

面向复杂非线性动力系统的谱子流形降阶方法 研究进展*

李明武^{1,2†}

(1. 南方科技大学 力学与航空航天工程系, 深圳 518055)

(2. 大连理工大学 工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室, 大连 116024)

摘要 复杂非线性系统的物理模型具有很高的复杂度,其动力学分析与设计面临高维计算瓶颈,建立其低维可靠的降阶模型具有重要意义.谱子流形降阶方法作为非线性模型降阶的新进展,已逐渐成为复杂非线性动力系统模型降阶的有力工具.谱子流形降阶方法基于具有吸引性的低维不变流形,可在方程驱动和数据驱动两个框架下获得低维精确的降阶模型,已实现将百万自由度的非线性系统降阶到单个自由度,在结构非线性振动、流体动力学、软体机器人控制等方面获得了成功应用.本文从谱子流形理论、降阶方法及其在复杂非线性动力系统中的应用三个层面介绍相关研究进展,最后给出谱子流形降阶研究的展望.

关键词 高维非线性, 降维, 模型降阶, 数据驱动, 非线性模态, 谱子流形

中图分类号:O302;O322;O19

文献标志码:A

Advances on Model Reduction for Complex Nonlinear Dynamical Systems via Spectral Submanifolds*

Li Mingwu^{1,2†}

(1. Department of Mechanics and Aerospace Engineering,

Southern University of Science and Technology, Shenzhen 518055, China)

(2. State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment,

Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract Physics modeling of complex nonlinear systems is challenging, as analysis and design of the relevant dynamics of face curse of high-dimensionality. Therefore, it is important to develop low-dimensional, reliable reduced-order models (ROMs) for them. Spectral submanifolds (SSMs) have emerged as a powerful tool for constructing ROMs for complex systems. SSMs are low-dimensional attracting invariant manifolds, and the associated SSM-based ROMs are low-dimensional yet exact. They can be obtained in equation-driven and data-driven settings and have been successfully applied to nonlinear vibrations, fluid dynamics, and control of soft robots. We present a review of recent advances in the theory of SSMs, model reduction techniques via SSMs, and various applications of SSM-based reductions. We conclude this article with an outlook on future developments.

2024-10-11 收到第 1 稿,2025-07-21 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(12302014,12572010),大连理工大学工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室开放基金资助项目(GZ24117),广东省自然科学基金资助项目(2024A1515011709),深圳市科创委资助项目(20231115172355001), National Natural Science Foundation of China (12302014,12572010), State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment (GZ24117), Guangdong Natural Science Foundation (2024A1515011709), Shenzhen Science and Technology Innovation Commission (20231115172355001).

† 通信作者 E-mail:limw@sustech.edu.cn

Key words high-dimensionality, dimension reduction, model reduction, data-driven, nonlinear normal mode, spectral submanifold

引言

在自然和工程中复杂非线性系统比比皆是. 从固体力学中的几何非线性、材料非线性、边界非线性(接触摩擦等)到流体力学中的湍流, 非线性效应无处不在. 随着制造工艺的不断提升, 结构设计逐渐向轻量化、柔性化和细长化方向发展, 非线性效应变得愈发显著. 这一现象从微纳尺度的微机电系统^[1]一直延伸到千米量级的大型柔性航天器^[2,3]. 多物理场耦合也是一类典型的非线性问题, 如流体诱发的振动是装备管路服役安全的制约因素^[4,5], 气-固-液耦合是海上漂浮式风机建模需要考虑的核心力学问题^[6].

复杂非线性系统的物理建模是其动力学分析与设计的基础. 对于可建模的复杂系统, 其控制方程多为带有复杂边界条件的非线性偏微分方程, 解析求解难度大, 需利用数值方法进行离散. 由于非线性效应显著, 为了获得可靠的数值模拟结果, 必须采用极高的离散分辨率. 这些离散模型的自由度可高达数百万甚至上千万, 数值模拟因此面临高维计算的瓶颈. 针对部分强非线性系统, 基于物理方程的建模困难, 如考虑多尺度效应的螺栓接触摩擦^[7], 具有滞回现象的水凝胶软材料本构等^[8], 此时需直接从复杂系统的数据中提取物理模型, 即进行模型识别. 但这些非线性系统的数据呈多尺度、非光滑、记忆特性等复杂特征, 如何从这些复杂数据中识别出低维的物理模型仍面临重大挑战.

综上, 建立复杂非线性系统的低维可靠降阶模型是一个关键的科学问题. 基于降阶模型可有效开展复杂系统的动力学正反问题研究, 从而支持复杂系统的动力学设计^[9,10]. 谱子流形是近年来发展的复杂非线性动力系统模型降阶的有力工具, 可在方程驱动和数据驱动两个框架下构造低维降阶模型, 是非线性动力学领域的重要进展, 为突破高维非线性难点提供了可行的解决思路. 本文旨在面向国内同行介绍谱子流形的数学理论、降阶方法及应用研究进展.

1 模型降阶基本思路

在介绍谱子流形降阶前先阐述模型降阶的基

本思路. 方程驱动框架下, 模型降阶的基本思路如图 1 所示, 其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 是高维的状态向量 ($n \gg 1$) 而 $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^m$ 是低维的降阶坐标向量. 高维系统的控制方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

其中 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^2)$, $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^r$ ($r \geq 1$) 降阶系统的动力学为

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}(\mathbf{p}). \quad (2)$$

模型降阶的两个要素是建立低维降阶坐标和原系统高维状态向量的映射关系

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}(\mathbf{p}) \quad (3)$$

和低维坐标的动力学(2).

数据驱动框架下, 模型降阶的基本思路如图 2 所示. 采用数据驱动建模时的已知量为观测的实验数据, 系统的控制方程通常是未知的, 这与方程驱动的框架是不同的. 此时需建立观测量 $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ 和降阶坐标的映射关系, 即 $\mathbf{y} = \mathbf{W}(\mathbf{p})$ 和降阶坐标的动力学(2).

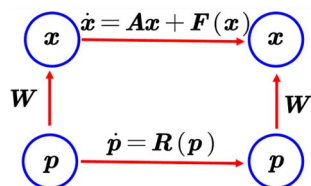


图 1 方程驱动框架下模型降阶示意图

Fig. 1 Equation-driven model reduction framework

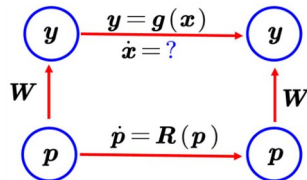


图 2 数据驱动框架下模型降阶示意图. $\mathbf{y}$ 为系统的观测量. 和方程驱动框架(图 1)不一样, 状态向量 $\mathbf{x}$ 的控制方程通常是未知的

Fig. 2 Data-driven model reduction framework. Here $\mathbf{y}$ is a vector of observables. Unlike the case of equation-driven framework (Fig. 1), the governing equations for the state vector $\mathbf{x}$ are often unknown

根据映射 $\mathbf{W}$ 线性与否, 可将模型降阶方法分为线性和非线性方法. 针对线性降阶方法, 映射 $\mathbf{W}$ 由投影矩阵 $\mathbf{V}$ 表征, 即 $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{p}$, 通过将高维的状态向量投影到低维的子空间实现降阶. 根据 $\mathbf{V}$ 的不同构造方式, 发展了一系列线性降阶方法, 包括方程驱动下的模态截断(MT)、模态组合法(CMS)^[11], 数据

驱动框架下的动态模态分解(DMD)^[12],以及融合了数据和方程的正交模态分解方法(POD)^[13].

线性方法已被成功用于构造高维线性系统的低维降阶模型^[11],但在应用到非线性问题时存在若干挑战^[14].基于线性投影的降阶难以表征完整的模态耦合效应,因此其精度高度依赖于投影子空间 $\mathbf{V}$ 的选取.该选取和具体问题相关,且通常依赖于经验和先验知识,例如考虑细长或薄壁弹性结构的内面拉伸效应时,需要高阶模态来计入面外弯曲和面内拉伸的耦合效应^[15].通常需要通过增加 $\mathbf{V}$ 中列向量的数目来检验预测结果的收敛性,从而判别降阶模型的可靠性,最终得到的降阶模型维数可高达数十乃至数百维^[15,16],依然是高维的非线性系统.

非线性降阶方法中的映射 $\mathbf{W}$ 是关于降阶坐标的非线性函数,可有效捕捉从模态(slave mode)和主模态(master mode)[或从子空间(slave subspace)和主子空间(master subspace)]的耦合关系,为构造低维精确的降阶模型提供了思路.非线性降阶方法包括在方程驱动框架下基于中心流形^[13]、非线性模态^[14,17,18]和惯性流形^[13]的降阶方法,也包括在数据驱动框架下基于机器学习的降阶方法^[19].

非线性降阶方法的核心是利用低维具有吸引性的不变流形^[20](见图3).其中低维保证了降阶模型的简单性;吸引性则确保初始时刻不在流形上的轨迹迅速逼近流形,从而保证了其在实验中的可观测性;不变流形则确保了降阶模型的封闭性和光滑性.谱子流形(spectral submanifold, SSM)作为一类具有吸引性的低维不变流形^[21],由George Haller教授在2016年提出,并在近几年得到拓展^[20].SSM在数学上具有清晰的存在性和唯一性条件,可用于构造低维精确可靠的降阶模型.下面对谱子

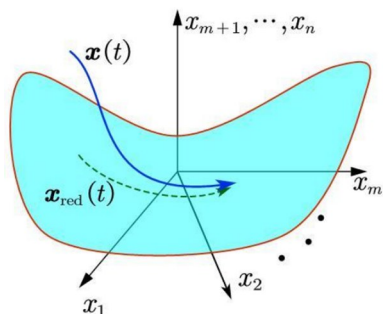


图3 基于具有低维吸引特性的不变流形降阶示意图.

$\mathbf{p}=[x_1, \dots, x_m]$, $\mathbf{x}_{\text{red}}$ 为流形上的降阶轨迹

Fig. 3 Schematic of model reduction via low-dimensional, attracting invariant manifold. Here, we have $\mathbf{p}=[x_1, \dots, x_m]$, and $\mathbf{x}_{\text{red}}$ is the reduced trajectory on the manifold

流形理论进行介绍.

2 谱子流形理论

本节综述谱子流形理论发展,从线性自治系统出发,探讨流形的光滑特性和快慢特征,然后基于不变性拓展到非线性自治系统,并进一步考虑非自治项(时变外力)、代数约束和非光滑等复杂特征.在下面的讨论中,我们假定 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 是动力系统(1)的一个双曲型平衡点,即矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值实部均非零.

2.1 线性自治系统

为了阐述谱子流形的基本概念,我们首先考虑一个二维的线性系统^[20]:

$$\dot{x} = -\alpha x, \quad y\dot{x} = -\beta y, \quad \beta > \alpha > 0. \quad (4)$$

该线性系统的特征值为 $\lambda_1 = -\alpha$ 和 $\lambda_2 = -\beta$,相应的特征向量为 $\mathbf{e}_1 = [1; 0]$ 和 $\mathbf{e}_2 = [0; 1]$.方程(4)的解为

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t}, \quad y(t) = y_0 e^{-\beta t}, \quad (5)$$

其中 (x_0, y_0) 为初始条件.从方程(5)可以看到 x 和 y 方向的运动相互独立,这意味着以 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 分别为基底的子空间 E_1 和 E_2 (即 x 轴和 y 轴)均是不变子空间,即初始时刻在 x/y 轴上的轨迹将限定在 x/y 轴上,其中 x 运动的衰减速率较慢,故 E_1 为慢谱子空间,而 E_2 则为快谱子空间(参见图4).

从方程(5)可以进一步看出,当 $x_0 \neq 0$ 时,通过消去时间变量 t 可以得到轨迹线的显示表达

$$y = cx^{\beta/\alpha}, \quad c = y_0/x_0^{\beta/\alpha}, \quad (6)$$

这些轨迹线由图4中的蓝色曲线和绿色直线表示,其中蓝色线对应于 $c \neq 0$,而绿色线则是 $c = 0$ 的特殊情形.这些轨迹线均为不变流形,其中绿色直线对应 E_1 ,蓝色曲线均和 E_1 相切于坐标原点.这些不变流形均和 E_1 相关,其中 E_1 自身具有 C^∞ 光滑

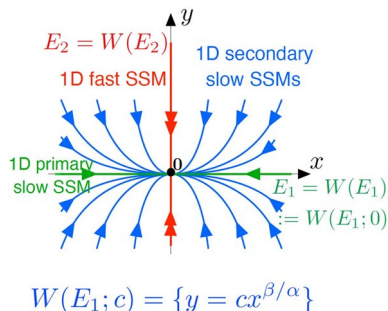


图4 二维线性系统的谱子空间和谱子流形^[20]

Fig. 4 Spectral subspace and spectral submanifolds of the 2-dimensional linear system^[20]

性,被定义为主慢谱子流形(primary slow SSM)^[22];蓝色曲线族均具有 $C^{\lfloor \beta/\alpha \rfloor}$ 光滑性,其中 $\lfloor \beta/\alpha \rfloor$ 代表不超过该数的最大整数,如 $\alpha=2, \beta=3$ 时,这些流形仅具有 C^1 的光滑性,被定义为次慢谱子流形(secondary slow SSM)^[22].

从前述分析可以看到,当 β/α 为分数时,与 E_1 相切的慢谱子流形具有无穷多个,在这无穷多个当中,主谱子流形最光滑(C^∞),而剩下的次谱子流形的光滑性均为 $\lfloor \beta/\alpha \rfloor$. 当 β/α 为整数时,这无穷多个慢谱子流形的光滑性均相同,不存在最光滑的谱子流形. β/α 为整数对应动力系统的特征值共振. 因此,当系统不存在共振时,最光滑的慢谱子流形存在且唯一. 最后需指出的是与快谱子空间 E_2 相切的快谱子流形仅有一个,即 E_2 自身.

综上,谱子流形和谱子空间相互捆绑,在给定的谱子空间后才能谈论谱子流形. 根据谱子空间对应特征值的实部排序,可定义谱子空间的快慢特性,进一步定义慢谱子流形和快谱子流形^[21]. 其中慢谱子流形具有吸引性,和模型降阶紧密相关. 慢谱子流形通常具有无穷多个,当线性系统特征值不存在共振关系时,在这无穷多个慢谱子流形中有一个流形的光滑性最好,被定义为主谱子流形^[21,22].

以上分析可直接拓展到高维线性自治系统. 基于特征值分析给出系统的谱特性,在选定主子空间后,根据主子空间内特征值和其余特征值是否存在共振关系可判别相应的主谱子流形是否存在^[21,22].

2.2 非线性自治系统

当计入非线性 $F(x)$ 后,在满足非内共振条件下,线性自治系统的所有谱子流形均可拓展得到相应的非线性谱子流形^[20-22],如图 5 所示. 需强调的是,线性系统中最光滑的谱子流形 E_1 由直线拓展为与 E_1 相切的曲线,因此自动表征了从坐标 y 和主坐标 x 之间的耦合关系,故可利用 $W(E_1)$ 实现精确降阶. 这类拓展同样适用于任意有限维系统.

从图 5 可以看到,所有的慢谱子流形 $W(E_1)$ 和 $W(E_1; c)$ 均与谱子空间 E_1 (x 轴)相切于坐标原点. 在结构动力学中,慢谱子空间对应于衰减较慢的低阶线性模态,慢谱子流形则对应由低阶线性模态基于不变性拓展得到的非线性模态. 线性模态基于不变性拓展得到的非线性模态亦被称为 Shaw-Pierre 不变流形^[17]. 基于前述分析可知,非

线性模态通常具有无穷多个,其中存在一个最光滑的非线性模态,即主谱子流形,它与非线性模型降阶紧密相关^[20-22]. 为简单起见,若不加特殊说明,后续的谱子流形均指光滑性最好的主谱子流形.

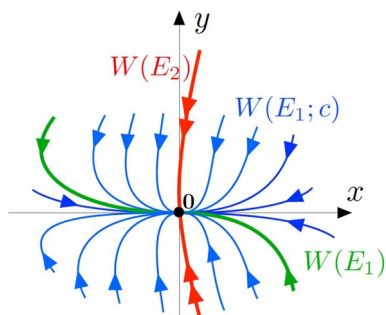


图 5 二维非线性系统的谱子空间和谱子流形. 这里不同颜色的谱子流形由图 4 中线性系统相应的谱子流形拓展得到^[20]
Fig. 5 Spectral submanifolds of 2-dimensional system with smooth nonlinearities added to (4). They are obtained from Fig. 4 with added nonlinearities^[20]

2.3 非自治系统

非线性系统通常还受到外部激励和载荷作用,此时(1)被修改为如下形式

$$\dot{x} = Ax + F(x) + F^{\text{ext}}(t, x). \quad (7)$$

自治系统的谱子流形以平衡点为锚点(anchor point). 当外激励为小振幅周期性激励时,即 $F^{\text{ext}} = G(\Omega t, x)$,双曲型平衡点摄动为具有相同稳定性的周期解^[21,23],相应的自治谱子流形在满足非内共振条件下摄动为周期性变化的谱子流形^[21],如 $W(E_1)$ 变成 $W(E_1, \Omega t)$. 类似的,当外激励为小振幅概周期激励时,自治系统的平衡点摄动为具有相同稳定性的环面(概周期解)^[21,23],相应的自治谱子流形在满足非内共振条件下摄动为概周期变化的谱子流形^[21],如 $W(E_1)$ 变成 $W(E_1, \Omega_1 t, \Omega_2 t)$. 针对周期或概周期激励,降阶主子空间(主模态)的选取需考虑激励频率和固有频率的共振关系,并在此基础上计入固有频率之间的内共振关系.

针对更一般情形,当 $F^{\text{ext}}(t, x)$ 幅值较小或者变化缓慢时,对应谱子流形的锚点由平衡点变成一条可显式求解的稳态轨迹,而自治谱子流形则成为时变的谱子流形^[24]. 基于此可进一步建立随机振动的谱子流形降阶理论^[25],也为软体机器人的谱子流形降阶控制奠定了理论基础.

2.4 约束动力系统

以上的谱子流形理论均基于显式微分方程. 针

对约束动力系统,控制方程常为微分-代数方程.从流体动力学中的不可压缩流动^[26]到复杂多体系统动力学^[27],约束动力系统广泛存在.谱子流形理论已被拓展到约束动力系统,通过推导微分-代数方程和转化的微分方程之间的等价关系,可建立约束动力系统的谱子流形降阶理论^[28].

从线性系统谱分析来看,约束动力系统具有约束模态(即微分-代数方程框架下位移为零而拉式乘子非零的模态)^[28],其相应的特征值趋于无穷大,与降阶的慢谱子空间无关,因此在选降阶主子空间和判别共振关系时需移除这些模态^[28].

2.5 非光滑动力系统

在上述谱子流形理论的讨论中,我们假定了控制方程非线性项的光滑性.非光滑是复杂系统的一类重要非线性特征.针对余维1的非光滑情形(即非光滑事件由单个方程描述,如碰撞面等),已拓展发展了相应的谱子流形理论^[29],其基本思路如图6所示.通过将非光滑系统在事件面两侧分解为两个光滑系统,然后将相应的谱子流形进行组合拼接可得到非光滑系统的整体谱子流形,基于该整体谱子流形可构造低维降阶模型.

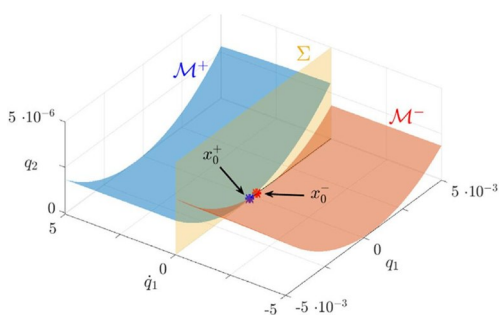


图6 非光滑系统的谱子流形^[29]

Fig. 6 Spectral submanifolds of non-smooth dynamical system^[29]

2.6 无穷维动力系统

无穷维动力系统的控制方程为非线性的偏微分方程,其分析难度极大,故无穷维动力系统的谱子流形理论研究相对较少,只针对特定形式的无穷维动力系统建立了谱子流形理论. Kogelbauer 和 Haller 考虑了非线性地基上的瑞利简支梁,发现在特定阻尼情形下可在巴拿赫空间中建立谱子流形理论^[30]. Buza 讨论了 Navier-Stokes 方程的谱子流形理论,在无内共振条件下证明了具有 C^1 光滑性的谱子流形的存在性^[31]. 时滞系统也是一类无穷

维动力系统,其谱子流形理论尚未完善,但发展了基于算子微分方程^[32]和常微分方程近似^[33]的谱子流形降阶方法,并通过数值算例验证了降阶的有效性.

3 谱子流形降阶方法

如上节所示,主慢谱子流形是光滑性最好的低维吸引性流形,其数学上的存在性和唯一性条件清晰,为发展低维精确可靠的降阶模型提供了坚实理论基础.本节拟介绍基于谱子流形降阶的主要步骤,并综述在方程驱动和数据驱动两个框架下的谱子流形降阶方法.

3.1 谱子流形降阶方法的主要步骤

谱子流形降阶的主要步骤见图7,下面分别给出具体介绍.

3.1.1 选择主子空间

模型降阶需选用慢谱子流形,因此首先需计算线性系统的特征值,以便确定其对应谱子空间.将特征值实部按从大到小排序,从中选择特征值实部较大的慢谱子空间作为降阶的主子空间,剩余的特征向量(模态)构成从子空间.判别主子空间和从子空间的特征值是否存在共振关系,若存在,则需将共振模态纳入主子空间.针对自由振动,通常来说选取低阶模态作为主子空间即可.对于周期或概周期激励的受迫振动情形,则需选取主共振模态作为主子空间开展降阶.

3.1.2 计算谱子流形及降阶模型

在选定主子空间后,可利用其对应的谱子流形实现低维精确降阶.如第1节所述,需确定降阶坐标到原系统高维状态向量或观测量的映射 W ,即谱子流形的参数化映射,并进一步推导谱子流形上的内禀动力学,即降阶动力学向量场 R .这两个核心要素可在方程驱动或数据驱动框架下获得,在3.2和3.3小节中将分别给出详细介绍.

3.1.3 基于降阶模型预测动力学响应

在获得谱子流形的参数化映射和降阶动力学模型后,可利用降阶模型预测原复杂系统的非线性动力学行为,包括自治系统的响应和非自治系统的动态演化.以结构非线性振动为例,可提取骨架曲线、频响曲线、分岔、概周期和混沌等复杂运动.还可利用降阶模型开展动力学设计,如软体机器人的

控制设计. 第 4 节将详细介绍谱子流形降阶方法在复杂非线性动力系统中的应用.



图 7 谱子流形降阶流程图

Fig. 7 Flowchart for model reduction via SSMs

3.2 基于方程驱动的谱子流形降阶

在方程驱动的框架下, 系统的控制方程已知, 故线性系统的谱可通过求解特征值问题得到. 按照 3.1.1 小节中给定的方法选择降阶主子空间. 然后利用不变性方程求解谱子流形的参数化映射和降阶动力学模型. 以非线性自治系统为例介绍计算流程. 由于谱子流形满足不变性, 可将重构映射(3)和降阶动力学(2)代入原系统的控制方程(1), 得到如下的偏微分方程

$$\partial_p \mathbf{W}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{p}) = \mathbf{A}\mathbf{W}(\mathbf{p}) + \mathbf{F}[\mathbf{W}(\mathbf{p})]. \quad (8)$$

利用参数化方法^[34-36]求解上述不变性方程. 由于流形和降阶动力学均光滑, 对 $\mathbf{W}$ 和 $\mathbf{R}$ 进行泰勒展开:

$$\mathbf{W}(\mathbf{p}) = \sum_m \mathbf{W}_m \mathbf{p}^m, \quad \mathbf{R}(\mathbf{p}) = \sum_m \mathbf{R}_m \mathbf{p}^m. \quad (9)$$

其中 $\mathbf{W}_m \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{R}_m \in \mathbb{C}^m$, $m \in \mathbb{N}_0^m$ 为多重指标向量, $\mathbf{p}^m = p_1^{m_1} \cdots p_m^{m_m}$, $|m| = m_1 + \cdots + m_m$. 接下来需确定泰勒级数的展开系数. 当 $\mathbf{F}$ 为多项式函数时, 通过将式(9)代入偏微分方程(8)并根据多项式 $\mathbf{p}^m$ 匹配可得到关于待定系数的线性代数方程组. 针对线性展开项 ($|m|=1$), $\mathbf{W}_m$ 和主子空间对应的特征向量相关, $\mathbf{R}_m$ 则和主子空间对应的特征值相关, 然后可递归求解得到高阶项的展开系数. 由于推导得到的线性代数方程组是欠定的方程组, 用户可自行选择流形的参数化方式, 从而获得规范型形式的降阶动力学. 关于不同的参数化形式的选择和讨论, 可参考文献[36, 37].

针对含周期或概周期外力 $\mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\Omega}t, \mathbf{x})$ 的非自治系统, 重构映射(3)可更新为

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}(\mathbf{p}) + \mathbf{W}_c(\mathbf{p}, \boldsymbol{\Omega}t), \quad (10)$$

而降阶动力学更新为

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}(\mathbf{p}) + \mathbf{R}_c(\mathbf{p}, \boldsymbol{\Omega}t), \quad (11)$$

不变性方程(8)也需进行相应的更新. 通过利用泰勒一傅里叶级数对 $\mathbf{W}_c(\mathbf{p}, \boldsymbol{\Omega}t)$ 和 $\mathbf{R}_c(\mathbf{p}, \boldsymbol{\Omega}t)$ 进行展

开, 并代入更新的不变性方程亦可通过递归求解得到展开系数. 具体求解过程可见文献[38, 39]. 针对更一般的非自治系统, 根据不变性方程求解谱子流形降阶模型的详细步骤可见文献[24].

方程(8)给出的降阶模型直接基于物理坐标, 这保留了非线性函数 $\mathbf{F}$ 的特性, 如有限元模型中的稀疏特征. 早期的谱子流形降阶计算限定在模态坐标下, 即 $\mathbf{x}$ 为模态坐标向量而 $\mathbf{A}$ 为由特征值构成的对角矩阵^[38, 40-42]. 这类计算方法需计算模态转换矩阵, 且模态转换会破坏 $\mathbf{F}$ 的稀疏性, 不适用于高维的数值离散模型^[43]. 为突破该局限, 近年来发展了直接基于物理坐标的谱子流形降阶计算方法^[39, 43-45], 该方法只需要计算主子空间对应的特征向量, 且保持了 $\mathbf{F}$ 的稀疏性, 可递归计算任意维谱子流形的任意阶展开, 实现了谱子流形降阶的自动化生成.

针对机械系统, 在假定比例阻尼矩阵、对称质量矩阵、刚度矩阵、非线性 $\mathbf{F}$ 是位移的二次和三次函数后, Vizzaccaro 等发展了计算不变流形的直接参数化方法 (direct parameterization of invariant manifolds, DPIM)^[46-48], 其也被成功用于高维有限元问题的降阶. 而前述文献[39, 43-45]中发展的基于物理坐标的谱子流形计算方法则适用于通用动力系统, 对质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵和非线性 $\mathbf{F}$ 的特征不作限定, 被成功用于悬臂输流管等含陀螺力和循环力 (阻尼和刚度矩阵非对称) 系统的降阶^[49], 也被用于基于黏弹性本构建模的含非线性阻尼力的板壳结构非线性振动分析^[45].

参数化方法也可用于计算以自治系统极限环为降阶锚点的谱子流形及其降阶动力学^[50, 51]. 研究表明直接代数计算相比基于弗洛凯标准型计算效率更高, 更适用于高维系统, 通过转子与定子摩擦系统等算例验证了方法的有效性.

3.3 基于数据驱动的谱子流形降阶

在数据驱动框架下, 需从数据中提取谱子流形及其降阶模型. 首先对数据预处理, 当观测量维度较低时需借助时滞嵌入定理进行扩维^[52]. 由于慢谱子流形是具有吸引性的不变流形, 数据采集通常采用不同初始条件下自治系统在平衡点附近的轨迹. 基于这些数据获得自治系统的谱子流形降阶模型, 然后基于规范型理论来外推预测受迫振动

响应^[53].

结合图7给出的流程图,首先需选定降阶主子空间.根据自治系统瞬态轨迹的时间频率谱对信号进行截断以确保训练用的轨迹靠近目标谱子流形,并根据频率谱判别系统是否含有内共振关系,从而确定主子空间的维数.早期的谱子流形数据驱动建模同时拟合映射 $\mathbf{W}$ 和向量场 $\mathbf{R}$,优化求解困难,鲁棒性较差^[54].Cenedese等人提出了一套新的拟合框架^[53]来突破这些难点,显著提升了数据驱动谱子流形的应用前景.该新框架的核心思想是先拟合映射 $\mathbf{W}$ 再拟合向量场 $\mathbf{R}$,从而降低了优化求解的难度.下面简要介绍该拟合框架.

该拟合框架采用图形样式对流形进行参数化描述($m=1$ 的特殊情形见图8),即通过将观测向量投影到主子空间来定义降阶坐标

$$\mathbf{p} = \mathbf{V}^T \mathbf{y}, \quad (12)$$

其中 $\mathbf{V}$ 是主子空间的基向量.然后将映射 $\mathbf{W}$ 分解为子空间内的投影部分和垂直于子空间的部分,其中垂直于子空间的部分用降阶坐标 $\mathbf{p}$ 的非线性多项式描述

$$\mathbf{y} = \mathbf{V}\mathbf{p} + \mathbf{M}_{2:q}\mathbf{p}^{2:q}, \quad \mathbf{V}^T \mathbf{M}_{2:q} = \mathbf{0}. \quad (13)$$

这里 $\mathbf{p}^{2:q}$ 表示所有从2阶到 q 阶的单项式构成的列向量,如 $m=2, q=3$ 时,有

$$\mathbf{p}^{2:3} = [p_1^2, p_1, p_2, p_2^2, p_1^3, p_1^2 p_2, p_1 p_2^2, p_2^3]^T, \quad (14)$$

$\mathbf{M}_{2:q}$ 则为这些非线性项的系数矩阵.由于谱子流形为不变流形,可通过极小化轨迹到目标流形的距离来拟合得到 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{M}_{2:q}$.然后根据式(12)得到降阶坐标 $\mathbf{p}$ 的轨迹,并利用多项式拟合来确定降阶动力学(2).此时得到的动力学(2)不具有规范型形式,可进一步通过极小化共轭误差来拟合规范型坐标变换和规范型动力学.基于规范型理论,可直接修正降阶动力学,从而外推预测系统的受迫振动.这意味着基于自由振动数据训练的模型可以直接

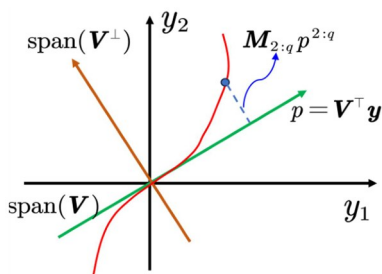


图8 图形样式参数化流形

Fig. 8 Graph-style parameterization of manifold

用于预测受迫振动响应,具有较强的泛化能力.

以上框架中的流形拟合和规范型拟合均为非凸优化问题,在处理含高维观测量的问题时求解难度大.为突破该难点,Axâs等人改进了该拟合框架,发展了谱子流形数据驱动建模的快速算法^[55],下面对该快速算法做简要介绍.针对流形拟合难点,该算法利用正交模态分解得到主子空间的基底 $\mathbf{V}$,从而将流形拟合简化为标准的多项式拟合问题,可直接利用伪逆进行求解.针对规范型拟合难点,将拟合的降阶动力学(2)在方程驱动框架下进行规范型变换.需指出的是,这种基于方程变换得到的规范型模型相比通过优化拟合得到的规范型模型具有较小的收敛区域.

针对动力系统的控制问题,将降阶动力学(2)修改为如下形式

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}(\mathbf{p}) + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (15)$$

这里 $\mathbf{u}$ 代表控制输入.在拟合完自治系统的降阶动力学后,进一步拟合控制矩阵 $\mathbf{B}$ 来得到含控制输入的降阶模型^[56],然后利用降阶模型(15)来开展控制设计.这一框架已被成功用于软体机器人的实时控制,将在第4节给出具体的介绍.

3.4 软件集成

针对基于方程和数据的谱子流形降阶方法,分别发展了相应的模型降阶工具箱 SSMTTool^[57]和 SSMLearn^[53,58](软件徽标见图9),本节对两个工具箱做简要介绍.



图9 谱子流形降阶工具箱

Fig. 9 SSM reduction toolboxes

SSMTTool是方程驱动框架下基于MATLAB的开源模型降阶工具箱,以控制方程为输入,以参数化方法为核心算法,可在物理坐标下直接计算任意维谱子流形降阶模型.该工具箱集成了一套开源有限元程序 YetAnotherFEcode^[59]和动力系统非线性分析和优化设计平台 COCO^[60-62],利用降阶模型对复杂系统的非线性动力学给出精细分析.该工具箱在近期还发展了和商用有限元软件 COMSOL 的接口,成功实现百万自由度复杂结构的模型降阶^[45].

SSMLearn 是数据驱动框架下的谱子流形降阶工具箱,支持 MATLAB 和 Python 的两个平台,并融合了 fastSSM 这一数据驱动降阶的快速算法^[55]. SSMLearn 以数据为输入,并提供数据预处理模块来帮助用户选择主子空间的维数和对信号进行预处理.在给定算法参数后,基于 3.3 节给出的方法对谱子流形及其动力学进行拟合. SSMLearn 还融合了 COCO 和 SSMTool,以方便利用降阶模型来开展复杂系统非线性动力学响应的预测.

4 在复杂非线性动力系统中的应用

谱子流形模型降阶近年来在高维非线性振动、流体动力学、软体机器人控制中获得成功应用,下面分别给出具体介绍.

4.1 高维非线性振动

基于谱子流形降阶可显著缩减高维非线性振动的自由度数.对于无内共振情形,高维非线性振动可降阶到单个自由度(相空间为 2 维);对于含内共振情形,降阶模型则通常是两个自由度(相空间为 4 维),故可利用降阶模型实现高维非线性振动的高效预测^[43,44].考虑简谐激励下的受迫振动时,还可对降阶模型实现动力学简化,即原系统的周期解和概周期解被转化为降阶模型的平衡点和极限环,从而大大降低了分岔分析的难度^[63].

针对自由振动,谱子流形降阶建立在具有吸引性的不变流形上,因此可利用降阶模型预测系统在平衡点附近的瞬态响应^[53,64].对于无内共振的情形,谱子流形降阶模型为单自由度,可解析提取骨架曲线^[41,54],并解析预测颤振极限环^[49].已成功提取十三万自由度机翼非线性有限元模型^[43]和百万自由度 MEMS 陀螺仪^[45]的骨架曲线(见图 10),并成功预测了机翼和轮胎的颤振极限环^[65].

针对受迫振动的稳态解,谱子流形降阶可在无内共振时解析提取给定激励幅值下的受迫振动幅频响应曲线^[41](具体应用见图 10)和以激励幅值和频率为参数的响应曲面^[66],并解析预测频响曲线中的孤岛^[42].针对含内共振系统,利用降阶系统平衡点的参数延续可高效提取受迫振动响应,加速比高达数万^[44].利用降阶模型也可以实现对周期解分岔进行快速预测,高效提取系统的概周期运动并

检验其稳定性和分岔^[63,67],为高维非线性系统的概周期运动分析提供了新思路.基于谱子流形降阶模型也能对非线性振动中的混沌这类复杂运动进行预测^[67,68].

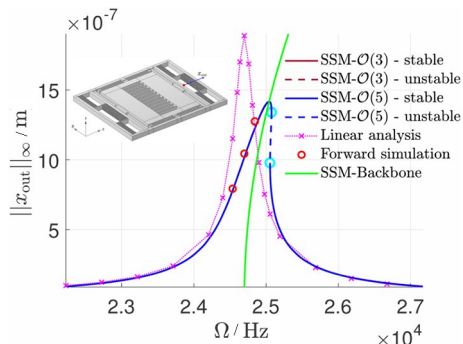


图 10 百万自由度 MEMS 陀螺仪骨架及幅频响应曲线 (SSM 降阶到单个自由度, Forward simulation 为 COMSOL 数值模拟). SSM 三阶计算仅耗时 2 小时而单次 COMSOL 数值模拟耗时近 90 小时^[43]

Fig. 10 Forced response and backbone curves for the primary resonance of the first vibration mode of the MEMS gyroscope with more than 1 million DOFs. Here, the computational time for the SSM reduction at cubic truncation is 2 hours, while each forward simulation via COMSOL took nearly 90 hours^[43]

针对参激振动,利用谱子流形降阶模型的平凡周期解的分岔可判别稳定性区域,并进一步提取失稳后产生的非平凡周期解的频响曲线.这已被成功用于机械振子和梁等连续结构的参激振动分析,且适用于外共振和参激共振共存的情形^[39].

针对随机振动,在假定随机载荷一致有界的前提下,可利用随机谱子流形构造低维降阶模型^[25].通过对降阶模型的蒙特卡洛模拟可高效提取原高维系统随机响应的功率谱密度. Xu 等利用梁和板等有限元模型的随机振动论证了谱子流形在随机振动分析中的计算效率和精度^[25].

4.2 流体动力学

基于数据驱动的谱子流形模型降阶被成功用于流体动力学预测,包括圆柱绕流中的涡街现象^[53],平面库埃特流动的平衡点共存及平衡点之间的连接和迁移^[69],管道流中的混沌吸引子和层流吸引子的边界^[70], Kuramoto-Sivashinsky 方程描述的混沌运动^[68].从上述应用可以看到,基于谱子流形的降阶可有效预测具有多稳态解共存的复杂非线性动力学现象.

谱子流形降阶也被成功用于流固耦合动力学. Li 等人在方程和数据驱动框架下对输流管道的流

致振动进行了分析^[49,71,72],预测了悬臂输流管在颤振前后的动力学行为,发现了悬臂管道概周期运动的同宿轨道和不变环两类全局分岔^[49],建立了以流速为变量的参数化谱子流形降阶模型^[71],发展了针对简支输流管道屈曲后动力学的降阶模型^[72].

流固耦合方面的应用还包括液体晃动力学^[53,55]和流水中倒立的柔性旗^[73].这两个应用均以实验数据为基础,在液体晃动力学的应用中成功利用基于自由晃动获得的降阶模型预测了基础激励下液体晃动的力学行为,包括液体自由表面的时间历程^[55];水中倒立柔性旗则成功捕捉了三个平衡点(一个鞍点、两个不稳定焦点)和大范围极限环运动共存的复杂动力学现象,并进一步对系统的混沌运动进行了预测和分析^[73](见图11).

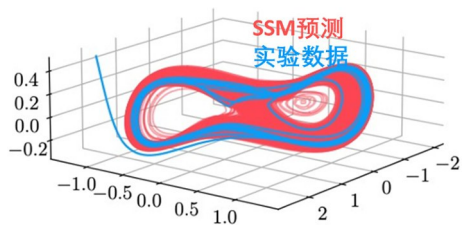


图11 SSM预测流水中倒立柔性旗的混沌运动^[73]

Fig. 11 SSM prediction for the chaotic dynamics of an inverted flag from experiments^[73]

4.3 软体机器人控制

谱子流形降阶在控制设计中的应用研究刚起步,包括振动控制^[74]和轨迹跟踪^[75-78],这里对其在软体机器人控制中的应用做简要介绍.

Alora等人利用谱子流形降阶对连续型机器人的轨迹控制开展了系列研究^[56,75,76],分别采用仿真和实验数据获得了降阶模型.针对含控制输入的降阶模型(15),在模型预测控制框架下设计了机器人的开环和闭环反馈控制律,通过复杂轨迹跟踪任务验证了谱子流形降阶相比于动态模态分解(DMDc)、Koopman算子和轨迹分段线性化等线性模型降阶方法具有更好的精度和计算效率.

Yan等人将谱子流形降阶用于软体手术机械臂的运动补偿,也发现了谱子流形降阶方法相比于线性降阶方法的优势^[77].谱子流形降阶控制设计框架也被成功用于由张拉结构组成的连续型机械臂^[78],结果表明谱子流形降阶相比基于正交模态分解(POD)模型降阶具有更高的精度和效率.

5 总结和展望

本文主要介绍了谱子流形降阶这一非线性模型降阶方法.通过回顾相关文献,从谱子流形的理论、模型降阶方法和在复杂非线性动力系统中的应用等层面介绍了研究进展.谱子流形降阶方法创立至今不足十年,逐渐呈现出突破高维非线性难点的重要潜力,为分析自然和工程中的复杂非线性动力学问题提供了新思路,但还有许多问题值得深入研究和探讨,可在以下几个方面继续开展研究:

(1)非线性动力学反问题.动力学反问题包括优化设计、模型更新^[79]、不确定性量化和控制设计等.这类问题的共同之处是需要不同的参数(如设计变量和控制输入)下进行多次模拟仿真,可充分发挥模型降阶的优势.本文作者近期推导了谱子流形降阶的显式灵敏度^[80],为高维非线性动力系统的反问题研究奠定了基础,并实现了融合流形降阶和拓扑优化来调控骨架曲线的软硬特征^[81].此研究方向刚起步,在非线性动力学反问题方面有许多工作需要进一步开展.

(2)非光滑非线性动力学.非光滑非线性是复杂系统的一类重要非线性来源,现有的谱子流形降阶聚焦光滑非线性问题,针对非光滑非线性系统的研究很少^[29,82].非光滑通常体现为局部或界面处的非线性,通过融合局部非线性模型降阶方法和谱子流形降阶,有望发展适用于同时含局部非光滑非线性和分布式几何非线性复杂问题的低维降阶模型.

(3)柔性多体动力学.谱子流形理论已拓展到约束动力系统.柔性多体系统的控制方程通常为微分一代数方程的形式,也是一类约束动力系统.谱子流形降阶方法已被成功用于多体系统降阶^[28,83],但现有的研究结果主要还是聚焦系统在平衡点附近的运动.针对柔性多体动力学的大范围刚体运动和弹性振动强耦合、系统平衡点缺失等特征,需研究谱子流形的全局延拓理论和全局谱子流形的快速计算方法来服务柔性多体动力学降阶.

(4)多物理场耦合动力学.谱子流形降阶理论的建立基于一般的动力系统,已被成功用于固体力学和流体力学等领域,也有望被用于多物理场耦合动力学,如力电耦合动力学^[84]和流固声耦合动力学等.多物理场耦合的控制方程在空间离散后通常也是微分一代数方程形式,因此可在约束动力系统

框架下建立降阶模型^[28,84]. 现有的流固耦合谱子流形降阶多为数据驱动, 方程驱动框架下的流固耦合问题谱子流形模型降阶还有待进一步发展.

参考文献

- [1] 张文明, 胡开明. MEMS/NEMS 谐振器技术[M]. 北京: 科学出版社, 2023.
ZHANG W M, HU K M. MEMS/NEMS resonator technology [M]. Beijing: Science Press, 2023. (in Chinese)
- [2] 曹登庆, 白坤朝, 丁虎, 等. 大型柔性航天器动力学与振动控制研究进展[J]. 力学学报, 2019, 51(1): 1—13.
CAO D Q, BAI K C, DING H, et al. Advances in dynamics and vibration control of large-scale flexible spacecraft [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2019, 51(1): 1—13. (in Chinese)
- [3] 吴志刚, 蒋建平, 邬树楠, 等. 航天结构空间组装动力学与控制研究进展[J]. 力学进展, 2024, 54(2): 344—390.
WU Z G, JIANG J P, WU S N, et al. Review on dynamics and control of space structure in the process of on-orbit assembly [J]. Advances in Mechanics, 2024, 54(2): 344—390. (in Chinese)
- [4] 唐冶, 高传康, 丁千, 等. 输流管道动力学与控制的最新进展[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(6): 18—30.
TANG Y, GAO C K, DING Q, et al. Review on dynamic and control of pipes conveying fluid [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(6): 18—30. (in Chinese)
- [5] 陈伟, 曹润青, 胡嘉纯, 等. 细长输流管道大变形动力学研究进展[J]. 力学进展, 2025, 55(1): 113—174.
CHEN W, CAO R Q, HU J C, et al. Recent advances in research on large-deformation dynamics of slender pipes conveying fluid [J]. Advances in Mechanics, 2025, 55(1): 113—174. (in Chinese)
- [6] 朱仁传, 缪国平, 范菊, 等. 海上浮式风力机及其动力学问题[J]. 应用数学和力学, 2013, 34(10): 1110—1118.
ZHU R C, MIAO G P, FAN J, et al. Offshore floating wind turbines and related dynamic problems [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2013, 34(10): 1110—1118. (in Chinese)
- [7] YUAN J, GASTALDI C, DENIMAL GOY E, et al. Friction damping for turbomachinery: a comprehensive review of modelling, design strategies, and testing capabilities [J]. Progress in Aerospace Sciences, 2024, 147: 101018.
- [8] 朱萍萍, 仲政. 双网络水凝胶损伤本构模型研究进展[J]. 力学季刊, 2021, 42(1): 1—13.
ZHU P P, ZHONG Z. Progress in the damage constitutive modelling of double-network hydrogels [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2021, 42(1): 1—13. (in Chinese)
- [9] LI Q H, SIGMUND O, JENSEN J S, et al. Reduced-order methods for dynamic problems in topology optimization: a comparative study [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2021, 387: 114149.
- [10] 张皓, 李东升, 李宏男. 有限元模型修正研究进展: 从线性到非线性[J]. 力学进展, 2019, 49(1): 542—575.
ZHANG H, LI D S, LI H N. Recent progress on finite element model updating: From linearity to nonlinearity [J]. Advances in Mechanics, 2019, 49(1): 542—575. (in Chinese)
- [11] SUN Y H, LU Y, SONG Z G. Review on the theories and applications of dynamic condensation and component mode synthesis methods in solving FEM-based structural dynamics [J]. Acta Mechanica Sinica, 2023, 36(3): 361—389.
- [12] SCHMID P J. Dynamic mode decomposition and its variants [J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2022, 54: 225—254.
- [13] 于海, 陈予恕. 高维非线性动力学系统降维方法的若干进展[J]. 力学进展, 2009, 39(2): 154—164.
YU H, CHEN Y S. Recent developments in dimension reduction methods for high-dimension dynamical systems [J]. Advances in Mechanics, 2009, 39(2): 154—164. (in Chinese)
- [14] TOUZÉ C, VIZZACCARO A, THOMAS O. Model order reduction methods for geometrically nonlinear structures: a review of nonlinear techniques [J]. Nonlinear Dynamics, 2021, 105(2): 1141—1190.
- [15] GIVOIS A, GROLET A, THOMAS O, et al. On the frequency response computation of geometrically nonlinear flat structures using reduced-order finite element models [J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 97

- (2): 1747—1781.
- [16] XU G Y, ZHU W D. Nonlinear and time-varying dynamics of high-dimensional models of a translating beam with a stationary load subsystem [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2010, 132(6): 061012.
 - [17] SHAW S W, PIERRE C. Normal modes for nonlinear vibratory systems [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, 164(1): 85—124.
 - [18] MIKHLIN Y, AVRAMOV K. Nonlinear normal modes of vibrating mechanical systems: 10 years of progress [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2024, 76(5): 050801.
 - [19] MILLÁN D, ARROYO M. Nonlinear manifold learning for model reduction in finite elastodynamics [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, 261: 118—131.
 - [20] HALLER G. Nonlinear spectral model reduction from equations and data-with applications to solids, fluids, and controls [M]. Philadelphia, PA, USA: SIAM Press, 2025.
 - [21] HALLER G, PONSIOEN S. Nonlinear normal modes and spectral submanifolds: existence, uniqueness and use in model reduction [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 86(3): 1493—1534.
 - [22] HALLER G, KASZÁS B, LIU A H, et al. Nonlinear model reduction to fractional and mixed-mode spectral submanifolds [J]. *Chaos*, 2023, 33(6): 063138.
 - [23] GUCKENHEIMER J, HOLMES P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields [M]. New York: Springer New York, 1983.
 - [24] HALLER G, KAUNDINYA R S. Nonlinear model reduction to temporally aperiodic spectral submanifolds [J]. *Chaos*, 2024, 34(4): 043152.
 - [25] XU Z W, KAUNDINYA R S, JAIN S, et al. Nonlinear model reduction to random spectral submanifolds in random vibrations [EB/OL]. (2024-07-04) [2024-10-11]. <https://arxiv.org/abs/2407.03677v1>.
 - [26] ASCHER U M, PETZOLD L R. Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations [M]. Philadelphia, PA, USA: SIAM Press, 1998, 61.
 - [27] 田强, 刘钺, 李培, 等. 多柔体系统动力学研究进展与挑战[J]. *动力学与控制学报*, 2017, 15(5): 385—405.
 - TIAN Q, LIU C, LI P, et al. Advances and challenges in dynamics of flexible multibody systems [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(5): 385—405. (in Chinese)
 - [28] LI M W, JAIN S, HALLER G. Model reduction for constrained mechanical systems via spectral submanifolds [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2023, 111(10): 8881—8911.
 - [29] BETTINI L, CENEDESE M, HALLER G. Model reduction to spectral submanifolds in piecewise smooth dynamical systems [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2024, 163: 104753.
 - [30] KOGELBAUER F, HALLER G. Rigorous model reduction for a damped-forced nonlinear beam model: an infinite-dimensional analysis [J]. *Journal of Nonlinear Science*, 2018, 28(3): 1109—1150.
 - [31] BUZA G. Spectral submanifolds of the navier-stokes equations [J]. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2024, 23(2): 1052—1089.
 - [32] SZAKSZ B, OROSZ G, STEPAN G. Spectral submanifolds in time delay systems [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2025, 113: 14265—14286.
 - [33] TANG Y, LI M. Model reduction of nonlinear time-delay systems via ODE approximation and spectral submanifolds [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2025, 477: 134701.
 - [34] CABRÉ X, FONTICH E, DE LA LLAVE R. The parameterization method for invariant manifolds I: Manifolds associated to non-resonant subspaces [J]. *Indiana University Mathematics Journal*, 2003, 52(2): 283—328.
 - [35] CABRÉ X, FONTICH E, DE LA LLAVE R. The parameterization method for invariant manifolds III: overview and applications [J]. *Journal of Differential Equations*, 2005, 218(2): 444—515.
 - [36] HARO À, CANADELL M, FIGUERAS J L, et al. The parameterization method for invariant manifolds [M]. Cham, Switzerland: Springer, 2016.
 - [37] STOYCHEV A K, RÖMER U J. Failing parameterizations: what can go wrong when approximating spectral submanifolds [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2023, 111(7): 5963—6000.
 - [38] PONSIOEN S, JAIN S, HALLER G. Model reduction to spectral submanifolds and forced-response calculation in high-dimensional mechanical systems [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, 488: 115640.

- [39] THURNHER T, HALLER G, JAIN S. Nonautonomous spectral submanifolds for model reduction of nonlinear mechanical systems under parametric resonance [J]. *Chaos*, 2024, 34(7): 073127.
- [40] PONSIOEN S, PEDERGNANA T, HALLER G. Automated computation of autonomous spectral submanifolds for nonlinear modal analysis [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, 420: 269—295.
- [41] BREUNUNG T, HALLER G. Explicit backbone curves from spectral submanifolds of forced-damped nonlinear mechanical systems [J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2018, 474(2213): 20180083.
- [42] PONSIOEN S, PEDERGNANA T, HALLER G. Analytic prediction of isolated forced response curves from spectral submanifolds [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 98(4): 2755—2773.
- [43] JAIN S, HALLER G. How to compute invariant manifolds and their reduced dynamics in high-dimensional finite element models [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2022, 107(2): 1417—1450.
- [44] LI M W, JAIN S, HALLER G. Nonlinear analysis of forced mechanical systems with internal resonance using spectral submanifolds, Part I: Periodic response and forced response curve [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2022, 110(2): 1005—1043.
- [45] LI M W, THURNHER T, XU Z, et al. Data-free non-intrusive model reduction for nonlinear finite element models via spectral submanifolds [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2025, 434: 117590.
- [46] VIZZACCARO A, SHEN Y C, SALLES L, et al. Direct computation of nonlinear mapping via normal form for reduced-order models of finite element nonlinear structures [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, 384: 113957.
- [47] VIZZACCARO A, GOBAT G, FRANGI A, et al. Direct parametrisation of invariant manifolds for non-autonomous forced systems including superharmonic resonances [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, 112(8): 6255—6290.
- [48] OPRENI A, VIZZACCARO A, TOUZÉ C, et al. High-order direct parametrisation of invariant manifolds for model order reduction of finite element structures; application to generic forcing terms and parametrically excited systems [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2023, 111(6), 5401—5447..
- [49] LI M W, YAN H, WANG L. Nonlinear model reduction for a cantilevered pipe conveying fluid; a system with asymmetric damping and stiffness matrices [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2023, 188: 109993.
- [50] WANG S, HONG L, JIANG J. Evaluation on spectral submanifold based reduced models of a rotor/stator rubbing system with cross-coupling stiffness [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2022, 228: 107486.
- [51] FAN S, HONG L, JIANG J. Model reduction of high-dimensional self-excited nonlinear systems using Floquet theory based parameterization method. *Nonlinear Dynamics*, 2025, 113(2): 1137—1161.
- [52] AXÅS J, HALLER G. Model reduction for nonlinearizable dynamics via delay-embedded spectral submanifolds [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2023, 111(24): 22079—22099.
- [53] CENEDESE M, AXÅS J, BÄUERLEIN B, et al. Data-driven modeling and prediction of non-linearizable dynamics via spectral submanifolds [J]. *Nature Communications*, 2022, 13(1): 872.
- [54] SZALAI R, EHRHARDT D, HALLER G. Nonlinear model identification and spectral submanifolds for multi-degree-of-freedom mechanical vibrations [J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical, and Engineering Sciences*, 2017, 473: 20160759.
- [55] AXÅS J, CENEDESE M, HALLER G. Fast data-driven model reduction for nonlinear dynamical systems [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2023, 111(9): 7941—7957.
- [56] ALORA J I, CENEDESE M, SCHMERLING E, et al. Data-driven spectral submanifold reduction for nonlinear optimal control of high-dimensional robots [C]//2023 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). New York: IEEE, 2023: 2627—2633.
- [57] JAIN S, LI M W, THURNHER T, et al. SSMTTool 2.6: Computation of invariant manifolds & their reduced dynamics in high-dimensional mechanics problems [EB/OL]. [2024-10-11]. <https://doi.org/10.5281/zenodo.13909795>
- [58] SSMLearn: Data-driven reduced order models for nonlinear dynamical systems [EB/OL]. [2024-10-11]. <https://github.com/haller-group/SSMLearn>

- [59] JAIN S, MARCONI J, TISO, P. YetAnotherFE-code [EB/OL]. [2024-10-11]. <https://doi.org/10.5281/zenodo.4011630>.
- [60] SCHILDER F, DANKOWICZ H, LI M. Continuation Core and Toolboxes (COCO) [EB/OL]. [2024-10-11]. <https://sourceforge.net/projects/cocotools>.
- [61] DANKOWICZ H, SCHILDER F. Recipes for continuation [M]. Philadelphia, PA, USA: SIAM Press, 2013.
- [62] AHSAN Z, DANKOWICZ H, LI M W, et al. Methods of continuation and their implementation in the COCO software platform with application to delay differential equations [J]. Nonlinear Dynamics, 2022, 107(4): 3181—3243.
- [63] LI M W, HALLER G. Nonlinear analysis of forced mechanical systems with internal resonance using spectral submanifolds, Part II: Bifurcation and quasi-periodic response [J]. Nonlinear Dynamics, 2022, 110(2): 1045—1080.
- [64] JAIN S, TISO P, HALLER G. Exact nonlinear model reduction for a von Kármán beam: Slow-fast decomposition and spectral submanifolds [J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 423: 195—211.
- [65] YANG A, AXÅS J, KÁDÁR F, et al. Modeling nonlinear dynamics from videos [EB/OL]. (2024-06-13) [2024-10-11]. <https://arxiv.org/abs/2406.08893>.
- [66] LI M W, JAIN S, HALLER G. Fast computation and characterization of forced response surfaces via spectral submanifolds and parameter continuation [J]. Nonlinear Dynamics, 2024, 112(10): 7771—7797.
- [67] LIANG H, JAIN S, LI M. Bifurcation analysis of quasi-periodic orbits of mechanical systems with 1:2 internal resonance via spectral submanifolds [J]. Nonlinear Dynamics, 2025, 113: 12609—12640.
- [68] LIU A H, AXÅS J, HALLER G. Data-driven modeling and forecasting of chaotic dynamics on inertial manifolds constructed as spectral submanifolds [J]. Chaos, 2024, 34(3): 033140.
- [69] KASZÁS B, CENEDESE M, HALLER G. Dynamics-based machine learning of transitions in Couette flow [J]. Physical Review Fluids, 2022, 7(8): L082402.
- [70] KASZÁS B, HALLER G. Capturing the edge of chaos as a spectral submanifold in pipe flows [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2024, 979: A48.
- [71] LI M W, WANG L. Parametric model reduction for a cantilevered pipe conveying fluid via parameter-dependent center and unstable manifolds [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2024, 160: 104629.
- [72] LI M W, YAN H, WANG L. Data-driven model reduction for pipes conveying fluid via spectral submanifolds [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2024, 277: 109414.
- [73] XU Z W, KASZÁS B, CENEDESE M, et al. Data-driven modelling of the regular and chaotic dynamics of an inverted flag from experiments [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2024, 987: R7.
- [74] SHEN C, LI M W. Active vibration control of nonlinear flexible structures via reduction on spectral submanifolds [EB/OL]. (2024-08-14) [2024-10-11]. <https://arxiv.org/abs/2408.07252>.
- [75] ALORA J I, CENEDESE M, SCHMERLING E, et al. Practical deployment of spectral submanifold reduction for optimal control of high-dimensional systems [J]. IFAC-PapersOnLine, 2023, 56(2): 4074—4081.
- [76] ALORA J I, CENEDESE M, HALLER G, et al. Discovering dominant dynamics for nonlinear continuum robot control [J]. npj Robotics, 2025, 3: 5.
- [77] YAN Y J, DING Q P, LI M W, et al. Refined motion compensation with soft laser manipulators using data-driven surrogate models [EB/OL]. (2024-07-02) [2024-10-11]. <https://arxiv.org/abs/2407.01891>.
- [78] 韩先浩, 王铭基, 彭海军, 等. 绳驱张拉整体柔性臂数据驱动谱子流形降阶[J/OL]. 哈尔滨工程大学学报, 1—10 [2025-07-21]. <https://link.cnki.net/urlid/23.1390.u.20250522.1656.002>.
- HAN X, WANG M, PENG H J, et al. Data-driven spectral submanifold reduction for cable-driven tensile fully flexible arm [J/OL]. Journal of Harbin Engineering University, 1—10 [2025-07-21]. <https://link.cnki.net/urlid/23.1390.u.20250522.1656.002>.
- [79] 王兴. 飞行器非线性振动试验与模型修正研究进展[J]. 力学进展, 2024, 54(4): 669—699.
- WANG X. Advances in vibration testing and model updating for nonlinear aerospace structures [J]. Advances in Mechanics, 2024, 54(4): 669—699. (in

Chinese)

[80] LI M W. Explicit sensitivity analysis of spectral submanifolds of mechanical systems [J]. Nonlinear Dynamics, 2024, 112(19): 16733—16770.

[81] POZZI M, MARCONI J, JAIN S, LI M, BRAGHIN F. Topology optimization of nonlinear structural dynamics with invariant manifold-based reduced order models [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2025, 68(4): 72.

[82] MORSY A A, XU Z, TISO P, et al. Data-Driven reduction of the finite-element model of a Tribomechadynamics benchmark problem [J]. Nonlinear Dynamics, 2025, doi: 10. 1007/s11071-025-11378-8.

[83] HAN X, PENG H, SONG N, LI M. Model reduction of multibody systems with large deformations via spectral submanifolds [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2025, 287: 109924.

[84] FRANGI A, COLOMBO A, VIZZACCARO A, et al. Reduced order modelling of fully coupled electromechanical systems through invariant manifolds with applications to microstructures [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2025, 126(3): e7641.