

非线性模型降阶理论

郭铁丁^{1†} 路宽² 李明武³

(1. 同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200240) (2. 西北工业大学 力学与土木建筑学院, 西安 710000)

(3. 南方科技大学 力学与航空航天工程系, 深圳 518055)

动力学与控制学科的研究对象往往属于多尺度/多物理场的复杂耦合系统,例如大型空间结构,航空发动机,大跨度桥梁,气弹/水弹/声振系统,软体机器,非均匀介质/超材料等.非线性作用与多体及物理场耦合诱导的高维非线性动力学系统,给响应预测、优化设计、不确定性量化、模型更新和控制系统设计带来巨大的挑战.非线性模型降阶(及相关的模态截断疑难)已经成为动力学基础理论应用于复杂工程问题的关键瓶颈.

同时,非线性模型降阶与现代动力学理论^[1]的诸多概念/方法存在密切联系^[2].中心流形是非线性模型降阶的基础工具,由此启发的非线性模态(NNMs)/不变流形理论框架^[3]对过去三十年的非线性动力学研究产生了深刻的影响.近年来不变流形方法与规范型理论^[4],谱子流形^[5],多尺度方法^[6]等非线性工具不断融合,并借鉴源于数学领域的流形参数化技术^[7],进一步衍生了非线性动力学系统的流形参数化模型降阶理论.它们与快-慢分解/动(静)缩聚^[8,9]一起构成了现代非线性模型降阶理论研究的主要侧面.非线性模型降阶理论研究进展所产生的影响可能遍及整个动力学领域.

另一方面,应用于流体力学的本征正交分解(POD)^[10],因其降阶的高效性和准确性广泛运用到众多非线性科学领域,已经成为非线性模型降阶和分析的重要工具^[11,12],并进一步与数据科学/人工智能结合,演变为数据驱动建模方法的重要组成部分.但在应对高维矩阵的特征分解产生了大量的计算荷载,高维数据引起的“维数灾难”仍然是核心困难之一,发展数据驱动的非线性模型降阶也成为重要的研究主题.

为促进非线性模型降阶理论研究的发展,《动力学与控制学报》组织了“非线性模型降阶理论”专刊,全方位报导非线性模型降阶的创新性研究成果和工程应用^[13-20].专刊既包括了基于不变流形的降阶方法(流形参数化方法^[15,18]、规范型方法^[13]等),也包括了基于快-慢分解的缩聚降阶方法^[17];专刊论文讨论了吸引子附近(长时间)渐近动力学的模型降阶,包括平衡点附近^[13,15,20]和周期解附近^[18],也讨论了有限时间瞬态动力学过程的模型降阶^[14,19];专刊论文讨论了非线性结构系统^[13,15-17,20],也涉及多体系统^[14,19]、转子系统^[18]、流体力学和软体机器人^[15];专刊论文讨论了知识驱动模型降阶(基于微分方程^[13-18]或基于变分原理^[19]),也讨论了数据驱动的模型降阶^[15],以及知识/数据融合模型降阶格式^[19].

专刊旨在推动不同学术流派观点和思想的交叉融合,以进一步启发和发展出围绕非线性模型降阶理论的共性概念和基础性工具/方法.由于时间和篇幅等因素,专刊尚难以反映非线性模型降阶领域的全部进展,例如以下主题虽没有涉及或详细讨论,但值得研究者关注:(1)多物理场耦合(气弹/水弹/热声等)系统的模型降阶;(2)高自由度机器人感知/运动规划/动力学建模与控制中的模型降阶;(3)复杂介质(流体/非均匀材料等)的模型降阶;(4)机器学习/深度学习与模型降阶/压缩;(5)随机动力学系统的模型降阶.

参考文献

[1] 胡海岩,金栋平,王在华.应用非线性动力学[M]. 2版.北京:北京航空航天大学出版社,2025.

[2] REGA G. Nonlinear dynamics in mechanics and engineering: 40 years of developments and Ali H.

HU H Y, JIN D P, WANG Z H. Applied nonlinear dynamics [M]. 2nd ed. Beijing: Beihang University Press, 2025. (in Chinese)

- sayfeh's legacy [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 99(1): 11–34.
- [3] SHAW S W, PIERRE C. Normal modes for nonlinear vibratory systems [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, 164(1): 85–124.
- [4] TOUZ? C, VIZZACCARO A, THOMAS O. Model order reduction methods for geometrically nonlinear structures: a review of nonlinear techniques [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 105(2): 1141–1190.
- [5] HALLER G, PONSIOEN S. Nonlinear normal modes and spectral submanifolds: existence, uniqueness and use in model reduction [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 86(3): 1493–1534.
- [6] GUO T D, REGA G. Reduced-order modeling of geometrically nonlinear structures. Part II: Correspondence and unified perspectives on different reduction techniques [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2023, 111(21): 19655–19684.
- [7] HARO A, CANADELL M, FIGUERAS J L, et al. The parameterization method for invariant manifolds, Cham, Switzerland: Springer Cham, 2016.
- [8] HALLER G, PONSIOEN S. Exact model reduction by a slow-fast decomposition of nonlinear mechanical systems [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 90(1): 617–647.
- [9] 胡海岩. 力学工程问题[M]. 北京: 科学出版社, 2024.
HU H Y. Engineering issues in mechaincs [M]. Beijing: Science Press, 2024.
- [10] HOLMES P, LUMLEY J L, BERKOOZ G, et al. Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2012.
- [11] LU K, YU H, CHEN Y S, et al. A modified nonlinear POD method for order reduction based on transient time series [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 79(2): 1195–1206.
- [12] 桑瑞涓, 龚坚, 路宽, 靳玉林, 张康宇, 王衡, 高维. 非线性动力系统降维理论综述. *动力学与控制学报*, 2024, 22(9): 1–15.
Sang R J, Gong J, Lu K, et al. Dimension reduction theory review of high-dimensional nonlinear dynamical systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2024, 22(9): 1–15.
- [13] 李海勤, 沈宜昌. 基于规范形理论的柔性结构降阶模型研究进展. *动力学与控制学报*, 2025, 23(11): 1–13.
Li H Q, Sheng Y C. A review of reduced-order model of flexible structure based on normal form theory. *Journal of Dynamics and Control*, 2025, 23(11): 1–13.
- [14] 孙博天, 李文涵, 柳月, 王雪峰. 基于路面几何约束的履带车辆动力学约化建模. *动力学与控制学报*, 2025, 23(11): 44–52.
Sun B T, Li W H, Liu Y, et al. Reduced dynamic modeling and simulation of tracked vehicles based on road geometry constraints. *Journal of Dynamics and Control*, 2025, 23(11): 44–52.
- [15] 李明武. 面向复杂非线性动力系统的谱子流形降阶方法研究进展. *动力学与控制学报*, 2025, 23(11): 14–27.
Li M W. Advances on model reduction for complex nonlinear dynamical systems via spectral submanifolds. *Journal of Dynamics and Control*, 2025, 23(11): 14–27.
- [16] 曹登庆, 曹或腾, 宋救淘, 魏进, 何贵勤. 方波基于全局模态理论的柔性组合结构非线性动力学建模与模型降阶研究进展. *动力学与控制学报*, 2025, 23(11): 28–43.
Cao D Q, Cao Y T, Song M T, et al. Research progress for nonlinear dynamics modeling and model reduction of flexible composite structures based on global modal theory. *Journal of Dynamics and Control*, 2025, 23(11): 28–43.
- [17] 赵自强, 何昊南, 宋智广. 基于模型缩聚的波纹板结构动力学分析和优化方法. *动力学与控制学报*, 2025, 23(11): 53–62.
Zhao Z Q, He H N, Song Z G. Dynamic analysis and optimization method of trapezoidal corrugated plate based on model condensation. *Journal of Dynamics and Control*, 2025, 23(11): 53–62.
- [18] 范山, 洪灵, 江俊. 基于弗洛凯理论的非自治自激振动系统的参数化模型降阶方法. *动力学与控制学报*, 2025, 23(11): 63–71.
Fan S, Hong L, Jiang J. Model reduction of non-autonomous self-excited systems using floquet theory based parameterization method. *Journal of Dynamics and Control*, 2025, 23(11): 63–71.
- [19] 周文祥, 罗凯. 基于双场动力学降阶模型的高效预测与最优控制. *动力学与控制学报*, 2025, 23(11): 72–80.
Zhou W X, Luo K. Efficient prediction and optimal control based on the two-field dynamics reduced-order model. *Journal of Dynamics and Control*, 2025, 23(11): 72–80.
- [20] 袁泉, 康厚军, 苏潇阳, 丛云跃. 基于模态摄动法的模型降阶与动态系统分析. *动力学与控制学报*, 2025, 23(11): 81–90.
Yuan Q, Kang H J, Su X Y, et al. Model order reduction and dynamic system analysis based on modal perturbation method. *Journal of Dynamics and Control*, 2025, 23(11): 81–90.