analysis. The reduced order procedure of the composite structure's dynamical model is required so as to nonlinear dynamic analysis and controller design. However, the traditional dynamical model that established by the modal function of a single component is based on the classical statically indeterminate boundary conditions. There exists the significantly difference compared with the modes obtained by the whole struc-

2024-11-13 收到第 1 稿, 2024-12-17 收到修改稿。

^{*} 国家自然科学基金资助项目(10772056, 11732005, 12372004, 12002058, 11302087, 12002298), National Natural Science Foundation of China (10772056, 11732005, 12372004, 12002058, 11302087, 12002298).

[†] 通信作者 E-mail: dqcao@hit.edu.cn

ture. The global mode theory can reveal the coupling effect between rigid motion and flexible deformation of the structure, and provides the global mode that can accurately reflect the vibration of the combined structure. In this paper, the research progress of the global modal method in the reduced order for the combined structure dynamic model such as cables, beams and plates in recent years is given. The solving method for the global mode method of the multi-rigid-flexible coupling system based on the Cartesian and Lagrange coordinate is mainly focused. The application of the global modal method in the analysis of natural characteristics of the complex combined structure is illustrated by the examples such as the multi-beam rigid connection, cable-beam combination and rigid-flexible coupling spacecraft. Multiple research results show that the global mode method not only overcomes the dependence on the mode form and quantity of the traditional method, but also shows the prominent advantage in revealing complex dynamic phenomena, optimizing structural design and vibration control.

Key words composite structure, model reduced, modal analysis, global mode, dynamical characteristics

引言

制造业是国民经济的支柱产业,也是推动工业化和现代化进程的关键力量. 结构设计为制造业的发展提供了重要的理论支撑,伴随着结构部件的大型化和柔性化趋势,柔性结构的动力学建模、振动响应分析及其振动控制等问题变得愈加复杂和具有挑战性^[1]. 随着我国工业化进程的不断推进,先进高端设备的需求日益增长. 无论是用于国防军工的大型柔性航天器[图 1(a)]和带外挂的细长机翼[图 1(b)],还是与生产生活密切相关的细长风机叶片[图 1(c)]和大跨度斜拉桥[图 1(d)],这些高端精密设备和大型柔性工程结构在外激励下往往表现出复杂的动力学行为,进而对部件的力学性能提出了极高的要求. 部件的力学性能直接关系到整

个装备的安全与稳定运行,并对工程项目的顺利实施产生重要影响.

在理论研究阶段,复杂的工程结构通常简化为由刚体和柔性部件组成的多刚—柔体系统. 通过将索、梁、板、壳等柔性部件与忽略弹性变形的刚体联接,构建多体系统,是解决组合结构动力学问题的常用等效方法. 从数学角度看,每个柔性部件都是具有无限自由度的分布参数系统,其动力学方程通常为包含时间和空间变量的偏微分方程,这些方程在多数情况下难以获取解析解. 对于组合结构,在外激励下,其动力学行为通常表现出典型的非线性特征. 当前工程结构设计大多基于成熟的线性振动理论,采用低阶的离散方法进行建模,导致各类工程问题频发,减振措施失效^[2]. 无论是系统的动力学特性分析,还是基于状态空间的控制器设计,都必须依赖于有限自由度的动力学模型. 如何构建能够准确描述结构特性的低阶动力学模型,成为一项具有挑战性的研究课题. 因此,迫切需要搭建一条从理论上无限自由度的复杂结构到工程应用中有限自由度、可求解的简化模型的桥梁.

构成组合结构的部件多为具有无限自由度的柔性体,描述其运动的动力学方程为偏微分方程. 动力学分析或控制器设计需要基于有限自由度的常微分方程组模型. 因此需要对柔性部件的动力学方程进行降阶处理. 工程上动力学分析通常采用有限元方法将连续体结构离散化. 有限元方法利用弹性单元、刚性节点、载荷节点来描述系统的模型质量、刚度、阻尼特性和外部载荷. 对于复杂机械系统,有限元法的实质是把无限多自由度的连续体离



图 1 国防工业生产生活中的组合结构
Fig. 1 Combined structures in the national defense, industry, production and life

散为有限自由度的单元体进行数值求解. 例如, 中心刚体—柔性梁的刚柔耦合结构, 其旋转时伴随产生的动力刚化现象是结构设计阶段不可回避的问题^[3]. 蔡国平和洪嘉振等采用有限元法建立模型, 并对比研究了系统零次近似、一次近似模型在不同转速下的有效性和适用性^[4]. 刘锦阳等考虑了大范围空间运动的刚柔耦合动力学问题, 用速度变分原理建立方程并用有限元离散, 给出扭转变形和截面转动惯量对系统动力学特性的影响^[5]. 和兴锁等研究了大范围运动的空间柔性梁的动力学建模方法, 在有限元离散模型的基础上采用拉格朗日方程建立精确的动力学方程^[6]. 孙禹晗等基于有限元法构建了旋翼直升机的桨叶结构, 利用不同模态参数进行损伤识别研究^[7]. 总体而言, 有限元离散模型精度较高, 在一定程度上能够解决组合结构动力学模型降阶的问题. 但为了保证高精度, 其网格划分也应足够精细, 这会导致模型具有大量的自由度, 使得求解过程不可避免地牺牲了运算效率, 在考虑系统的非线性特性时尤其如此. 有限元方法目前拥有较为成熟的商业软件, 可以通过计算机强大的运算存储能力克服高维计算的困难. 但是有限元软件的结果以数值形式给出, 没有明确的解析表达式, 无法针对结构的非线性特征给出定量的分析, 也就无法从原理上解释清楚部件间力与力矩的传递机理, 为系统的参数调节、非线性动态响应分析和控制器设计带来了困难.

区别于有限元方法, 基于解析模态的离散方法能够将模型降阶到几十甚至几个自由度的同时仍然保持较高的精度, 并且显著提高运算效率^[8]. 模态离散方法的核心思想在于将连续体位移用在与空间相关的模态函数和与时间相关的模态坐标的乘积描述, 并表示为所截取模态的线性组合. 假设模态法是较为常用的模态离散方法, 弹性变形是由无限多简谐形函数和时间函数的乘积来描述, 而前几阶模态占主导地位, 因此截断为有限数目的模态函数包括空间特征函数和时间加权函数. 假设模态法仅要求满足全部或部分边界条件, 而不要求一定满足动力学方程, 因此使用起来较为简便. 如前文提到的考虑一次近似问题的旋转柔性结构^[4], 应用假设模态法只需要较少的模态数目便可以得到简洁的表达形式, 更便于控制器设计^[9]. 张晓宇等将柔性连杆机械臂柔性关节简化为刚性关节和柔性

连杆的弹性约束边界, 基于假设模态法建立了系统的刚柔耦合动力学方程并设计控制器^[10]. 蒋建平和李东旭^[11]考虑太阳翼的非线性变形耦合项, 使用假设模态离散太阳翼变形, 建立了带有太阳翼的航天器的一次近似刚柔耦合动力学模型. 胡庆雷和马广富采用假设模态法建立了航天器的“中心刚体+梁”的动力学模型, 并基于此模型开展了一系列关于航天器姿态机动与振动控制的方法研究^[12-15]. 丁虎团队^[16]利用假设模态离散具有弹性支承的梁并对其在轴向激励下的稳定性进行分析, 获得了结构的参激稳定边界. Azadi 等^[17]研究了在轨运行的小型柔性航天器姿态控制和振动抑制问题, 同时考虑了轨道机动对姿态的影响, 其动力学模型同样采用假设模态方法离散. 但其并未针对机动过程中的刚柔耦合效应进行处理, 而是对姿态机动结束后的残余振动进行抑制. 在计算过程中, 这样的考虑可以将方程中与刚体运动相关的项去除. 虽然一定程度上简化了分析, 但是这样的处理方法并不能完全描述姿态机动过程中的刚柔耦合效应.

对于组合结构而言, 其动力学模型的自由度多且方程阶数高, 对整体结构采用假设模态法建模难以实现. 按照有限元方法的思想, 根据结构特点将其划分为若干子结构, 对各子结构离散后进行模态分析, 按某种原则得到能恰当描述整个结构的假设模态, 再求解整个结构的振动, 称为“模态组合法”. 其基本思想是通过子结构的界面连接条件, 消去非独立的模态坐标, 得到一组用独立的各子结构模态坐标描述整个结构运动的独立广义坐标. 模态组合法被广泛应用于求解复杂组合结构, 赵楚楚和陈立群^[18]针对振动力学教材中的两端固定直角梁进行分析, 为振动力学教学内容进行补充和澄清. 谭星等^[19]针对局部非线性系统提出自由界面子结构模态组合法, 构造出用于降阶的缩减模态集, 利用界面协调关系进行了子结构模型的降阶综合. 张勇等^[20]考虑螺栓结构中的不确定性, 推导出了适用于螺栓组合结构弹性交界面的高精度模态组合法, 在较少子结构模态参与的情形下, 同样保证了良好的模型更新结果. 王强等^[21]对含间隙的折叠舵面非线性动力学特性进行分析, 根据结构特性建立有限元模型, 并采用双协调自由界面模态组合法对折叠舵面的有限元模型进行降阶, 计算结果与实验结果吻合良好. 魏莎团队^[22]研究了对接圆柱壳的模态特

性,并采用最小二乘复频域法进行了实验模态分析。

针对细长柔性组合结构的模型离散集中质量方法可以看作是有限元法和假设模态法的结合。用若干离散节点上的集中质量代替原来系统中的分布质量,即全部质量都集中到各节点上,刚度矩阵和质量矩阵可以直接通过离散节点得到。集中质量法的另一种形式为有限段法,将细长结构分为有限个刚体,用弹簧和相应的阻尼把各个刚体连接起来,使细长结构的整体呈现柔性。有限段法与有限元方法的本质区别在于本构关系的不同。有限段法是建立在小应变的基础上,产生的变形可以是几何非线性的,而有限元法必须要满足小变形假设,即小变形看作是线性的,也就不能满足系统产生几何非线性变形的要求。有限段方法可以描述时变的多柔体系统,而有限元方法分析的是时不变系统,即固定的结构而非机构。与有限元法和假设模态法相比,集中质量法不需要刚度和质量单元以及模态特征函数,所以它并不像有限元法和假设模态法繁琐,但也因此并不适合用于具有柔性和复杂几何形状的系统。

通过模态离散得到的系统动力学模型的优劣取决于所选取的模态的优劣,即所用的模态能在多大程度上准确地描述柔性构件的真实变形^[23]。从上面的分析可以看出,模态综合法和集中质量法的应用仍然离不开假设模态,而假设模态方法对模型的计算精度有限,特别依赖于截取模态的真实性和个数。所选模态越能准确地描述柔性部件的真实变形,其需要的模态数量就越少,同时所推导出的动力学模型的准确性也越高。对于组合结构,通常针对部件分别截取各自的假设模态描述自身变形,难以做到各结构的统一。如何选择适当的模态特征函数仍然是有待深入研究的课题。潘科琪和刘锦阳^[24]在研究柔性多体结构形函数和边界条件的选择时得出结论:使用静定边界条件(如两端自由、悬臂边界和简支边界等)的柔性构件模态所建立的系统动力学方程可以得到正确的结果,而使用超静定边界(如两端固支)的模态则可能导致计算结果出现严重误差。近年来,学者们在使用假设模态时采用各种方法以提升计算精度。Schwertassek 等^[25]通过柔性构件的静变形模态和特征函数结合,构造振型函数用于离散柔体的变形,提高系统动力学模型的准确性和收敛性,实现了用较少模态得到较准确结果的效果。丛云跃

等^[26]研究索梁复合结构受轴向载荷下的非线性动力学特性,采用 Galerkin 方法得到了简化二自由度系统,模态解析结果和数值结果表现出令人满意的一致性。康厚军等进一步提出了一种基于微扰理论的模态截断方法,在离散化过程中对模态进行摄动处理,与传统的 Galerkin 方法相比,显著减小了模态截断误差^[27]。安阳和王天舒^[28]基于虚功原理与混合坐标法,建立了弹性飞行器的飞行动力学模型,给出了耦合系数与模态质量的修正项,分析了动力学模型及动量公式中弹性变形项的保留阶次对动力学响应及动量计算精度的影响。

综上所述,现有的解析方法在处理复杂组合结构动力学建模时遭遇到了以下困境:(1). 现有解析建模方法仅适用于规则形体,对于工程中常见的复杂结构,如何简化与等效是亟待解决的问题;(2). 现有解析方法仅适用于单一结构如索、梁、板、壳,尚无处理组合结构的一般方法;(3). 假设模态法处理组合结构时,由于各部件之间相互关联,难以满足所有几何边界条件,更难以满足力边界条件,无法表征系统各部件之间的动力学耦合特性,因此合理性和准确性存疑,处理非线性问题时更是如此;(4). 模态综合法可用于建立组合结构的动力学模型,但仍存在一定的缺陷,如构件较多导致自由度太大,使得模型的精度存在问题。因此,需要提出一种解析方法能够用较少的自由度精确表征组合结构各部件的弹性变形并能准确反映各部件的真实运动,为动力学分析和控制器设计提供合理的低维模型。针对现有研究困境,曹登庆课题组提出并发展了全局模态概念,在组合结构动力学建模和振动控制领域取得了显著进展。

1 全局模态基本概念与理论框架

复杂柔性结构可以看作是多个刚体和柔性体构成的多体系统,多部件之间通过刚性或弹性部件连接。系统中各个部件之间没有大范围的相对运动。由于相邻物体的作用,使得结构中变形体的运动可以分解为相邻物体的运动和变形体自身的弹性变形。以常见于旋转柔性机械臂^[29,30]和航天器姿态运动研究^[13,14]中的经典模型“中心刚体+柔性梁/板”为例,悬臂梁函数或者其他满足柔性构件几何边界的解析表达式常被用来直接描述柔性附件的振动,也即所选取的仅是单独柔性构件的假设

模态. 这样的振动模态由于其只表达了柔性附件的振动不考虑中心体平台的运动, 因此被称为“约束模态”^[31]. 对于“中心刚体+梁/板”的简单模型, 采用静定边界条件能取得正确的结果, 而对于复杂结构的混合静定条件则会出现较大误差. 事实上, 在一个柔性多体系统中, 某一柔性构件的弹性变形必然受到系统中其他结构的影响. 特别对于航天器这样由不考虑变形的中心体平台和考虑较大变形的弹性太阳能帆板的组合结构, 则表现出较为明显的刚柔耦合效应. 学者们通常采用混合坐标的方式处理刚柔耦合问题, Di Gennaro^[32]研究了装有柔性杆件的航天器, 基于混合坐标方法建立起结构的动力学模型, 再用假设模态离散动力学方程. 胡庆雷和马广富的诸多工作均基于混合坐标法建立动力学模型, 其中柔性附件采用悬臂梁的模式函数. 基于此离散模型, 随后提出了一系列控制方案用于姿态机动和振动抑制^[13,14,33].

然而, 上述文献提到的两端自由、悬臂边界或者简支边界下的梁模态以及采用其他方式构建的模式函数, 均用于描述组合结构的单个部件, 而无法准确地反映系统的整体模态. 工程中组合结构的尺寸增大、重量减轻, 使得系统的刚度和基频大幅降低, 部件之间的振动耦合效应显著增强. 采用部件级模态建模可能会导致其动力学模型准确度下降, 甚至出现较为严重的误差.

为满足实际需要, 妥当的做法应该是选用系统的整体模态, 即包括系统刚体运动和全部柔性部件弹性振动的模态. 在此之前, 已有学者采用数值方式获取全局模态的初步探索. 郭翔鹰团队^[34,35]针对 Z 型折叠机翼的非线性动力学特性进行研究, 并依托有限元法获取三折叠板整体横向振动的模式函数. Hablani^[36]通过航天器系统的有限元模型得到结构的整体模态, 并根据模态截断方法采集低阶模态离散柔性体. Jin^[37,38]利用 ABAQUS 软件建立由柔性杆和薄膜构成的太阳帆航天器的有限元模型, 再利用全局广义坐标得到结构的低阶离散模型. 尽管以上基于有限元模型的方法很容易获取全局模态, 但得到的结果并不是解析的, 难以直接利用这些模态计算系统的动力学响应和设计控制器.

模态离散的优越性在越复杂的结构中越能有所体现. 以建筑结构中常见的斜拉桥为例, 如图 2 所示, 包含拉索 c_i ($i=1,2,3,4$), 桥面梁 AB 和刚

性塔 C 与 D . 作为经典的索—梁组合结构, 索本身的柔性或在各种激励下所能表现出的动力学行为较为复杂, 使得斜拉桥的动力学行为远比单根拉索或多梁结构丰富, 比如多索—单梁耦合结构易出现模态局部化问题等^[39]. 学者们在解决斜拉桥非线性动力学特性问题时, 曾尝试过使用全局模态. Gattulli^[40]为获取悬索斜拉桥的面内非线性动力学行为, 采用了模态离散的方式获取结构的 $1:2$ 和 $2:1$ 全局内共振特性. 赵跃宇^[41]通过传递矩阵的方式得到了索—梁组合结构的变截面自由振动特性. 於祖庆等^[42]研究了塔式起重机刚柔耦合多体系统建模方法, 通过将钢丝绳的动力学方程线性化以实现模态降阶策略. 王志骞等^[43]采用分段函数的方式得到了索—梁组合结构的精确模态, 基于模态离散模型研究了结构的非线性动力学特性. 康厚军团队^[44]建立索—梁的有限元模型, 研究斜拉桥的振动问题, 发现结构振动表现出全局模态、局部模态和混合模态的现象. 进一步探讨了采用不同方法获取的索—梁结构模态的正交性问题, 通过比较各种模态分析法的优劣, 发现非正交耦合项对非线性动力学行为有较大影响. 并指出目前关于斜拉桥的研究难点在于短斜拉索两端的边界条件和悬索吊杆边界条件的模拟^[45]. 此外, 模态综合法也是一种获取全局模态的途径, 但是这种基于已知函数的模态与假设模态方法类似, 得到的结果是近似且表达式复杂而难以利用^[46].

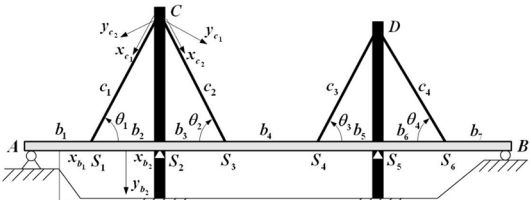


图 2 由四根拉索和双塔支撑的两端简支的斜拉桥示意图^[47]
Fig. 2 Schematic diagram of a simply supported cable-stayed bridge at both ends supported by four cables and twin towers^[47]

曹登庆等^[47]在研究悬索斜拉桥的动力学特性时, 首先提出了全局模态的概念. 将柔性部件的控制偏微分方程、拉索和梁段的节点匹配条件和边界条件相结合, 推导出表征系统全局模态的解析模态函数, 奠定了全局模态思想的基础. 文献^[47]给出了考虑平面运动的斜拉桥动力学偏微分方程组的推导过程. 动力学方程与斜拉桥在 A 、 B 、 C 、 D 处的边界条件和连结点, $S_1 \sim S_6$ 处的相容条件共同

构成了结构的边值问题。

解析结果和有限元 ABAQUS 方法得到的固有频率间相对误差和模态间的模态置信度 (MAC 值)列于表 1。从表中可知,前 30 阶模态对应的固有频率最大的相对误差值仅为 0.4401%,同时所有的 MAC 值都在 99.0000%以上,可见两种方法所得结果符合得非常好,说明全局模态方法对于较高阶的模态仍能保持很高的精度。

表 1 解析方法和有限元方法得到的固有频率的相对误差和模态间的 MAC 值^[47]
Table 1 The relative error of the natural frequency and the MAC value between the modes obtained by the analytical method and the finite element method^[47]

模态	$\frac{\omega_k - \omega_k^{ABA}}{\omega_k^{ABA}}$	MAC 值	模态	$\frac{\omega_k - \omega_k^{ABA}}{\omega_k^{ABA}}$	MAC 值
1	0.0528%	99.9998%	16	0.0637%	99.8581%
2	0.0290%	99.9996%	17	0.1486%	99.9320%
3	0.0174%	99.9993%	18	0.1520%	99.9299%
4	0.0072%	99.9985%	19	0.1415%	99.9267%
5	0.0736%	99.9769%	20	0.1823%	99.6482%
6	0.0278%	99.9530%	21	0.0238%	99.8668%
7	0.0310%	99.9267%	22	0.0679%	99.8935%
8	0.1186%	99.6755%	23	0.0666%	99.8940%
9	0.1416%	99.5502%	24	0.0641%	99.8934%
10	0.1471%	99.9453%	25	0.4254%	99.0317%
11	0.1246%	99.9087%	26	0.0462%	99.8259%
12	0.0900%	99.8627%	27	0.0462%	99.8358%
13	0.0877%	99.8521%	28	0.0462%	99.8359%
14	0.3494%	99.9780%	29	0.0462%	99.8360%
15	0.3526%	99.9438%	30	0.4401%	100.0000%

魏进等^[48]在研究单轴柔性机械臂动力学建模与轨迹跟踪时,将全局模态方法与假设模态方法进行了全面对比。发现假设模态法的收敛性严重依赖振动形式和模态数量,甚至可能出现假设模态数增加而计算准确性并未提高的情况。而全局模态模型维数更低且精度更高,基于全局模态离散模型的控制 器能在较短的时间内完成柔性机械臂轨迹跟踪仿真。完整系统地总结了应用全局模态推导动力学方程的一般性策略和步骤^[49]。借助混合坐标描述弹性体的位形,在弹性体上建立浮动坐标系,用浮动坐标系的位形坐标和弹性体的变形坐标建立系统的动力学方程。弹性体上任一点的位形被认为是浮动坐标系的运动与相对于该坐标系的弹性变形的叠加,并给出了在笛卡尔坐标和拉格朗日坐标下浮动坐标系运动的表述方法。对于笛卡尔坐标,各个浮动坐标系的位形都相对于一个公共参考系进行定义。对于拉格朗日坐标,单个浮动坐标系的位形需基于邻接物体的运动进行描述。根据浮动坐标

系位形描述方式的不同,可以得到不同的系统动力学方程,具体的方法可以参考文献[49]。

通过由全局模态离散得到的系统动力学模型,在保证精度的同时能大幅度缩减系统的自由度数,实现模型降阶,对于建立系统低维高精度的动力学模型和设计简单高效的控制律具有重要的意义。后文将通过多种组合结构来分析全局模态方法在模型降阶中的应用。

2 多梁组合结构全局模态提取方法

组合结构的动力学建模除了考虑必要的边界条件外,还必须考虑部件之间连接点的变形协调性和力学平衡性条件。以多梁(杆)组合结构为例,部件是细长杆件,杆件之间通过螺栓或焊接等方式紧密固定连接。各行各业技术发展推动着细长结构的运用朝着大型和微型两个极端方向发展,大到建筑结构中的桁架、航天器携带的网状天线,小到微电子机械系统。动力学问题主要涉及其在各种力的作

式的 L 型刚性组合梁^[52],如图 6 所示,其整体结构表现出明显的弯扭耦合变形.基于全局模态离散模型可以较为方便地设计能量收集装置.

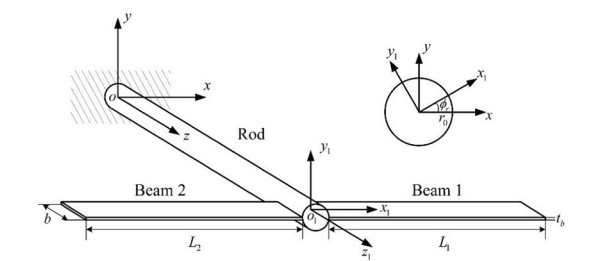


图 4 T 型多梁组合结构示意图^[51]
Fig. 4 Schematic diagram of T-shaped multi-beam composite structure^[51]

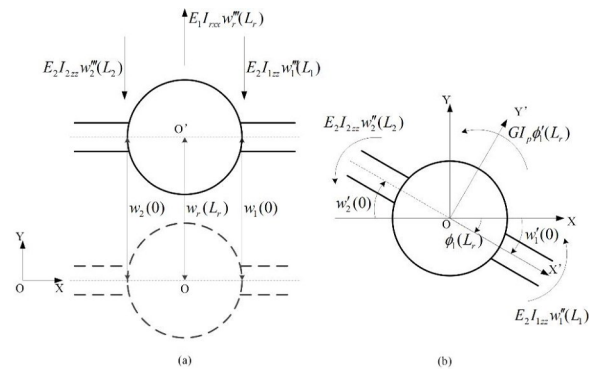


图 5 杆和梁连接处的匹配条件:(a)弯曲位移;(b)扭转位移^[51]
Fig. 5 Matching conditions at the connection of the rod and beam:
(a) Bending displacement; (b) Torsional displacement^[51]

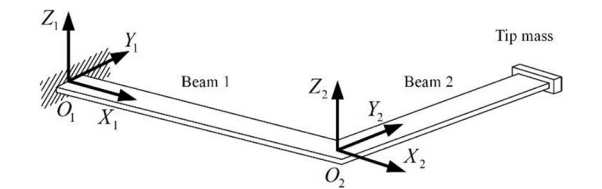


图 6 L 型梁结构示意图^[52]
Fig. 6 Schematic diagram of L-shaped beam structure^[52]

刚性多梁组合结构可见于安装有横向太阳翼的大型航天器,其中细长柔性太阳翼可以采用梁模型表征变形.航天器到达预定轨道位置,太阳翼展开并锁定,如图 7 所示.结构由中心体平台、柔性转轴和柔性梁共同构成多刚柔体耦合系统.文献^[53]应用全局模态的思想,给出了获取系统多刚柔体耦合模态的解析方法,从固有特性、参数变化对结构的影响和动力学响应等三方面分析了柔性太阳翼振动与中心体平台的姿态运动所呈现的强耦合现象.解析结果与有限元结果保持高度的一致性,但模态离散方法仅选取了不超过 10 阶的模态个数,为控制器设计提供了良好的便利.

大型航天器所携带的太阳能帆板并非简单的

单个梁结构,而是多个部件连接而成,其在发射阶段处于折叠状态,到达预定轨道后伸展锁定增大面积以吸收太阳能.魏进针对展开式太阳能帆板,将其看作多个柔性梁通过铰链连接形成的整体结构,研究了铰链非线性对结构动力学特性的影响^[54].

结构模型如图 8 所示,其中各梁段模型基于笛卡尔坐标系构建,第 i 个梁 b_i 的长度为 $2l_i$,单位长度的质量为 ρ_i ,弹性模量为 E_i ,截面惯性矩为 I_i . θ_i 描述第 i 个铰链的扭转变形的角位移.第 i 个坐标 $x_i y_i$ 固结在第 i 个梁 b_i 的中心.

由图 9 所示的铰链匹配关系,构建起第 j 个铰链 S_j 的匹配条件为

$$\begin{aligned} \omega_j(l_j, t) &= \omega_{j+1}(-l_{j+1}, t), \\ \omega'_j(l_j, t) + \theta_j &= \omega'_{j+1}(-l_{j+1}, t), \\ E_j I_j \omega'''_j(l_j, t) &= E_{j+1} I_{j+1} \omega'''_{j+1}(-l_{j+1}, t), \\ E_j I_j \omega''_j(l_j, t) &= M_j^T = E_{j+1} I_{j+1} \omega''_{j+1}(-l_{j+1}, t). \end{aligned} \tag{13}$$

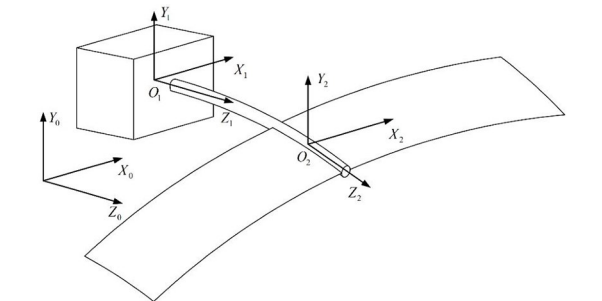


图 7 单侧装有柔性轴驱动太阳翼的航天器^[53]
Fig. 7 Spacecraft equipped with the driven solar array by the flexible shaft on one side^[53]

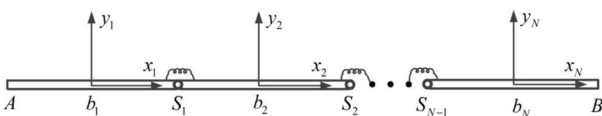


图 8 铰链连接的多梁结构^[54]
Fig. 8 The structure of the multi-beam connected by hinges^[54]

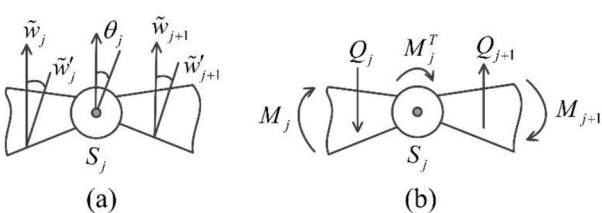


图 9 第 j 个铰链 S_j 的匹配条件:(a)几何条件;(b)自然条件^[54]
Fig. 9 The matching criteria of the j -th hinge S_j :
(a) Geometric conditions; (b) natural conditions

随后基于此多梁结构建立携带展开式太阳能帆板的航天器动力学模型,考虑铰链非线性因素(非线性刚度、阻尼和摩擦)对航天器姿态的影响^[55].结果反映出铰链摩擦力矩对抑制系统残余

振动,减少系统抖动,提高结构平稳性的重要作用.除太阳能帆板外,大型环形桁架天线的动力学等效建模、动力学特性及非线性动力学行为等也一直受到学者们的广泛关注^[56-59].刘梅^[60]采用能量等效法将复杂的环形多梁结构简化成铁木辛柯梁,并引入非线性应力应变关系,用极少的模态自由度达到了与有限元结果的高度一致性.吴轶^[61]根据多梁结构的建模思路,研究了含非线性铰链的环形桁架天线的动力学特性.等效简化后的环形桁架可以看作是首尾封闭的铰接环形多梁结构,如图 10(a)所示.经等效降维和全局模态离散,显著降低了环形桁架的自由度数,为开展非线性动力学分析提供了便利.方波^[62]提出了一种描述组合多梁空间运动的三维全局模态方法,获得了能反映大型环形天线三维空间运动的多部件耦合振动的全局模态,结构如图 10(b)所示.基于此构建了星载大型环形天线轨道机动—振动耦合的低维动力学模型,揭示了轨道机动脉冲力对环形天线结构振动响应的影响规律,发展了多柔体耦合空间运动的三维全局模态建模技术.

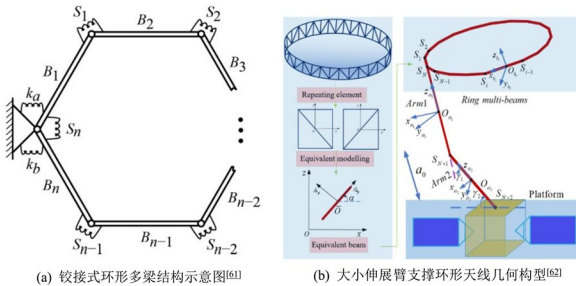


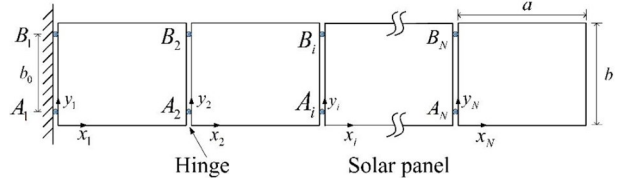
图 10 环形多梁组合结构

Fig. 10 The structure of the annular multi-beam

3 多板组合结构全局模态提取方法

现代航天器所携带的大型柔性太阳翼基板面积较大,板面长度与宽度接近,其振动特性主要表现为板的二维变形,基于一维梁函数所构建的太阳翼基板模型已无法准确描述系统动力学特性.大型柔性太阳翼通常由多个基板通过铰接后展开形成,采用铰链连接多板结构描述太阳翼更为合理.如图 11 所示, N 为基板数, a 、 b 和 b_0 分别表示基板的长、宽和铰链间距.相邻基板之间仅在边缘上的两点处铰接,若直接采用简支边界相应的第一项构造基函数可能会导致不可接受的错误.因此不能将基板边缘假设为简支边界,传统的“中心体平台+单个梁或板”的模型不再适用.曹登庆、王连超等采用

梁函数描述板的变形以构建太阳能帆板,并引入拉格朗日乘子描述铰链连接多基板,研究双向展开式太阳能帆板的动力学特性,将全局模态方法推广到了多板结构的动力学建模^[63].

图 11 铰接多板结构示意图^[63]Fig. 11 Schematic diagram of the structure of the multi-plate joined by hinges^[63]

事实上,对于基板而言,边界条件的特征更接近于自由边界.为了保持基板边缘近似自由的特征,曹或腾等^[64]采用切比雪夫多项式描述基板变形,研究具有三次非线性特征的铰链对多板结构动力学特性的影响.何贵勤等^[65]采用首项为自由边界的多项式来构造特征多项式簇,并以此为基础深入研究了铰链对多板组合结构整体动力学特性的影响,其中铰链对基板的约束和力矩传递仍基于拉格朗日乘子表达.由于航天器在轨运行时铰链是锁定的,且建模时不考虑铰链尺寸,两基板间不存在相对位移.以图 11 为例,铰链的转角和位移的几何关系如下:

$$\Delta\theta_{A_1} = \frac{\partial W_1}{\partial x_1} \bigg|_{x_1=0, y_1=y_a}, \Delta\theta_{B_1} = \frac{\partial W_1}{\partial x_1} \bigg|_{x_1=0, y_1=y_b} \quad (14)$$

$$\Delta\theta_{A_i} = \frac{\partial W_i}{\partial x_i} \bigg|_{x_i=0, y_i=y_a} - \frac{\partial W_{i-1}}{\partial x_{i-1}} \bigg|_{x_{i-1}=a, y_{i-1}=y_a}, \quad i=2,3,\dots,N \quad (15)$$

$$\Delta\theta_{B_i} = \frac{\partial W_i}{\partial x_i} \bigg|_{x_i=0, y_i=y_b} - \frac{\partial W_{i-1}}{\partial x_{i-1}} \bigg|_{x_{i-1}=a, y_{i-1}=y_b}, \quad i=2,3,\dots,N \quad (16)$$

$$\Delta W_{A_1} = W_1(0, y_a) = 0, \Delta W_{B_1} = W_1(0, y_b) = 0 \quad (17)$$

$$\Delta W_{A_i} = W_i(0, y_a) - W_{i-1}(a, y_a) = 0, \Delta W_{B_i} = W_i(0, y_b) - W_{i-1}(a, y_b) = 0. \quad (18)$$

式中, ΔW_{A_i} 和 ΔW_{B_i} 为基板上点 A_i 和点 B_i 的相对位移, $\Delta\theta_{A_i}$ 和 $\Delta\theta_{B_i}$ 表示两块基板连接处转角差. x_i 、 y_i 表示第 i ($i=1,2,3,\dots,N$) 块基板上任意一点的坐标, $y_a = \frac{b-b_0}{2}$, $y_b = \frac{b+b_0}{2}$.

铰接多板结构的动力学问题涉及柔性铰链非线性刚度的表征与接触刚度的模拟方法.何贵勤等^[66]搭建了三板铰接实验平台,通过锤击法进行

了模态实验,通过实验的方式验证了全局模态方法的准确性,实验模型如图 12 所示.进一步通过振动响应实验考察了铰链非线性特性对结构全局非线性动力学行为的影响,结果如图 13 所示.结果表明:仅采用前两阶全局模态离散所得动力学模型便可准确反映系统非线性动力学特性,体现了全局模态动力学建模方法低维高精度的优点.

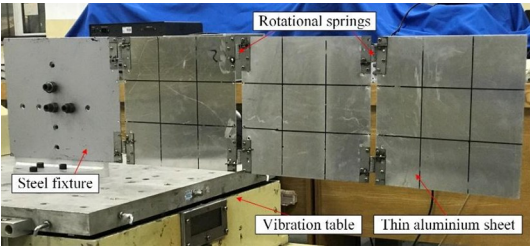


图 12 铰接多板结构实验平台^[66]
Fig. 12 Test platform of the hinged multi-panel structure^[66]

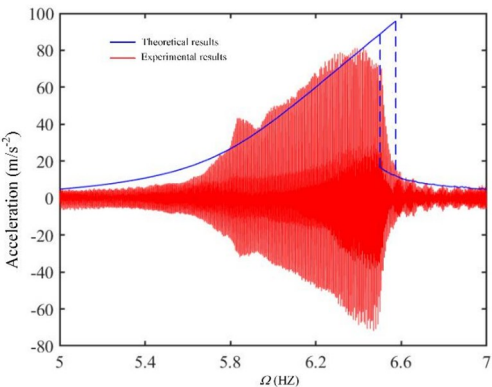


图 13 激励幅值为 5 mm 时测点 3 的实验与理论响应对比
($k_n=1200$)^[66]
Fig. 13 Comparison between the experimental and theoretical amplitude-frequency curve of point 3 with excitation amplitude 5 mm ($k_n=1200$)^[66]

为进一步拓展现有多板组合结构全局模态求解方法,解决大型柔性航天器姿态运动与结构振动的耦合动力学特性问题,何贵勤等^[67,68]继续研究了携带铰链连接多基板太阳翼航天器的刚柔耦合动力学特性,发展用于求解铰接多板组合结构刚柔耦合全局模态的一般方法,分析系统结构参数对固有频率和全局模态的影响,研究系统的密集模态和模态跃迁现象.结果表明:太阳翼存在各基板未出现弹性振动仅发生相对运动的刚体模态;太阳翼的扭转模态采用梁模型无法呈现,说明采用铰接多板结构构建太阳翼动力学模型的必要性.

4 全局模态方法的应用扩展

全局模态方法有效避免了约束模态假设带来

的计算误差,根据不同结构的特点,又可以拓展出多种基于模态的离散方法.比如前文提到的经典的航天器“中心体—梁”模型,刘伦等^[69]参考旋转柔性机械臂模态的研究方法并应用全局模态的思想,提出获取单轴转动柔性航天器刚柔耦合模态的解析方法.基于刚柔耦合离散模型设计航天器姿态控制器,仿真结果如表 2 所示,其中 GAM 表示刚柔耦合模型,AMM 表示假设模态模型.从较短的调整时间和较小的控制力矩可以看出,使用刚柔耦合模态可以在更短的时间内使用更少的能量完成柔性航天器姿态运动—结构振动协同控制目标.

表 2 不同柔性航天器控制器效果对比($J_R/J_f=0.1$)^[69]
Table 2 Performance comparison of different flexible spacecraft controllers ($J_R/J_f=0.1$)^[69]

控制器	调整时间 t^*/s		控制力矩绝对值的最大值 $ \tau _{\max}/(Nm)$
	端部位移	姿态	
GAM	43.5	53.5	0.65
AMM	63.5	83.8	3.40

考虑到板模型能更全面地描述太阳能帆板包含的变形特征,刘伦等进一步研究了携带蜂窝太阳能帆板的三轴稳定航天器,分别采用解析方法^[70]和 Rayleigh-Ritz 方法^[71]得到了系统的刚柔耦合模态.前者可快速且准确地估算航天器的刚柔耦合模态,并用其建立系统的离散动力学模型;后者可精确地计算柔性航天器刚柔耦合模态,更全面和更深入地揭示系统的模态特性.受此启发,曹或腾等^[72]研究了携带可旋转的横向太阳能帆板的航天器,太阳能帆板受电机驱动对日定向,与中心体平台存在相对运动.中心体平台的姿态运动、多个太阳能帆板的驱动转动以及太阳能帆板的自身振动耦合得到了系统的多刚柔体耦合模态.基于离散模型设计了 PD 鲁棒控制器,实现姿态、定向与振动的协同控制.

非线性振动是结构动力学中的热门研究课题,长久以来学者们基于近似的假设模态来构建低阶的非线性动力学方程.采用传统方法在涉及组合结构的非线性振动问题时,连接处的匹配条件仍然以线性方式处理,容易导致较大的误差.曹登庆课题组通过全局模态方法获取非线性动力学系统线性化后系统的精确全局模态,导出非线性系统低自由度振动方程,据此分析结构的非线性振动特性.陈帅等^[73]在研究 T 型梁的面内振动问题时,基于全

局模态构建了 T 型结构的完整动力学模型,保留了边界条件和匹配条件方程中的非线性项.通过完整非线性动力学模型(CNDM)和非完整非线性动力学模型(INDM)的结果对比,表明连接位置处非线性的重要性,并指出这仍是未来动力学建模需要关注的一个重要问题.当前新型飞行器具有折叠式机翼以适应各种飞行任务,所涉及的气动弹性问题也愈加复杂.为研究新折叠式机翼气动布局产生的变化,田开元等^[74]提出了近似全局模态方法,建立了折叠机翼的高精度模型,基于降维模型研究了超声速气动力载荷下的颤振特性.方波等^[75]基于全局模态法获得了铰接环形天线的低维动力学模型.进一步,取前两阶离散模态得到了系统的非线性动力学方程,研究了柔性铰链刚度变化诱发的 3 : 1 内共振动力学行为.

针对假设模态在处理组合结构部件之间耦合问题时的局限,曹登庆、张笑云和王逸龙^[76]创造性地提出了加权假设模态法.基本思想是通过假设模态建立组合结构的近似动力学模型,利用近似模型获取系统的全局模态.以跨中带有多个弹性支撑的简支梁为例,结构如图 14 所示.

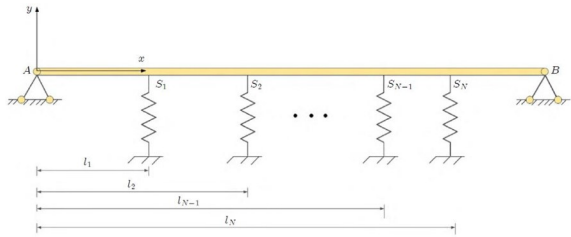


图 14 含多个弹性支撑的简支梁^[76]
Fig. 14 A simply supported beam with multiple elastic supports^[76]

图中简支梁 AB 的假设模态仅满足 A、B 两点的约束条件而不满足弹性支撑点 $S_1 \sim S_N$ 的约束条件,因此采用假设模态法会出现较大误差.为解决这个问题,首先采用满足边界条件的假设模态离散带多弹性支撑简支梁的运动方程,获得基于假设模态的系统动力学方程,求取系统的特征值和特征向量.将特征向量的元素作为加权系数求得加权假设模态.最后将加权假设模态重新代入系统的运动方程,获得基于加权假设模态的动力学模型.具体的做法可以参看文献^[77].加权假设模态法可以获得系统的近似全局模态,被证明具有全局模态正交性,仅需较少阶模态便可以获得系统的真实响应.这是传统假设模态法所无法比拟的,值得关注.

5 结语与展望

本文围绕复杂组合结构动力学模型的降阶问题,分析了模型降阶的一般方法和当前的研究现状,并总结了全局模态解析方法的应用进展.基于索、梁、板等柔性部件的研究,阐述了全局模态在组合结构中的广泛应用,其结果能够准确反映系统中各个部件的真实弹性振动模态.在此基础上,利用全局模态法能够有效分析系统参数对模态的影响,深入揭示系统中各个部件的振动耦合关系,使得非线性振动研究有了精确的线性模态依托,取系统的前几阶低阶模态就能准确表达其非线性动力学特性.相比传统假设模态方法,全局模态方法具有更高的精度,还显著减少了自由度,为结构振动控制器设计提供了精确的低维动力学模型.

尽管全局模态方法在解决组合结构降阶问题上已取得显著进展,未来仍有以下几个方面值得进一步探索:

(1)多维度组合结构的研究.现有研究多聚焦于具有相同维度构件的组合结构,如一维的微谐振器组件或二维的多板结构.如何针对不同维度的组合结构(如梁—板组合结构)建立动力学模型,是一个值得进一步深入探讨的问题.初步的成果已由曹或腾等提出,采用幂级数多项式法^[78]构建区间约束^[79]及梁—板组合结构的模型^[80],但如何提取不同维度组合结构的全局模态仍需进一步研究.

(2)空间运动的全局模态分析.当前研究对象主要局限于平面运动,例如斜拉桥索—梁组合结构的研究.然而,实际工程结构,如桥梁,常涉及二维桥面和三维桥墩等复杂构件,运动形式多向且复杂,这为模态分析带来新的挑战.虽然已有对三维全局模态的初步探索,但部件模型通常仅考虑单一方向的弯曲变形.未来需要深入研究如何获取包含空间运动的组合结构的全局模态.

(3)连接结构的不确定性处理.现有研究多将连接结构视为理想连接,如在铰链连接的多板结构中忽略铰链的间隙和摩擦,以理想化方式构建约束条件.然而,实际中的连接结构往往存在不确定性,即使在理论分析中考虑,也只能通过近似拟合进行处理,从而导致计算结果偏差.如何更加精确地表征连接部件的特征,减少不确定性对全局模态精度的影响,是提高方法可靠性的关键问题.

(4)全局模态的工程应用.目前,全局模态方法在理论研究中取得了显著进展,特别是在简化模型的动力学分析中展示了其在参数调试和非线性分析方面的有效性.尽管已有一些初步应用,但全局模态方法在复杂工程问题中的广泛应用仍需进一步探索.随着神经网络技术的发展,基于深度学习的动力学建模方法受到广泛关注^[81].未来能否将模态方法与数据驱动思想结合,使其更深入地融入实际工程应用中,以进一步发挥其潜在优势,成为一个值得关注的问题.

综上所述,全局模态方法的提出有效地克服了传统离散方法对高维自由度的依赖,拓宽了组合结构动力学模型降阶的思路,为非线性动力学理论的发展注入了新的动力.凭借其在理论上的显著优势及在工程领域中的广阔应用前景,全局模态方法有望成为结构动力学研究和应用中的重要工具.

参考文献

- [1] 曹登庆,白坤朝,丁虎,等.大型柔性航天器动力学与振动控制研究进展[J].力学学报,2019,51(1):1—13.
CAO D Q, BAI K C, DING H, et al. Advances in dynamics and vibration control of large-scale flexible spacecraft [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2019, 51(1): 1—13. (in Chinese)
- [2] 丛云跃,康厚军,郭铁丁,等.工程结构多刚度尺度分析与模态理论[J].动力学与控制学报,2023,21(4):15—22.
CONG Y Y, KANG H J, GUO T D, et al. Multiple scale analysis and modal theory of engineering structures [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(4): 15—22. (in Chinese)
- [3] 李威,杜冬,周徐斌,等.采用基础激励下力反作用的大挠性结构动力学建模研究[J].动力学与控制学报,2024,22(6):33—41.
LI W, DU D, ZHOU X B, et al. Dynamic modeling of large flexible structures with force feedback under basic excitation [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(6): 33—41. (in Chinese)
- [4] CAI G P, HONG J Z, YANG S X. Dynamic analysis of a flexible hub-beam system with tip mass [J]. Mechanics Research Communications, 2005, 32(2): 173—190.
- [5] 刘锦阳,李彬,洪嘉振.作大范围空间运动柔性梁的刚—柔耦合动力学[J].力学学报,2006,38(2): 276—282.
LIU J Y, LI B, HONG J Z. Rigid-flexible coupling dynamics of a flexible beam with three-dimensional large overall motion [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2006, 38(2): 276—282. (in Chinese)
- [6] 和兴锁,顾致平,邓峰岩.大型空间柔性梁的有限元动力学建模方法研究[J].机械科学与技术,2007,26(9):1194—1197.
HE X S, GU Z P, DENG F Y. Dynamics modeling of large spatial flexible beam with finite element method [J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2007, 26(9): 1194—1197.
- [7] 孙禹晗,王泽峰,宋智广.基于模态参数及小波变换的旋转梁结构损伤识别[J].动力学与控制学报,2023,21(1):51—59.
SUN Y H, WANG Z F, SONG Z G. Damage identification of rotating beams based on mode parameters and wavelet transform [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(1): 51—59. (in Chinese)
- [8] CRESPO DA SILVA M R M. A reduced-order analytical model for the nonlinear dynamics of a class of flexible multi-beam structures [J]. International Journal of Solids and Structures, 1998, 35(25): 3299—3315.
- [9] 蔡国平,洪嘉振.旋转运动柔性梁的假设模态方法研究[J].力学学报,2005,37(1):48—56.
CAI G P, HONG J Z. Assumed mode method of a rotating flexible beam [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2005, 37(1): 48—56. (in Chinese)
- [10] 张晓宇,刘晓峰,蔡国平,等.柔性关节柔性连杆机械臂的动力学建模[J].动力学与控制学报,2022,20(3):25—39.
ZHANG X Y, LIU X F, CAI G P, et al. Dynamic modeling of a flexible-link flexible-joint manipulator [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(3): 25—39. (in Chinese)
- [11] 蒋建平,李东旭.带太阳帆板航天器刚柔耦合动力学研究[J].航空学报,2006,27(3):418—422.
JIANG J P, LI D X. Research on rigid-flexible coupling dynamics of spacecraft with solar panel [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2006, 27(3): 418—422. (in Chinese)
- [12] HU Q L, MA G F. Variable structure control and

- active vibration suppression of flexible spacecraft during attitude maneuver [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2005, 9(4): 307–317.
- [13] 胡庆雷, 马广富. 基于滑模输出反馈与输入成形控制相结合的挠性航天器主动振动抑制方法[J]. *振动与冲击*, 2007, 26(6): 133–138, 189.
HU Q L, MA G F. Active vibration suppression in flexible spacecraft with mismatched uncertainty via sliding mode/shaped input control [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2007, 26(6): 133–138, 189. (in Chinese)
- [14] HU Q L. Robust adaptive sliding mode attitude maneuvering and vibration damping of three-axis-stabilized flexible spacecraft with actuator saturation limits [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2009, 55(4): 301–321.
- [15] HU Q L. Input shaping and variable structure control for simultaneous precision positioning and vibration reduction of flexible spacecraft with saturation compensation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 318(1/2): 18–35.
- [16] 张弛, 毛晓晔, 丁虎, 等. 受轴向激励弹性支承梁的稳定性分析[J]. *动力学与控制学报*, 2022, 20(3): 66–76.
ZHANG C, MAO X Y, DING H, et al. Stability analysis of axially excited beam with elastic boundary [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2022, 20(3): 66–76. (in Chinese)
- [17] AZADI E, FAZELZADEH S, EGHTEHAD M, et al. Active vibration suppression and maneuver control of an orbiting smart flexible satellite [J]. *Iranian Journal of Science and Technology Transactions of Mechanical Engineering*, 2014, 38(1): 119.
- [18] 赵楚楚, 陈立群. 关于模态综合法的注记[J]. *力学与实践*, 2022, 44(5): 1179–1182.
ZHAO C C, CHEN L Q. A note on the method of mode synthesis [J]. *Mechanics in Engineering*, 2022, 44(5): 1179–1182. (in Chinese)
- [19] 谭星, 陈卫婷, 王陶, 等. 局部非线性结构自由界面子结构模态综合法[J]. *航空学报*, 2024, 45(13): 229550.
TAN X, CHEN W T, WANG T, et al. Free-interface component mode synthesis method for structures with local nonlinearities [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2024, 45(13): 229550. (in Chinese)
- [20] 张勇, 赵岩, 欧阳华江. 基于高精度模态综合法的螺栓连接组合结构不确定模型更新[J]. *应用力学学报*, 2024, 41(2): 443–452.
ZHANG Y, ZHAO Y, OUYANG H J. Stochastic model updating of assembled structures with bolted joints based on the high-precision modal synthesis method [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2024, 41(2): 443–452. (in Chinese)
- [21] 王强, 马志赛, 张欣, 等. 基于模态综合法的含间隙折叠舵面动态特性分析[J]. *航空学报*, 2020, 41(5): 223507.
WANG Q, MA Z S, ZHANG X, et al. Dynamic characteristic analysis for a folding fin with freeplay nonlinearities based on mode synthesis method [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2020, 41(5): 223507. (in Chinese)
- [22] 李旭龙, 张忠, 魏莎, 等. 对接圆柱壳结构模态特性分析[J]. *动力学与控制学报*, 2022, 20(4): 48–54.
LI X L, ZHANG Z, WEI S, et al. Modal analysis of butted cylindrical shell structure [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2022, 20(4): 48–54. (in Chinese)
- [23] DIETZ S, WALLRAPP O, WIEDEMANN S. Nodal vs. modal representation in flexible multibody system dynamics [C]//*Proceedings of the Multibody Dynamics 2003*. [S. l. : s. n.], 2003.
- [24] PAN K Q, LIU J Y. Investigation on the choice of boundary conditions and shape functions for flexible multi-body system [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2012, 28(1): 180–189.
- [25] SCHWERTASSEK R, WALLRAPP O, SHABANA A A. Flexible multibody simulation and choice of shape functions [J]. *Nonlinear Dynamics*, 1999, 20(4): 361–380.
- [26] CONG Y Y, KANG H J, GUO T D, et al. One-to-one internal resonance of a cable-beam structure subjected to a concentrated load [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2022, 529: 116915.
- [27] KANG H J, YUAN Q, SU X Y, et al. Modal truncation method for continuum structures based on matrix norm; modal perturbation method [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, 112(13): 11313–11328.
- [28] 安阳, 王天舒. 弹性飞行器飞行动力学建模与刚柔耦合阶次分析[J]. *宇航学报*, 2024, 45(2): 240–249.
AN Y, WANG T S. Flight dynamics modeling and rigid-flexible coupling order analysis for flexible

- flight vehicle [J]. *Journal of Astronautics*, 2024, 45(2): 240–249. (in Chinese)
- [29] SHAWKY A, ZYDEK D, ELHALWAGY Y Z, et al. Modeling and nonlinear control of a flexible-link manipulator [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, 37(23): 9591–9602.
- [30] MARTINS J, AYALA BOTTO M, S? DA COSTA J. Modeling of flexible beams for robotic manipulators [J]. *Multibody System Dynamics*, 2002, 7(1): 79–100.
- [31] BARBIERI E, OZGUNER U. Unconstrained and constrained mode expansions for a flexible slewing link [C]//1988 American Control Conference. New York: IEEE, 1988.
- [32] DI GENNARO S. Active vibration suppression in flexible spacecraft attitude tracking [J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1998, 21(3): 400–408.
- [33] 胡庆雷, 马广富, 姜野, 等. 三轴稳定挠性卫星姿态机动时变滑模变结构和主动振动控制[J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(2): 122–126.
- HU Q L, MA G F, JIANG Y, et al. Variable structure control with time-varying sliding mode and vibration control for flexible satellite [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(2): 122–126. (in Chinese)
- [34] 朴金丽, 郭翔鹰, 张伟, 等. Z型折叠机翼的非线性动力学与模态分析研究[J]. *动力学与控制学报*, 2017, 15(1): 29–38.
- PIAO J L, GUO X Y, ZHANG W, et al. Nonlinear dynamics and mode analysis for a Z-type folding wings [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(1): 29–38. (in Chinese)
- [35] 王松松, 郭翔鹰, 王帅博. 变截面 Z型折叠机翼振动特性的有限元与实验分析[J]. *动力学与控制学报*, 2020, 18(6): 84–89.
- WANG S S, GUO X Y, WANG S B. Finite element analysis and experiment on vibration of Z-shaped morphing wing with variable section [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2020, 18(6): 84–89. (in Chinese)
- [36] HABLANI H. Modal analysis of gyroscopic flexible spacecraft: a continuum approach [J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1982, 5(5): 448–457.
- [37] ZHANG J, WANG T S. Coupled attitude-orbit control of flexible solar sail for displaced solar orbit [J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2013, 50(3): 675–685.
- [38] LI Q, MA X R, WANG T S, et al. Reduced model for flexible solar sail dynamics [J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2011, 48(3): 446–453.
- [39] 王志攀. 多索—单梁耦合结构的动力学建模及非线性特性研究[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(4): 41–47.
- WANG Z Q. Study on dynamic characteristics and nonlinear characteristics of multi-cable single beam coupled structures [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(4): 41–47. (in Chinese)
- [40] GATTULLI V, LEPIDI M. Nonlinear interactions in the planar dynamics of cable-stayed beam [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, 40(18): 4729–4748.
- [41] ZHAO Y Y, KANG H J. In-plane free vibration analysis of cable-arch structure [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 312(3): 363–379.
- [42] 於祖庆, 顾子健, 兰朋, 等. 塔式起重机刚柔耦合多体系统建模与降阶方法[J]. *动力学与控制学报*, 2024, 22(8): 58–65.
- YU Z Q, GU Z J, LAN P, et al. Multibody system dynamic modeling and order reduction of tower crane [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2024, 22(8): 58–65. (in Chinese)
- [43] WANG Z Q, SUN C S, ZHAO Y B, et al. Modeling and nonlinear modal characteristics of the cable-stayed beam [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2014, 47: 58–69.
- [44] 康厚军, 尹昆, 苏潇阳, 等. 基于索—梁结构的斜拉桥非线性振动仿真研究[J]. *动力学与控制学报*, 2024, 22(5): 16–23.
- KANG H J, YIN K, SU X Y, et al. Nonlinear vibration simulation study of cable-stayed bridge based on cable-beam structure [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2024, 22(5): 16–23. (in Chinese)
- [45] 康厚军, 韩艳, 徐军. 桥梁工程中动力学与控制研究进展[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(4): 1–6.
- KANG H J, HAN Y, XU J. Advances on dynamics and control in bridge engineering [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(4): 1–6. (in Chinese)
- [46] KAMMER D C, ALLEN M S, MAYES R L. Formulation of an experimental substructure model using a Craig-Bampton based transmission simulator

- [J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2015, 359(6): 179—194.
- [47] CAO D Q, SONG M T, ZHU W D, et al. Modeling and analysis of the in-plane vibration of a complex cable-stayed bridge [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, 331(26): 5685—5714.
- [48] WEI J, CAO D Q, LIU L, et al. Global mode method for dynamic modeling of a flexible-link flexible-joint manipulator with tip mass [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, 48: 787—805.
- [49] 魏进, 曹登庆, 于涛. 复合柔性结构全局模态函数提取与状态空间模型构建[J]. *力学学报*, 2019, 51(2): 341—353.
- WEI J, CAO D Q, YU T. Extraction of global mode functions and construction of state space model for a composite flexible structure [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(2): 341—353. (in Chinese)
- [50] SONG M T, CAO D Q, ZHU W D. Dynamic analysis of a micro-resonator driven by electrostatic combs [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, 16(8): 3425—3442.
- [51] CAO Y T, CAO D Q, HUANG W H. Dynamic modeling and vibration control for a T-shaped bending and torsion structure [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019, 157: 773—786.
- [52] CAO Y T, CAO D Q, HE G Q, et al. Vibration analysis and distributed piezoelectric energy harvester design for the L-shaped beam [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2021, 87: 104214.
- [53] CAO Y T, CAO D Q, LIU L, et al. Dynamical modeling and attitude analysis for the spacecraft with lateral solar arrays [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, 64: 489—509.
- [54] WEI J, CAO D Q, HUANG H, et al. Dynamics of a multi-beam structure connected with nonlinear joints: modelling and simulation [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2018, 88(7): 1059—1074.
- [55] WEI J, CAO D Q, WANG L C, et al. Dynamic modeling and simulation for flexible spacecraft with flexible jointed solar panels [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, 130: 558—570.
- [56] ZHANG W, ZHENG Y, LIU T, et al. Multi-pulse jumping double-parameter chaotic dynamics of eccentric rotating ring truss antenna under combined parametric and external excitations [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 98(1): 761—800.
- [57] ZHANG W, CHEN J, SUN Y. Nonlinear breathing vibrations and chaos of a circular truss antenna with 1 : 2 internal resonance [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2016, 26(5): 1650077.
- [58] LIU T, ZHANG W, ZHENG Y, et al. Andronov-Hopf bifurcations, Pomeau-Manneville intermittent chaos and nonlinear vibrations of large deployable space antenna subjected to thermal load and radial pre-stretched membranes with 1 : 3 internal resonance [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, 144: 110719.
- [59] LIU F S, JIN D P, LI X Y, et al. Reduced-order modeling and solution method for nonlinear frequency response analysis of large space truss structures [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, 112(12): 10127—10145.
- [60] LIU M, WEI J, ZHANG X Y, et al. Equivalent nonlinear beam model for static and free vibration analysis of the beamlike truss [J]. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 2023, 11(8): 4039—4051.
- [61] WU Y, CAO D Q, LIU M, et al. Natural characteristic and vibration analysis of nonlinear articulated multi-beam ring structure for modeling ring truss antenna under base excitation [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, 108: 787—806.
- [62] FANG B, WANG Y L, ZHU B H, et al. 3D-spatial vibration global modes of a flexible arm-supported ring antenna and its dynamic analysis [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2023, 123: 590—626.
- [63] CAO D Q, WANG L C, WEI J, et al. Natural frequencies and global mode functions for flexible jointed-panel structures [J]. *Journal of Aerospace Engineering*, 2020, 33(4): 04020018.
- [64] CAO Y T, CAO D Q, HE G Q, et al. Modelling and vibration analysis for the multi-plate structure connected by nonlinear hinges [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, 492: 115809.
- [65] HE G Q, CAO D Q, WEI J, et al. Study on analytical global modes for a multi-panel structure connected with flexible hinges [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, 91: 1081—1099.
- [66] 何贵勤, 曹登庆, 陈帅, 等. 挠性航天器太阳翼全局模态动力学建模与实验研究[J]. *力学学报*, 2021, 53(8): 2312—2322.

- HE G Q, CAO D Q, CHEN S, et al. Study on global mode dynamic modeling and experiment for a solar array of the flexible spacecraft [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(8): 2312—2322. (in Chinese)
- [67] HE G Q, CAO D Q, CAO Y T, et al. Dynamic modeling and orbit maneuvering response analysis for a three-axis attitude stabilized large scale flexible spacecraft installed with hinged solar arrays [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 162: 108083.
- [68] HE G Q, CAO D Q, VAN DER HEIJDEN G H M. Complicated nonlinear oscillations caused by maneuvering of a flexible spacecraft equipped with hinged solar arrays [J]. Nonlinear Dynamics, 2023, 111(7): 6261—6293.
- [69] LIU L, CAO D Q, WEI J. Rigid-flexible coupling dynamic modeling and vibration control for flexible spacecraft based on its global analytical modes [J]. Science China Technological Sciences, 2019, 62(4): 608—618.
- [70] LIU L, CAO D Q, WEI J, et al. Rigid-flexible coupling dynamic modeling and vibration control for a three-axis stabilized spacecraft [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2017, 139(4): 041006.
- [71] LIU L, CAO D Q, TAN X J. Studies on global analytical mode for a three-axis attitude stabilized spacecraft by using the Rayleigh-Ritz method [J]. Archive of Applied Mechanics, 2016, 86 (12): 1927—1946.
- [72] CAO Y T, CAO D Q, HE G Q, et al. Rigid-flexible coupled dynamics and PD-robust control design for the spacecraft with rotating solar panels [J]. International Journal of Applied Mechanics, 2021, 13 (10): 2150112.
- [73] CHEN S, CAO D Q, WEI J, et al. Investigations on nonlinear dynamic modeling and vibration responses of T-shaped beam structures [J]. Actuators, 2022, 11(10): 293.
- [74] TIAN K Y, WANG Y L, CAO D Q, et al. Approximate global mode method for flutter analysis of folding wings [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2024, 265: 108902.
- [75] FANG B, WANG Y L, WU Y, et al. Dynamic modeling and theoretical analysis of planar nonlinear vibrations of an articulated hoop truss antenna [J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2025, 25(6): 2550053.
- [76] ZHANG X Y, WANG Y L, LIU M, et al. Nonlinear dynamical modeling and response analysis of complex structures based on assumed mode weighting [J]. Engineering Structures, 2024, 312: 118226.
- [77] 曹登庆, 张笑云, 王逸龙. 基于假设模态加权的全局模态提取方法及其应用[J]. 力学与实践, 2023, 45(4): 866—873.
- CAO D Q, ZHANG X Y, WANG Y L. Global mode extraction method based on assumed mode weighting and its application [J]. Mechanics in Engineering, 2023, 45(4): 866—873. (in Chinese)
- [78] CAO Y T, CAO D Q, HE G Q, et al. Nonlinear dynamic modelling and analysis of multiple thin plates connected by long hinges [J]. Nonlinear Dynamics, 2022, 110(2): 1199—1222.
- [79] CAO Y T, ZHANG X D, CAO D Q, et al. Natural characteristics analysis for the spacecraft equipped with constructed cantilever solar panels [J]. Actuators, 2023, 12(1): 3.
- [80] CAO Y T, ZHANG X D, HAO Y X, et al. Coupled vibration analysis of the spacecraft with the flexible shaft and solar panels assembly [J]. Aerospace Science and Technology, 2024, 151: 109259.
- [81] 刘丰瑞, 颜格, 张晓龙, 等. 基于深度强化学习的动基座双自由度系统动力学控制方法[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(10): 26—33.
- LIU F R, YAN G, ZHANG X L, et al. Dynamic control method for dual-degree-of-freedom systems with moving base by deep reinforcement learning [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21 (10): 26—33. (in Chinese)