

面向电网带电作业的飞行机械臂 动力学建模与鲁棒控制^{*}

陈振宁¹ 葛健² 朱怀韬^{3†} 甄圣超⁴ 刘金山⁴

(1. 国网安徽省电力有限公司电力科学研究院, 合肥 230601)

(2. 国网安徽省电力有限公司, 合肥 230061)

(3. 合肥汇优科技有限公司, 合肥 230031)

(4. 合肥工业大学 机械工程学院, 合肥 230009)

摘要 在“绝缘子—导线”带电固定自动作业中, 飞行机械臂的应用能够显著节约人力资源, 并在带电作业场景下最大程度地保障施工人员的安全。然而, 针对各类绝缘子—导线紧固的带电消缺作业, 均需依据绝缘子的外形参数、其于横担上的安装位置以及配电网的环境条件, 综合开展智能末端执行器控制系统的设计与开发工作。这无疑对飞行机械臂的控制性能提出了更为严苛的要求。本文以具有两自由度的飞行机械臂作为研究对象, 充分考量重力因素的影响, 开展动力学分析, 并运用 Udwadia-Kalaba (UK) 方程进行系统建模。同时, 结合约束跟随运动控制方法, 推导出受限飞行机械臂系统的运动方程。此外, 采用模糊控制方法对机械系统中的不确定性进行描述, 通过仿真与实验, 验证了所提出控制算法的有效性。

关键词 飞行两自由度机械臂, 动力学建模, Udwadia-Kalaba 方法, 模糊优化

中图分类号: TP241

文献标志码: A

Dynamic Modeling and Robust Control of Flying Robotic Arm for Live-Line Operations in Power Grids^{*}

Chen Zhenning¹ Ge Jian² Zhu Huaitao^{3†} Zhen Shengchao⁴ Liu Jinshan⁴

(1. State Grid Anhui Electric Power Research Institute, Hefei 230601, China)

(2. State Grid Anhui Electric Power Co., Ltd., Hefei 230061, China)

(3. Hefei Huiyou Technology Co., Ltd., Hefei 230031, China)

(4. School of Mechanical Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract In the live-line fixed automatic operation of the “insulator-conductor” system, the application of the flying manipulator can significantly save human resources and, in the scenario of live-line operation, maximally ensure the life safety of construction workers. However, for various live-line defect elimination operations of fastening insulators and conductors, it is necessary to comprehensively carry out the design and development of the intelligent end-effector control system according to the shape parameters of the insulators, their installation positions on the cross-arm, and the environmental conditions of the distribution network. This undoubtedly imposes more stringent requirements on the control performance of the flying manipulator. This paper takes a flying manipulator with two degrees of freedom as the research object. Fully considering the influence of the gravitational force factor, a dynamic analysis is carried out, and the Udwadia-Kalaba (UK) equation is used for system modeling. At the same time, combined with the constraint following motion control method, the motion equations of the re-

2025-01-08 收到第 1 稿, 2025-04-27 收到修改稿。

^{*} 国网安徽省电力有限公司科技项目 (B3120524000M), 国家自然科学基金资助项目 (52175083), Science and Technology Project of State Grid Anhui Electric Power Co., Ltd. (B3120524000M), National Natural Science Foundation of China (52175083).

[†] 通信作者 E-mail: nuua_zhuhuitao@163.com

stricted flying manipulator system are derived. In addition, the fuzzy control method is adopted to describe the uncertainties in the mechanical system. Through simulations and experiments, the effectiveness of the proposed control algorithm is verified.

Key words two-degree-of-freedom aerial robotic arm, dynamic modeling, Udwadia-Kalaba method, fuzzy optimization

引言

随着现代社会的发展,用户对供电可靠性的要求不断提高.配电网作为将高压输电系统电能分配到用户终端的重要环节,在正常运行与维护过程中需要进行各种带电作业,包括设备巡视、维护、改造及故障排除等^[1].配电网绝缘子一导线紧固带电作业具有安全风险高、劳动强度大、操作复杂等特点^[2],同时由于存在高空作业风险,这些因素使得人工操作既困难又复杂.然而,机械臂能够长时间连续工作,无需间歇性操作,特别适用于需要长时间操作的场合.同时,机械臂可以通过编程迅速适应不同任务,并调整操作流程以满足多样化需求^[3,4].例如,在高温、化学品或重物搬运等危险或有害环境中,机械臂能够替代人类操作,从而降低工人受伤风险.本文将机械臂与四旋翼无人机相结合,提出了一种面向电网作业的飞行机械臂,该飞行机械臂在配电网带电作业中能有效降低人工操作风险^[5].

Udwadia-Kalaba(UK)方法是一种用于求解动力学系统运动方程的解析方法,在机器人学和多体系统分析中得到了广泛应用.该方法最初由 Udwadia 和 Kalaba 在 20 世纪 90 年代提出,旨在提供一种有效的多体动力学问题求解算法^[6].

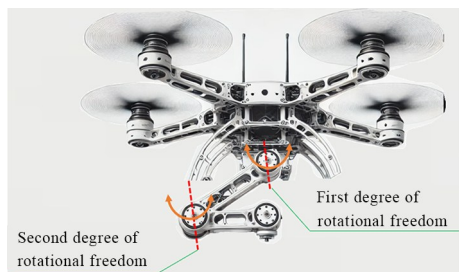


图 1 飞行机械臂整体结构模型图

Fig. 1 Overall structural model of the flying robotic arm

随着机器人技术和自动化技术的发展,Udwadia-Kalaba 方法逐渐得到工业界的认可.许多学者和工程师开始在多体动力学模拟、控制系统设计以

及工程优化等领域应用这一方法.

在 Sun 和 Ma 针对动力学系统的不确定性以及初始条件偏离伺服约束的情况,其基于 Udwadia-Kalaba 方法,提出了一种创新的自适应鲁棒控制方案^[7,8].方案的核心在于有效应对系统中的整体约束和非整体约束问题.完整约束通常指对系统整体状态的限制,例如速度和位置的限制,而非完整约束则涉及系统个别部分的限制,如各关节的运动范围等.该方案通过引入自适应机制,使控制系统能够实时调整策略.这种调整策略可有效适应动态环境中的变化.这一机制不仅增强了系统对不确定性的抵抗力,还确保了在各种条件下的高性能输出.在 2023 年,He 利用 Udwadia-Kalaba 方法,设计了一种新型的鲁棒控制器,旨在解决不确定性机械系统的控制问题^[9].该控制器的创新之处在于引入了两个可调节的控制增益,分别应对系统中的不确定性因素,从而增强机械系统的整体稳定性.在实际应用中,机械系统往往面临多种不确定性,这些不确定性可能来源于系统参数变化、外部扰动、传感器噪声等因素.He 的控制器设计基于 Udwadia-Kalaba 方法,采用系统化策略应对不确定性.通过精确建模和动态调整,控制器实时根据系统状态和环境变化调整增益.该设计使控制器在不确定性较高的环境中仍保持良好性能^[10].本文采用 Udwadia-Kalaba 方法对飞行机械臂进行建模,并引入了约束跟随运动控制方法,给出了受限飞行机械臂机械系统的运动方程.

高性能飞行机械臂需要良好的动态性能和抗干扰能力.扰动观测器控制算法(DOBC)能够通过扰动观测器估计并抵消外部扰动,从而精确控制系统,但该算法对系统非线性较为敏感,设计时需考虑非线性特性^[11,12].模型参考自适应控制算法(MRAC)是一种非线性控制方法,通过引入参考模型和自适应机制来控制系统.但 MRAC 中的自适应机制需要时间收敛,可能导致响应较慢^[13,14].最

后是经典的比例积分微分(PID)控制,其适用于线性和非线性系统,并能够根据实时系统状态进行调节,以适应系统变化.但对于非线性系统,需要先进行线性化处理^[15,16].在众多控制算法中,本文提出的鲁棒控制算法在处理非线性、不确定性系统方面具有优势.

本文基于 Udwadia-Kalaba 方程,将飞行机械臂二阶形式的伺服约束作为控制目标,并将得到的确定性标称约束力解析式作为控制器的第一部分.控制器的第二部分用于补偿初始条件的不相容性,而第三部分则专门处理系统的不确定性.最后采用模糊优化方法,对所提出的鲁棒控制器的控制参数进行优化,使飞行机械臂系统在相互冲突的性能指标下能够获得最优的控制参数.

本文的主要贡献包括以下四个方面:(1)基于 Udwadia-Kalaba 方程,给出确定性约束系统的解析约束力形式;(2)针对不确定性约束系统,提出了一种新型的鲁棒控制器;(3)结合模糊优化,对所提出的鲁棒控制器的控制参数进行优化;(4)通过 MATLAB 仿真平台与实验,结合飞行机械臂的动力学模型,与其他控制算法对比,验证了所提出控制器的优异性能.

1 动力学模型和理想约束

1.1 飞行机械臂动力学建模

飞行机械臂通过关节电机直接驱动实现运动控制,采用嵌入式控制器进行设计.系统包含两个旋转关节,分别对应大臂绕基座旋转和小臂绕肘关节旋转两个自由度.由于运动学链式结构特性,两个关节存在动力学耦合效应,其惯性耦合矩阵项直接影响末端定位精度.图2给出了飞行机械臂的简化模型.为了简化计算,将连杆和关节处电机的质心集中在连杆右端点处,其中,连杆1和2的质量分别为 m_1 和 m_2 ,连杆1和连杆2的长度分别为 l_1 和 l_2 .

基于能量的拉格朗日方法经常用于对机械系统的动力学建模^[17].它的一般表达式是:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, t)}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}_i} \right] - \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, t)}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} = \boldsymbol{\tau}_i(t) - \boldsymbol{\tau}_{f_i}(t) \quad (1)$$

$i=1, 2, \dots, n$

上式中 $\boldsymbol{\theta}_i \in \mathbf{R}^n$ 表示系统广义坐标,其对时间

t 求导后得到 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_i, \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \in \mathbf{R}^n$ 表示系统广义速度, $\boldsymbol{\tau}_i(t)$ 和 $\boldsymbol{\tau}_{f_i}(t)$ 分别表示输入转矩和外部干扰转矩, L 表示拉格朗日乘数,可具体表述为下列形式:

$$L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, t) = T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, t) - U(\boldsymbol{\theta}, t) \quad (2)$$

上式中, T 表示系统动能, U 表示系统势能.

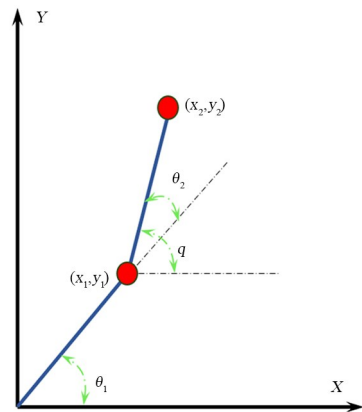


图2 飞行机械臂平面简图

Fig. 2 Plane diagram of the flying robot arm

机械臂的质心坐标为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) . 如图2所示,其中,

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cos \theta_1 \\ y_1 &= l_1 \sin \theta_1 \\ x_2 &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos q \\ y_2 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin q \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)对时间 t 求导后,得:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{y}_1 &= l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{x}_2 &= -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 \sin q \dot{q} \\ \dot{y}_2 &= l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos q \dot{q} \end{aligned} \quad (4)$$

系统的动能 T 由下式计算:

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}^2 + \\ &\quad m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - q) \dot{\theta}_1 \dot{q} \end{aligned} \quad (5)$$

系统的势能 U 由下式计算:

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \\ &= (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 + m_2 g l_2 \sin q \end{aligned} \quad (6)$$

其中, θ_1 和 q 均为关节角度.

将式(2)代入到式(1)后,便可以得到飞行两自

由度机械臂的动力学模型:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}, t) \ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, t) \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}, t) = \boldsymbol{\tau}(t) \quad (7)$$

其中, $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}, t) \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ 为惯性矩阵, $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, t) \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ 表示科里奥利和离心力矩阵, $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}, t) \in \mathbf{R}^2$ 表示重力, $\boldsymbol{\tau}(t) \in \mathbf{R}^2$ 表示控制力矩矩阵.

将式(7)中的变量展开成如下形式:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}, t) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \dot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \ddot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, t) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}, t) = \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{21} \end{bmatrix} \quad (11)$$

惯性矩阵中的元素可具体表述为下列形式:

$$\begin{aligned} M_{11} &= (m_1 + m_2) l_1^2 \\ M_{12} &= M_{21} = m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - q) \\ M_{22} &= m_2 l_2^2 \end{aligned} \quad (12)$$

科里奥利和离心力矩阵中的元素可具体表述为:

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22} = 0 \\ C_{12} &= m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - q) \\ C_{21} &= -m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - q) \dot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (13)$$

重力项中的元素可具体表述为:

$$\begin{aligned} G_{11} &= (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 \\ G_{22} &= m_2 g l_2 \cos(q) \end{aligned} \quad (14)$$

1.2 机械系统中的伺服约束

由拉格朗日力学基本知识,可以得到一般情况下无约束系统的运动方程^[18].

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}, t) \ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, t) \quad (15)$$

式中 $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, t) \in \mathbf{R}^n$, 它的具体表达式如下:

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, t) = -\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, t) \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}, t) \quad (16)$$

该方程表明 $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, t) \in \mathbf{R}^n$ 在大小上等于科里奥利离心力和重力之和.

假设系统受 k 个完整约束和 $m - k$ 个非完整约束,那么完整约束和非完整约束可作如下表达:

$$\begin{aligned} \phi_i(\boldsymbol{\theta}, t) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \\ \phi_i(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, t) &= 0, \quad i = k + 1, k + 2, \dots, m \end{aligned} \quad (17)$$

将所需性能建模为如下的伺服约束,即当控制输入充当约束力时,应遵循该约束:

$$\sum_{i=1}^n A_{li}(\boldsymbol{\theta}, t) \dot{\theta}_i + A_l(\boldsymbol{\theta}, t) = 0, \quad l = 1, \dots, m \quad (18)$$

式中 m 用于表示引入系统的约束个数, n 表示系统坐标变量的维数. $A_{li}(\cdot)$ 和 A_l 在 $\boldsymbol{\theta}$ 和 t 上均为 C^1 类函数. 这些约束意味着对速度和位移都有限制,并且是约束的一阶形式. 其矩阵形式为:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, t) \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}, t) \quad (19)$$

其中, $\mathbf{A} = [A_{li}]_{m \times n}$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$.

现将这些约束转换为二阶形式,约束方程(18)

对时间 t 求导可得:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} A_{li}(\boldsymbol{\theta}, t) \dot{\theta}_i + \sum_{i=1}^n A_{li}(\boldsymbol{\theta}, t) \ddot{\theta}_i + \\ \frac{d}{dt} A_l(\boldsymbol{\theta}, t) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$\frac{d}{dt} A_{li}(\boldsymbol{\theta}, t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial A_{li}(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \theta_k} \dot{\theta}_k + \frac{\partial A_{li}(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} A_l(\boldsymbol{\theta}, t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial A_l(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial \theta_k} \dot{\theta}_k + \frac{\partial A_l(\boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} \quad (22)$$

方程(20)是约束的二阶形式,可以改写为:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n A_{li}(\boldsymbol{\theta}, t) \ddot{\theta}_i &= - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} A_{li}(\boldsymbol{\theta}, t) \dot{\theta}_i - \frac{d}{dt} A_l(\boldsymbol{\theta}, t) \\ &:= a_l(\dot{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta}, t) \quad (l = 1, \dots, m) \end{aligned} \quad (23)$$

其矩阵形式为:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, t) \ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{a}(\dot{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta}, t) \quad (24)$$

其中 $\mathbf{A} = [A_{li}]_{m \times n}$, $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_m]^T$. 无论初始条件和不确定性如何^[19], 在系统运动的整个过程中都必须严格满足固定约束(24).

1.3 机械系统中的广义约束力

将伺服约束施加到系统当中,则需要在系统中施加额外的“广义约束力” $\mathbf{Q}^c$.

$\mathbf{Q}^c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \in \mathbf{R}^n$ 是施加在系统上的额外力,在拉格朗日力学中, $\mathbf{Q}^c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ 被视为理想力,其遵循达朗贝尔原理.

Udwadia 和 Kalaba 证明了理想约束力的

形式^[20,21]：

$$\begin{aligned} Q^c(\theta, \dot{\theta}, t) = & M^{1/2}(\theta, t)[A(\theta, t)M^{-1/2}(\theta, \\ & t)]^+ \times [a(\theta, \dot{\theta}, t) - A(\theta, t)M^{-1}(\theta, t)Q] \end{aligned} \quad (25)$$

其中，“+”表示 Moore-Penrose 广义逆。

约束力(25)为所提出控制器的第一部分。

2 鲁棒控制器设计

实际情况下，飞行两自由度机械臂存在参数不确定性。基于此，可将原系统动力学方程式(7)扩展为包含不确定性的形式^[22]：

$$\begin{aligned} M(\theta, \sigma, t)\ddot{\theta}(t) + C(\theta, \dot{\theta}, \sigma, t)\dot{\theta}(t) + \\ G(\theta, \sigma, t) = \tau(t) \end{aligned} \quad (26)$$

式(26)中所引入的不确定性 σ 时变且有界， $\tau(t) \in R^n$ 表示控制力矩矩阵。

在设计控制器 $\tau(t)$ 时，考虑不确定性因素的影响，可以对 M 、 Q 和 Q^c 做如下分解：

$$\begin{aligned} M(\theta, \sigma, t) &= \bar{M}(\theta, t) + \Delta M(\theta, \sigma, t) \\ Q(\theta, \dot{\theta}, \sigma, t) &= \bar{Q}(\theta, \dot{\theta}, t) + \Delta Q(\theta, \dot{\theta}, \sigma, t) \\ Q^c(\theta, \dot{\theta}, \sigma, t) &= \bar{Q}^c(\theta, \dot{\theta}, t) + \Delta Q^c(\theta, \dot{\theta}, \sigma, t) \end{aligned} \quad (27)$$

其中 $\bar{M}$ 、 $\bar{Q}$ 和 $\bar{Q}^c$ 表示对应部分的标称项，而 ΔM 、 ΔQ 和 ΔQ^c 则是取决于 σ 的不确定项。同时， $\bar{M}$ 、 $\bar{C}$ 、 $\bar{G}$ 、 ΔM 、 ΔQ 和 ΔQ^c 都是连续的。之后，令：

$$\begin{aligned} D(\theta, t) &:= \bar{M}^{-1}(\theta, t), \\ \Delta D(\theta, t) &:= M^{-1}(\theta, \sigma, t) - \bar{M}^{-1}(\theta, t) \\ E(\theta, \sigma, t) &:= \bar{M}(\theta, t)M^{-1}(\theta, \sigma, t) - I. \end{aligned}$$

因此， $\Delta D(\theta, t) = D(\theta, t)E(\theta, \sigma, t)$ 。

若矩阵 $A(\theta, t)$ 满秩，则 $A(\theta, t)A^T(\theta, t)$ 是可逆的。

存在 $\hat{\rho}_E(\cdot) : R^n \times R \rightarrow (-1, \infty)$ ，有如下不等式成立：

$$\frac{1}{2} \min_{\sigma \in \Sigma} \lambda_m[E(\theta, \sigma, t) + E^T(\theta, \sigma, t)] \geq \hat{\rho}_E(\theta, t) \quad (28)$$

其中， $\lambda_m(\cdot)$ 表示最小特征值， $\min(\cdot)$ 表示最小值。

给定一个矩阵 $P \in R^{n \times n}$ ， $P > 0$ ，令：

$$\Psi(\theta, t) := PA(\theta, t)D(\theta, t)D^T(\theta, t)A^T(\theta, t)P \quad (29)$$

存在一个标量常数 $\underline{\lambda} > 0$ ，使得：

$$\inf_{(\theta, t) \in R^n \times R} \lambda_m[\Psi(\theta, t)] \geq \underline{\lambda} \quad (30)$$

其中， $\Psi(\theta, t)$ 正定， $\lambda_m[\Psi(\theta, t)]$ 下有正界^[23]。

现在考虑近似约束跟随问题。由于建模中可能存在不确定性，即当误差 $\beta \neq 0$ 时，可能出现 $A\dot{\theta} \neq b$ 、 $A\ddot{\theta} \neq a$ 的情况。此外，系统初始阶段可能存在误差 $\beta \neq 0$ 。考虑以下新型鲁棒控制器 (novel robust controller, NRC) 设计：

$$\begin{aligned} \tau(t) = & p_1[\theta(t), \dot{\theta}(t), t] + p_2[\theta(t), \dot{\theta}(t), \\ & t] + p_3[\theta(t), \dot{\theta}(t), t] \end{aligned} \quad (31)$$

其中，

$$\begin{aligned} p_1[\theta(t), \dot{\theta}(t), t] &= Q^c \\ p_2[\theta(t), \dot{\theta}(t), t] &= -\kappa \bar{M}^{-1}(\theta, t)A^T(\theta, t)P\beta \\ p_3[\theta(t), \dot{\theta}(t), t] &= -\gamma(\theta, \dot{\theta})\mu(\theta, \dot{\theta}, t)p(\theta, \dot{\theta}, t) \end{aligned} \quad (32)$$

其中， $\epsilon, \kappa \in R$ ， $\kappa > 0$

$$\begin{aligned} \gamma(\theta, \dot{\theta}, t) = & \begin{cases} \frac{[1 + \dot{\rho}_E(\theta, t)]^{-1}}{\|\bar{\mu}(\theta, \dot{\theta}, t)\| \cdot \|\mu(\theta, \dot{\theta}, t)\|} & \text{if } \|\mu(\theta, \dot{\theta}, t)\| > \epsilon \\ \frac{[1 + \dot{\rho}_E(\theta, t)]^{-1}}{\|\bar{\mu}(\theta, \dot{\theta}, t)\|^2 \epsilon} & \text{if } \|\mu(\theta, \dot{\theta}, t)\| \leq \epsilon \end{cases} \end{aligned} \quad (33)$$

其中，

$$\begin{aligned} \mu(\theta, \dot{\theta}, t) &= \eta(\theta, \dot{\theta}, t)p(\theta, \dot{\theta}, t) \\ \eta(\theta, \dot{\theta}, t) &= \bar{\mu}(\theta, \dot{\theta}, t)\beta(\theta, \dot{\theta}, t) \\ \bar{\mu}(\theta, \dot{\theta}, t) &= \bar{M}^{-1}(\theta, t)A^T(\theta, t)P \end{aligned} \quad (34)$$

因此，系统动力学方程式(26)可重新表述为：

$$M\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + G = p_1 + p_2 + p_3 \quad (35)$$

其中， p_1 项用于处理系统中的伺服约束， p_2 项用于处理系统中的初始条件不相容性， p_3 项用于处理系统中的不确定性。

3 模糊优化设计

不确定性量化理论框架包含概率建模、模糊集理论及区间分析三类范式。然而，只有模糊集理论才能通过不确定性隶属函数定量地描述不确定性^[24]。

在 NRC 控制算法的 p_2 项中，若参数 κ 取值过大，则会引发系统产生高频振荡；若参数 κ 取值过

小,由于系统存在的不确定性因素,将致使稳态误差增大.飞行机械臂系统的控制任务在于,在相互冲突的性能指标之间,寻求最优的控制参数^[25].

3.1 模糊集框架

为应对不确定性边界未知的难题,采用模糊集理论对不确定性进行定量描述.具体如下:

(1)初始状态的模糊限制.对于 θ_0 [即 $\theta(t_0)$]的每个分量,记为 $\theta_{0i}, i=1,2,\dots,n$,在紧集论域 $\Xi_i \subset R$ 中存在一个由隶属度函数 $\mu_{\Xi_i} : \Xi_i \rightarrow [0,1]$ 刻画的模糊集 Q_{0i} .即

$$Q_{0i} = \{[\theta_{0i}, \mu_{\Xi_i}(\theta_{0i})] \mid \theta_{0i} \in \Xi_i\} \quad (36)$$

(2)不确定参数的模糊限制. $\sigma(t)$ (时变不确定性)的每个分量由一个模糊集 $S_i = \{[\sigma, \mu(\sigma_i)] \mid \sigma_i \in \Sigma_i\}$ 表示,其中 $\mu_i(\cdot)$ 定义在紧集域 Σ_i 上.

对不确定性 θ_{0i} 和 $\sigma(t)$ 施加模糊限制.同时,对机械系统中的不确定性采用模糊描述.这种模糊描述比运用概率方法更具有优势^[26].

为评估模糊不确定性下的系统性能,引入D-operation作为一种去模糊化机制.对于模糊集 $N = \{[v, \mu_N(v)]\}$ 以及函数 $f : N \rightarrow R$,可由D-operation给出 $D[f(v)]$ 的具体表达式^[27]:

$$D[f(v)] = \frac{\int_N f(v) \mu_N(v) dv}{\int_N \mu_N(v) dv} \quad (37)$$

现提出一个二次成本函数,以平衡瞬态跟踪误差、稳态误差和控制输入量:

$$J(\kappa, t_s) = D\left[\int_{t_s}^{\infty} \eta^2(\kappa, t_\tau, t_s) dt_\tau\right] + \alpha D[\eta_\infty^2(\kappa)] + \beta \kappa^2 \quad (38)$$

其中, κ 项为所提出的NRC中 p_2 项的控制参数, t_τ 是时间积分变量, α 和 β 都是大于0的,且都是标量参数.式(38)中,瞬态性能项为:

$$\eta(\kappa, t_\tau, t_s) = \left(V_s - \frac{\chi}{\psi}\right) e^{-\psi(t_\tau - t_s)}, \quad \psi = \frac{2\lambda\kappa}{\lambda_M(P)} \quad (39)$$

式(39)用于刻画呈指数衰减的误差能量,其中 $V_s =$

$\beta^T(t_s)P\beta(t_s), \chi = \frac{\epsilon}{2}$, ϵ 是所提出的NRC中 p_3 项的控制参数,用于将实际存在的残差引入性能指标,从而系统性地优化控制增益 κ .该设置实现了模糊闭环系统稳定性与最优性之间的合理均衡.

式(39)中,稳态项为:

$$\eta_\infty(\kappa) := \frac{\chi}{\psi} \quad (40)$$

稳态项用于限制最终跟踪误差的幅度.

3.2 闭式最优增益推导

通过将 $\eta(\cdot)$ 和 $\eta_\infty(\cdot)$ 代入 $J(\cdot)$,可得到显式表达式:

$$\int_{t_s}^{\infty} \eta^2(\kappa, t_\tau, t_s) dt_\tau = \frac{V_s^2}{2\psi} - \frac{V_s\chi}{\psi^2} + \frac{\chi^2}{2\psi^3} \quad (41)$$

$$D\left[\int_{t_s}^{\infty} \eta^2 dt_\tau\right] = \frac{1}{2\psi} D[V_s^2] - \frac{1}{\psi^2} D[V_s\chi] + \frac{1}{2\psi^3} D[\chi^2] \quad (42)$$

设 $\lambda_M(P)$ 和 $\lambda_m(P)$ 分别表示 P 的最大和最小特征值.定义常数:

$$\kappa_1 = \frac{\lambda_M(P)}{4\lambda} D[V_s^2],$$

$$\kappa_2 = \frac{\lambda_M^2(P)}{4\lambda^2} D[V_s\theta],$$

$$\kappa_3 = \frac{\lambda_M^3(P)}{16\lambda^3} D[\theta^2],$$

$$\kappa_4 = \frac{\lambda_M^2(P)}{4\lambda^2} D[\theta^2].$$

性能指标简化为:

$$J(\kappa, t_s) = \frac{\kappa_1}{\kappa} - \frac{\kappa_2}{\kappa^2} + \frac{\kappa_3}{\kappa^3} + \frac{\alpha\kappa_4}{\kappa^2} + \beta\kappa^2 \quad (43)$$

将优化设计问题等效为以下约束优化问题,对于任意 t_s ,

$$\min_{\kappa} J(\kappa, t_s) \quad \text{subject to } \kappa > 0 \quad (44)$$

通过使用式(38)中的性能指数,寻求最优解.

对于任意 t_s ,取 J 对 κ 的一阶导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \kappa} &= -\frac{\kappa_1}{\kappa^2} + 2\frac{\kappa_2}{\kappa^3} - 3\frac{\kappa_3}{\kappa^4} - 2\alpha\frac{\kappa_4}{\kappa^3} + 2\beta\kappa \\ &= \frac{1}{\kappa^4} (-\kappa_1\kappa^2 + 2\kappa_2\kappa - 3\kappa_3 - 2\alpha\kappa_4\kappa + 2\beta\kappa^5) \end{aligned} \quad (45)$$

令 $\partial J / \partial \kappa = 0$ 求解最优解,得:

$$-\kappa_1\kappa^2 + 2\kappa_2\kappa - 3\kappa_3 - 2\alpha\kappa_4\kappa + 2\beta\kappa^5 = 0 \quad (46)$$

式(46)是一个五次多项式方程.

对于给定的 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ 和 κ_4 ,可以通过数值求解式(46)确定最优设计参数.

采用 $\kappa > 0$ 的最优鲁棒控制设计方案,可以使对应的性能指标 J 达到全局最小值.

4 数值仿真与实验

在实际电网带电作业过程中,外部环境的复杂扰动始终作用于飞行机械臂系统,时刻影响其稳定性.多场景仿真与实验结果表明,与智能控制(Intelligent control, IC)($\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$)和PID控制算法相比,所提出的NRC($\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3$)控制算法,不仅能够确保飞行机械臂系统实现高精度的轨迹跟踪,还能有效保证系统的稳定性.

4.1 理想轨迹约束仿真

为了观察不同控制器的动态性能,仿真过程对飞行机械臂施加正弦信号约束,仿真参数如表1所示.飞行机械臂运动学和动力学模型关键参数如表2所示.

表1 各控制器最优控制参数

Table 1 Optimal control parameters for each controller

Control algorithm	Control Parameters
PID	$\boldsymbol{K}_p=\text{diag}[360;300]$
	$\boldsymbol{K}_i=\text{diag}[5;4]$
	$\boldsymbol{K}_d=\text{diag}[42;40]$
IC	$\boldsymbol{P}=\text{diag}[10;0.03]$
	$\kappa=30$
NRC	$\boldsymbol{P}=\text{diag}[10;0.03]$
	$\kappa=38.69$
	$\epsilon=0.5$

表2 飞行机械臂运动学和动力学模型关键参数

Table 2 Key parameters of the kinematic and dynamic models of the flying manipulator

Parameter	Value	Parameter	Value	Unit
m_1	2.4	m_2	2.2	kg
l_1	270	l_2	248	mm

$$\begin{cases} \theta_1+\theta_2=0 \\ \theta_1=\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \quad (47)$$

式(47)对时间 t 求一阶和二阶导数得:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2=0 \\ \ddot{\theta}_1=\frac{\pi^2}{9}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \end{cases} \begin{cases} \ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2=0 \\ \ddot{\theta}_1=-\frac{\pi^3}{27}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) \end{cases} \quad (48)$$

式(48)描述了飞行机械臂系统的一阶伺服约束和二阶伺服约束.因此,式(19)和式(24)中的元素可具体表述为:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\pi^2}{9}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\pi^3}{27}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (49)$$

初始跟踪误差不为0时,初始条件不相容可描述为:

$$\begin{aligned} e_1(0) &= \frac{\pi}{9} \\ e_2(0) &= -e_1(0) \end{aligned} \quad (50)$$

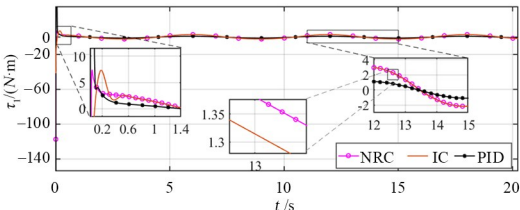
可以通过引入周期性扰动来模拟飞行机械臂系统内部的不确定性及其所受外部干扰.这类周期性扰动可表述为:

$$m_i=\bar{m}_i+\Delta m_i \quad (51)$$

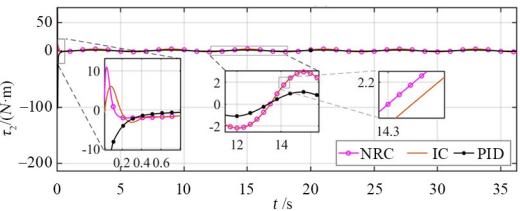
其中, $\Delta m_i=0.1\cos(t), i=1,2,3,4$.

在关节控制力矩响应的初始阶段,与IC控制算法和PID控制算法相比,所提出的NRC控制算法能够以最快的响应速度,稳定地输出关节控制力矩.

在给定的理想约束轨迹下,与IC控制算法和PID控制算法相比,所提出的NRC控制算法以更快的响应速度赶上理想约束轨迹,且在系统达到稳定后,NRC控制算法的稳态误差最小,最终的仿真结果如图3~图5所示.

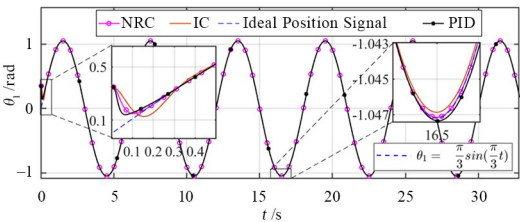


(a) 关节1控制力矩曲线
(a) Joint 1 control torque curves

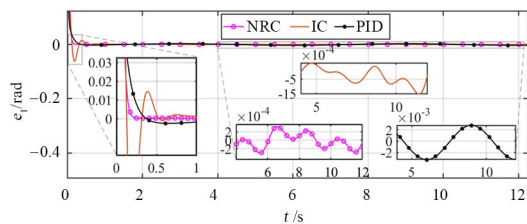


(b) 关节2控制力矩曲线
(b) Joint 2 control torque curves

图3 飞行机械臂理想轨迹跟踪力矩仿真分析曲线
Fig. 3 Simulation analysis curve of the ideal trajectory tracking torque for the flying robotic arm

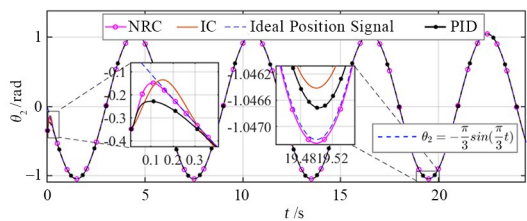


(a) 关节1位置变化曲线
(a) Joint 1 position variation curves

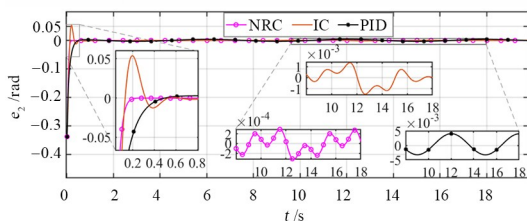


(b) 关节1位置误差曲线
(b) Position error curve of Joint 1

图4 飞行机械臂理想轨迹跟踪关节1仿真分析曲线
Fig. 4 Simulation analysis curve of joint 1 for the ideal trajectory tracking of the flying robotic arm



(a) 关节2位置变化曲线
(a) Joint 2 position variation curves



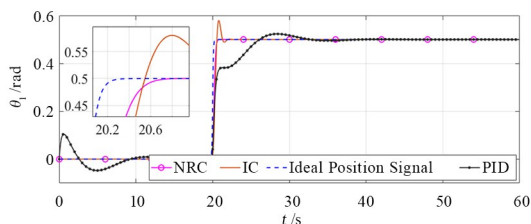
(b) 关节2位置误差曲线
(b) Position error curve of Joint 2

图5 飞行机械臂理想轨迹跟踪关节2仿真分析曲线
Fig. 5 Simulation analysis curve of joint 2 for the ideal trajectory tracking of the flying robotic arm

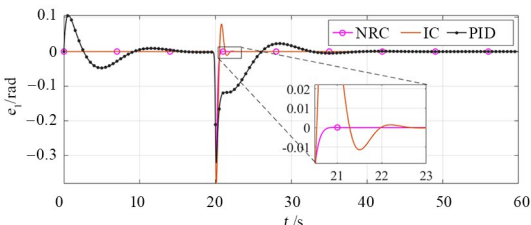
4.2 阶跃响应仿真

阶跃响应仿真是控制系统分析中常用的一种方法,通过施加突变的输入信号(如阶跃信号)来测试系统的响应特性。考虑到实际电网作业中可能遇到的复杂扰动(如风载、电磁干扰等),对飞行机械臂系统进行阶跃响应仿真有助于进一步验证所提出控制算法在提升飞行机械臂系统动态性能、稳定性及其对外部干扰(如突发变化)适应能力方面的有效性。

在 $t = 20$ s 时对系统施加阶跃信号,图 6(a)和图 7(a)中的仿真结果表明,与 IC 和 PID 控制算法相比,所提出的 NRC 控制算法在动态响应性能上表现出无震荡且过冲时间较短的优势。同时,图 6(b)和图 7(b)中的仿真结果显示,系统稳定后, NRC 控制算法能够精确跟踪目标值,稳态误差较小,系统精度较高。

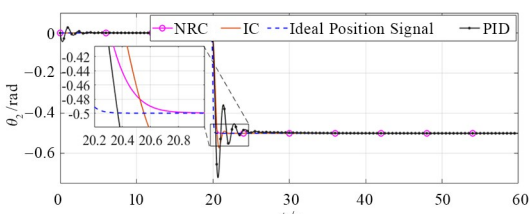


(a) 关节1位置变化曲线
(a) Joint 1 position variation curves

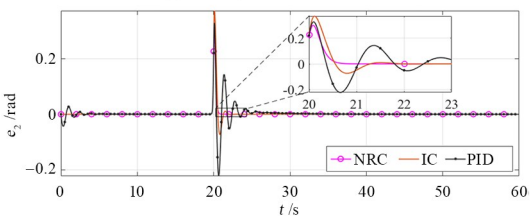


(b) 关节1位置误差曲线
(b) Position error curve of Joint 1

图6 飞行机械臂阶跃响应关节1仿真分析曲线
Fig. 6 Simulation analysis curve of joint 1 for the step response of the flying robotic arm



(a) 关节2位置变化曲线
(a) Joint 2 position variation curves



(b) 关节2位置误差曲线
(b) Position error curve of Joint 2

图7 飞行机械臂阶跃响应关节2仿真分析曲线
Fig. 7 Simulation analysis curve of joint 2 for the step response of the flying robotic arm

4.3 实验结果分析

以六自由度机械臂末端两关节为实验对象(飞行机械臂施工作业场景图如图 8 所示,实验平台如图 9 所示),对其两关节定义如下轨迹约束:

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = 0 \\ \theta_2 = \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(t) \end{cases} \quad (52)$$

上述轨迹约束曲线保留了正弦和余弦信号的基本数学特性。这种简化允许在复合信号约束下综合评估飞行机械臂系统的轨迹跟踪性能。



图8 飞行机械臂施工作业场景图
Fig.8 Scenario diagram of flying manipulator operation

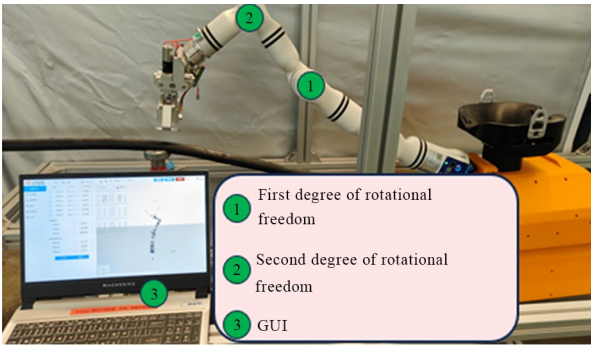


图9 飞行机械臂实验平台
Fig.9 Flying manipulator experimental platform

负载变化是飞行机械臂系统参数不确定性的主要来源。为验证不同控制算法对负载扰动的鲁棒性，实验在机械臂末端法兰依次安装 1 kg、2 kg 和 3 kg 的附加质量块，并令系统在各负载工况下跟踪约束轨迹，以此评估算法对负载变化的鲁棒性。

可用式 $\tau = K i_a$ 来描述控制转矩与控制电流之间的关系，其中 K 为系数， i_a 为控制输入电流。与 IC 控制算法相比，所提出的 NRC 控制算法引入了处理不确定性的 p_3 项，因此其控制电流较大。

在不同的外部负载作用下，与 IC 和 PID 算法相比，NRC 算法表现出更高的轨迹跟踪精度和更强的扰动抑制能力。实验数据如图 10 所示。

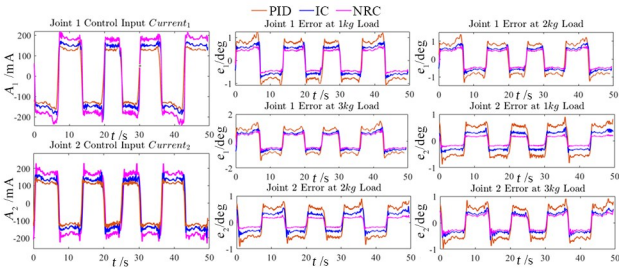


图10 不同负载条件下飞行机械臂两关节位置误差实验曲线
Fig.10 Experimental curves of joint position errors for the flying robotic arm under different load conditions

5 结论

本文针对非线性、不确定性的飞行机械臂机械系统，提出了一种新颖实用的鲁棒控制算法，该算法基于 Udwadia-Kalaba 方程，通过描述理想系统的运动轨迹，得到了相应的伺服约束。控制器的第一部分为系统在伺服约束下的约束力解析表达式，所提出控制器的第二部分用于处理系统初始条件不相容问题，第三部分作为鲁棒控制部分，用于补偿不确定性的影响。然后结合模糊优化，对所提出的鲁棒控制算法中的控制参数进行了优化。最后，通过仿真和实验，结合飞行机械臂的动力学模型，通过与其他控制算法的对比，验证了所提出的鲁棒控制方法在动态性能上的有效性。

参考文献

[1] 庞岩, 杨禹鹏, 杜智伟. 高空风电系统的优化控制研究进展与挑战[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(6): 1—10.

PANG Y, YANG Y P, DU Z W. Research progress and challenges for the optimal control of airborne wind energy systems [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(6): 1—10. (in Chinese)

[2] 谢献忠, 龙昊, 李丹. 两档输电线路间的非线性耦合振动特性研究[J]. 动力学与控制学报, 2015, 13(3): 170—176.

XIE X Z, LONG H, LI D. Study on nonlinear coupled vibration characteristic of two-spans transmission line system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2015, 13(3): 170—176. (in Chinese)

[3] 陈星宇, 张舒. 机械臂负载移动性能与运动调控研究[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(2): 100—110.

CHEN X Y, ZHANG S. Research on movement performance and motion control of manipulator with load [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(2): 100—110. (in Chinese)

[4] 刘永, 徐鉴. 6R 串联机械臂时间最优轨迹规划[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(11): 10—19.

LIU Y, XU J. Time optimal trajectory planning for a 6R serial robotic manipulator [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(11): 10—19. (in Chinese)

- [5] 康晶杰, 黄政, 文浩. 基于包络切换的四旋翼吊挂无人机避障轨迹优化研究[J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(4): 73—80.
KANG J J, HUANG Z, WEN H. Trajectory optimization with switchable encapsulating circle for quadrotor carrying slung payload [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(4): 73—80. (in Chinese)
- [6] 刘珺, 张欣刚, 张树翠, 等. Udwadia-Kalaba 方法在四足机器人单腿轨迹跟踪控制违约问题的应用[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(9): 55—61.
LIU J, ZHANG X G, ZHANG S C, et al. The application of the udwadia-kalaba method in addressing constraint violations in single-leg trajectory tracking control of quadruped robots [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(9): 55—61. (in Chinese)
- [7] SUN H, CHEN Y H, XIONG Y S, et al. Configuring tasks as constraints for coordinated mechanical systems: a Udwadia-Kalaba theory based adaptive robust control [J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(6): 3387—3418.
- [8] MA X B, ZHEN S C, LIU X L, et al. Robust approximate constraint-following control design based on Udwadia-Kalaba approach and experimental validation for the joint module of cooperative robot [J]. Nonlinear Dynamics, 2024, 112(3): 1931—1949.
- [9] HE C S, HUANG K, ZHAO H, et al. Iterative feedback tuning for optimal repetitive constraint-following control of uncertain mechanical systems using Udwadia-Kalaba theory [J]. Optimal Control Applications and Methods, 2023, 44 (3): 1235—1250.
- [10] YAP E J H, REZGUI D, LOWENBERG M H, et al. Modeling flexible multi-body systems within the Udwadia-Kalaba framework, a lumped parameter approach [J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2022, 17(12): 121005.
- [11] LIU P F, CHEN T, QI W, et al. A DOBC algorithm based on double speed loops controller in low-speed servo system with harmonic reducer [C]//Proceedings of the 2020 2nd International Conference on Robotics, Intelligent Control and Artificial Intelligence. New York: ACM, 2020: 92—96.
- [12] AHMED N, CHEN M. Disturbance observer-based robust adaptive control for uncertain actuated nonlinear system with disturbances [J]. Assembly Automation, 2021, 41(5): 567—576.
- [13] GAI H D, LI X W, JIAO F R, et al. Application of a new model reference adaptive control based on PID control in CNC machine tools [J]. Machines, 2021, 9(11): 274.
- [14] JARAMILLO J, WILCHER K, YUCELEN T, et al. Scalability concept for model reference adaptive control of gain scheduled dynamical systems [C]//AIAA SCITECH 2023 Forum. Reston, Virginia: AIAA, 2023: 1813.
- [15] 李永歌, 张潇, 许勇. 航空发动机分数阶 PID 控制器的参数自整定方法[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(7): 77—88.
LI Y G, ZHANG X, XU Y. Parameter self-tuning method of fractional order pid controller for the aero engine [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(7): 77—88. (in Chinese)
- [16] 何柳青, 杨春林, 潘勇军. 基于模糊 PID 算法的整车碰撞控制多工况仿真[J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(3): 38—45.
HE L Q, YANG C L, PAN Y J. Multi-condition simulations of vehicle collision avoidance control via fuzzy pid algorithm [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(3): 38—45. (in Chinese)
- [17] LIU C, ZHUANG X C, SUN Z C, et al. Kinematic accuracy reliability evaluation method of space deployable mechanism based on dynamic model [J]. Journal of Physics: Conference Series, 2024, 2762 (1): 012010.
- [18] 张佳俊, 张舒, 徐鉴. 下肢康复外骨骼人机耦合动力学建模与控制[J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(4): 55—63.
ZHANG J J, ZHANG S, XU J. Human-machine coupled dynamic modelling and control of lower limb exoskeleton for rehabilitation [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(4): 55—63. (in Chinese)
- [19] CHEN Y H. Second-order constraints for equations of motion of constrained systems [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 1998, 3(3): 240—248.
- [20] UDWDIA F E, KALABA R E. On the foundations of analytical dynamics [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2002, 37(6): 1079—1090.
- [21] Moore E H. On the reciprocal of the general algebraic matrix [J]. Bulletin of the american mathematical society, 1928, 34(1): 1—38.

mathematical society, 1920(26): 294—295.

[22] 赵跃宇, 金波, 许文喜. 关于非完整系统虚位移的不确定性问题与非线性问题[J]. 动力学与控制学报, 2003, 1(1): 20—24.

ZHAO Y Y, JIN B, XU W X. On the unqualitative and nonlinear problems of virtual displacement in nonholonomic system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2003, 1(1): 20—24. (in Chinese)

[23] CHEN Y H. On the deterministic performance of uncertain dynamical systems [J]. International Journal of Control, 1986, 43(5): 1557—1579.

[24] 周春燕, 赵彪. 基于准零刚度隔振器的自适应模糊控制[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(9): 74—82.

ZHOU C Y, ZHAO B. Adaptive fuzzy control based on quasi-zero stiffness vibration isolator memristive hindmarsh-rose neuronal network [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(9): 74—82. (in Chinese)

[25] 张艺镪, 张涛, 李勇, 等. 基于变论域模糊迭代学习的直线电机位置控制[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(12): 45—53.

ZHANG Y Q, ZHANG T, LI Y, et al. Position control of PMLSM based on variable universe fuzzy iterative learning [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(12): 45-53. (in Chinese)

[26] 韩凤舞, 赵云龙, 曾剑峰, 等. 计及随机模糊性的多区域综合能源系统协同优化与收益分配[J/OL]. 电力自动化设备, 2025[2025-01-08]. <https://doi.org/10.16081/j.epae.202502003>.

HAN F W, ZHAO Y L, ZENG J F, et al. Cooperative optimization and profit allocation of multi-regional integrated energysystem considering randomness and fuzziness [J/OL]. Electric Power Automation Equipment, 2025 [2025-01-08]. <https://doi.org/10.16081/j.epae.202502003>.

[27] CHEN Y H. Fuzzy dynamical system approach to the observer design of uncertain systems [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 2010, 224(5): 509—520.