

含非线性振子简支梁横向振动特性研究^{*}

周奇郑^{1,2} 郭彭^{1†} 杨军²

(1. 海军工程大学, 武汉 430033)

(2. 中国科学院声学研究所, 北京 100190)

摘要 针对简支梁结构横向振动控制问题,开展了含非线性振子的简支梁横向振动特性研究. 首先建立了非线性振子—梁耦合振动模型,基于 Hamilton 原理推导了系统的非线性振动微分方程. 采用增量谐波平衡法和弧长延拓法,得到了系统幅频响应完整的半解析解,并结合 Floquet 理论对解的稳定性进行分析. 研究结果表明:非线性振子在合适参数取值下使得简支梁一阶模态无量纲峰值由 3.30 降低至 0.26,降幅达 92.12%,且未产生新的共振峰;非线性振子的非线性刚度和线性刚度共同决定其减振频率位置,其中线性刚度的存在易在目标频段诱发新的共振峰. 非线性振子的引入能够突破传统线性振子的频带限制.

关键词 简支梁, 非线性振子, 振动控制, 横向振动特性

中图分类号: TB535

文献标志码: A

Investigation of Transverse Vibration Characteristics of the Simply Supported Beam with Nonlinear Resonators^{*}

Zhou Qizheng^{1,2} Guo Peng^{1†} Yang Jun²

(1. Naval Engineering University, Wuhan 430033, China)

(2. Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract In this study, the investigation of transverse vibration characteristics of the simply supported beam with nonlinear resonators is carried out to address the problem of transverse vibration control of the simply supported beam structure. Firstly, a nonlinear resonator-beam coupling vibration model is established, and the nonlinear vibration differential equations of the system are derived based on Hamilton's principle. The complete semi-analytical solution of the amplitude-frequency response of the system is obtained by using the incremental harmonic balance method and the arc length extension method, and the stability of the solution is analysed by combining with the Floquet theory. The investigation results show that the nonlinear resonator reduces the dimensionless peak of the first-order modes of the simply supported beam from 3.30 to 0.26 under the appropriate parameter values, with a reduction of 92.12%, and does not generate new resonance peaks; the nonlinear stiffness and linear stiffness of the nonlinear resonator determine the vibration reduction frequency location, and the existence of linear stiffness is easy to induce new resonance peaks in the target frequency band. The introduction of nonlinear resonators can break through the frequency band limitation of the traditional linear resonators.

Key words simply supported beam, nonlinear resonator, vibration control, transverse vibration characteristics

引言

结构振动控制是保障工程系统安全性与可靠性的关键技术,在航空航天、土木建筑及精密机械等领域具有重要意义.传统线性振动控制方法[如调谐质量阻尼器(TMD)^[1,2]]通过共振耦合原理耗散振动能量,但受限于线性系统的幅频特性,其有效减振带宽通常较窄,且在频带边缘易引入新的共振峰,导致主结构振动响应异常增大,制约了线性控制技术的工程应用.

非线性振子的引入为突破线性振动控制方法的局限性提供了新途径.相较于遵循胡克定律的线性系统,非线性振子通过非线性刚度或几何非线性效应展现出强频率依赖性响应特性.理论与实验研究表明,非线性系统的幅频曲线具有多值性、跳跃现象和滞后效应,可在宽频域内实现低响应幅值^[3-5].相较于线性控制方法在频带边缘易激发的共振放大问题,非线性振子的非线性硬化或软化特性可有效抑制主系统振动峰值的同时,避免了线性控制中易出现的新共振峰.非线性振子主要包括刚度非线性和阻尼非线性两种,早期研究大多聚焦于刚度非线性,如立方刚度、分段线性刚度等类型^[6-8].这类设计通过引入非线性刚度元件,在保持传统线性振子基本功能的同时,拓宽了振动抑制的有效频率范围.其中,立方刚度振子通过立方项耦合实现非线性特性,分段线性刚度振子则通过多段刚度组合形成非线性响应,仅含非线性刚度的非线性振子被称为非线性能量阱^[9].Li^[10]采用增量谐波平衡法和弧长延拓法,研究了双稳态非线性能量阱对梁和板结构的振动控制效果,同时得到了非线性能量阱的参数影响规律.文献[11]针对双弹簧非线性能量阱提出了一种振动优化方法,得到了稳态位移振幅最小时的能量阱最优参数以及行为特征,在实现振动抑制的同时避免了新共振峰值的引入.值得注意的是,非线性振子还可能引发主系统复杂的非线性动力学行为^[12,13],这类系统在特定参数条件下会出现不同振动模态的共存状态,其动力学响应呈现出对初始条件的敏感性和分岔特性.近年来,非线性振动控制技术在工程实践中取得显著进

展.文献[3,14]在悬臂梁结构的基础上引入磁铁,实现了无接触情况下高效的能量传递,设计出一种压电磁耦合非线性能量俘获器,以有效抑制振动并实现宽频俘能效果.康厚军等^[15]通过理论和实验的方法研究了斜拉桥线性和非线性振动问题,发现了丰富的非线性振动现象.高原等^[16]设计了一种基于负刚度的惯容型非线性能量阱,并将其应用于整星结构的振动控制,得到了较好的减振效果.

然而,现有研究多聚焦于单一非线性元件的优化设计,对非线性振子与主结构耦合系统的动力学行为及参数匹配机制仍缺乏系统性认识.针对这一问题,本文以简支梁结构为研究对象,构建非线性振子—梁耦合系统模型,通过理论分析与数值仿真揭示非线性振子参数对简支梁横向振动特性的影响规律,并分析非线性振子和简支梁的动力学响应行为,为工程结构的宽频振动控制提供了理论支撑,为非线性减振装置的参数优化设计提供了有益参考.

1 含非线性振子简支梁动力学模型与求解

1.1 系统的耦合动力学模型

针对简支梁结构的横向振动抑制问题,考虑在其表面附加若干非线性振子,构建了简支边界非线性梁横向振动模型,如图1所示.图1中,简支梁的长度记为 L ,在简支梁表面附加 N^* 个非线性振子,其编号由 n 表示,第 n 个非线性振子的质量、线性刚度、非线性刚度和阻尼分别可表示为 m_n^* 、 k_{1n}^* 、 k_{3n}^* 、 c_n^* .简支梁在外部激励力的作用下发生振动,激励力可表示为 $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$,激励力作用位置坐标 x_0 .图1所示为简支梁上直角坐标系,简支梁的横向振动位移可用 $w(x, t)$ 表示, x 表示

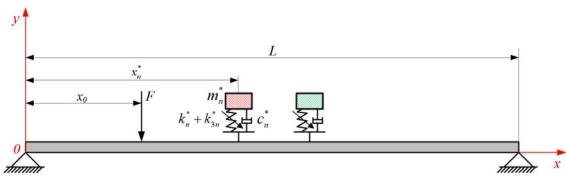


图1 含非线性振子简支梁动力学模型
Fig. 1 Dynamic model of the simply supported beam with nonlinear resonators

简支梁表面坐标位置,非线性振子的安装坐标可表示为 x_n^* , n 表示非线性振子的编号。

为分析附加非线性振子对简支梁横向振动特性的影响,对于细长梁的低频横向振动,可以忽略梁的剪切变形以及截面绕中性轴转动惯量的影响,这种梁被称为 Bernoulli-Euler 梁。含非线性振子简支梁结构可被视为一个连续-离散耦合的振动系统,该系统是由连续的简支梁和离散的振子组成。根据 Hamilton 原理,可得到系统的耦合振动方程为:

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + C_b \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} \\ &= F(t) \delta(x - x_0) + \sum_{n=1}^N F_n^*(t) \delta(x - x_n^*) \quad (1) \\ & m_n^* \ddot{u}_n^*(x_n^*, t) + c_n^* [\dot{u}_n^*(x_n^*, t) - \dot{w}(x_n^*, t)] + \\ & k_{1n}^* [u_n^*(x_n^*, t) - w(x_n^*, t)] + \\ & k_{3n}^* [u_n^*(x_n^*, t) - w(x_n^*, t)]^3 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} F_n^*(t) = F_{kn}^* + F_{cn}^* \\ F_{kn}^* = k_{1n}^* [u_n^*(x_n^*, t) - w(x_n^*, t)] + \\ k_{3n}^* [u_n^*(x_n^*, t) - w(x_n^*, t)]^3 \\ F_{cn}^* = c_n^* [\dot{u}_n^*(x_n^*, t) - \dot{w}(x_n^*, t)] \end{cases} \quad (3)$$

其中, ρ 、 A 、 E 、 I 分别代表梁的密度、横截面积、杨氏模量、转动惯量; C_b 代表梁的阻尼; $w(x, t)$ 代表梁上坐标 x 处在 t 时刻的横向振动位移; $u_n^*(x_n^*, t)$ 代表梁上坐标 x_n^* 处在 t 时刻非线性振子的位移; $F_n^*(t)$ 代表非线性振子的反作用力,包含非线性弹簧力 F_{kn}^* 和阻尼力 F_{cn}^* 。

定义 $\epsilon = m_n^* / \rho A L$ 表示非线性振子与梁的质量比,为简化耦合振动方程(1)至(2)的求解过程,提出以下无量纲变换:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L}, \bar{x}_n^* = \frac{x_n^*}{L}, \bar{w} = \frac{w}{L}, \bar{u}_n^* = \frac{u_n^*}{L}, \\ T &= \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} t, \bar{k}_{1n}^* = \frac{k_{1n}^* L^3}{EI}, \bar{k}_{3n}^* = \frac{k_{3n}^* L^5}{EI}, \\ \sigma &= \frac{C_b L^2}{2\sqrt{\rho A EI}}, \bar{\xi}_n^* = \frac{c_n^* L}{2\sqrt{\rho A EI}}, \\ \bar{F}_n^*(t) &= F_n^*(t) \frac{L^2}{EI}, \bar{F}(t) = F(t) \frac{L^2}{EI}, \\ \Omega &= \sqrt{\frac{\rho A L^4}{EI}} \omega \quad (4) \end{aligned}$$

将式(4)无量纲变换代入式(1)和式(2),可得:

$$\ddot{\bar{w}} + 2\sigma\dot{\bar{w}} + \bar{w}_{xxxx} = \bar{F}\delta(\bar{x} - \bar{x}_0) +$$

$$\sum_n \bar{F}_n^* \delta(\bar{x} - \bar{x}_n^*) + \sum_i \bar{F}_i \delta(\bar{x} - \bar{x}_i) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \epsilon_n^* \ddot{\bar{u}}_n^* + 2\bar{\xi}_n^* (\dot{\bar{u}}_n^* - \dot{\bar{w}}_n^*) + \bar{k}_{1n}^* (\bar{u}_n^* - \bar{w}_n^*) + \\ & \bar{k}_{3n}^* (\bar{u}_n^* - \bar{w}_n^*)^3 = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

其中, $\bar{w}_{xxxx} = \partial^4 \bar{w}(\bar{x}, T) / \partial \bar{x}^4$ 表示梁的无量纲振幅对无量纲坐标 \bar{x} 的四阶导数。

1.2 系统耦合振动方程的半解析解

由于方程(6)中含有非线性项,线性方程的求解方法已不能满足求解需求,这里采用增量谐波平衡法(IHB方法)推导耦合振动方程的半解析解。由于简支梁为等截面均质直梁,不考虑梁中的非线性因素,简支梁的横向振动满足模态叠加原理,因此可将梁的横向振动位移表示为:

$$\bar{w}(\bar{x}, T) = \sum_{m=1}^Q \Phi_m(\bar{x}) q_m(T) \quad (7)$$

其中, m 为模态阶数, $\Phi_m(\bar{x}) = \sqrt{2} \sin(m\pi\bar{x})$ 为简支梁第 m 阶模态下的横向振型函数, $q_m(T)$ 为简支梁第 m 阶模态下的广义坐标。

将式(7)代入式(6),在等号两侧同时乘以 $\Phi_m'(\bar{x}) = \sqrt{2} \sin(m'\pi\bar{x})$ 并对 \bar{x} 进行 $[0, 1]$ 区间内积分,可得:

$$\begin{aligned} & \ddot{\bar{q}} + 2\sigma\dot{\bar{q}} + (m\pi)^4 \bar{q} = \bar{F}\Phi_m(\bar{x}_0) + \\ & \sum_i \bar{F}_i \Phi_m(\bar{x}_i) + \sum_n \bar{F}_n^* \Phi_m(\bar{x}_n^*) \quad (8) \end{aligned}$$

考虑简支梁的前 Q 阶模态参与计算,定义各模态响应的广义坐标为待求未知向量: $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_Q]^T$, 激励力和非线性振子的作用位置振型函数可由向量记为:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_F &= [\Phi_1(\bar{x}_0), \Phi_2(\bar{x}_0), \dots, \Phi_Q(\bar{x}_0)] \\ \mathbf{\Phi}_C &= [\Phi_1(\bar{x}_n^*), \Phi_2(\bar{x}_n^*), \dots, \Phi_Q(\bar{x}_n^*)] \quad (9) \end{aligned}$$

则式(8)可进一步表示为矩阵方程,即:

$$\begin{aligned} & \ddot{\bar{\mathbf{q}}} + 2\sigma\dot{\bar{\mathbf{q}}} + \alpha^2 \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{\Phi}_F^T F_0 \cos(\Omega T) + \\ & \sum_n \mathbf{\Phi}_C^T \{ 2\bar{\xi}_n^* [\dot{\bar{\mathbf{u}}}_n^* - \mathbf{\Phi}_C \dot{\bar{\mathbf{q}}}] + \bar{k}_{1n}^* [\bar{\mathbf{u}}_n^* - \mathbf{\Phi}_C \bar{\mathbf{q}}] + \\ & \bar{k}_{3n}^* [\bar{\mathbf{u}}_n^* - \mathbf{\Phi}_C \bar{\mathbf{q}}]^3 \} \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \epsilon_n^* \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_n^* + 2\bar{\xi}_n^* [\dot{\bar{\mathbf{u}}}_n^* - \mathbf{\Phi}_n^* \dot{\bar{\mathbf{q}}}] + \bar{k}_{1n}^* [\bar{\mathbf{u}}_n^* - \mathbf{\Phi}_n^* \bar{\mathbf{q}}] + \\ & \bar{k}_{3n}^* [\bar{\mathbf{u}}_n^* - \mathbf{\Phi}_n^* \bar{\mathbf{q}}]^3 = 0 \quad (11) \end{aligned}$$

其中, $\alpha_m = (m\pi)^2$, $m = 1, 2, \dots, Q$, $\alpha = \text{diag}(\alpha_m)$ 。

定义简支梁的各阶模态广义坐标、非线性振子振动位移向量为待求未知向量 $\mathbf{X} = [\mathbf{q}^T, \bar{\mathbf{u}}_n^*]^T$, 定义时间变量 $\tau = \Omega T$, 则式(10)和式(11)写为矩阵方程:

$$\Omega^2 \bar{M} \ddot{X} + \Omega \bar{C} \dot{X} + \bar{K} X + \bar{K}_n (\Phi X)^2 X = \bar{F} \cos \tau \quad (12)$$

其中

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n+1} & \\ & \boldsymbol{\varepsilon}_n^* \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n^* = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^* & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_{N^*}^* \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\bar{C} = 2\sigma \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \\ & \mathbf{0}_{N^* \times N^*} \end{bmatrix} + 2\xi_1^* \Phi_1^T \Phi_1 + \dots + 2\xi_n^* \Phi_n^T \Phi_n \quad (15)$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \\ & \mathbf{0}_{N^* \times N^*} \end{bmatrix} + \bar{k}_1^* \Phi_1^T \Phi_1 + \dots + \bar{k}_n^* \Phi_n^T \Phi_n \quad (16)$$

$$\bar{K}_n = \bar{k}_{3n}^* \Phi_n^T \Phi_n \quad (17)$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \Phi_F^T \\ \mathbf{0}_{N^* \times 1} \end{bmatrix} F_0 \quad (18)$$

$$\Phi_n = [\Phi_C, \mathbf{E}_n] \quad (19)$$

其中, \mathbf{E}_n 为第 n 个元素为 -1 、其余元素为 0 的向量, 对应非线性振子, 维度为 $1 \times N^*$ 。

增量谐波平衡法第一步为 New-Raphson 增量过程, 假设 \mathbf{X}_0 、 Ω_0 是矩阵方程(12)在某一时刻的解, 则其邻近点状态可以用增量形式表示为:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}, \Omega = \Omega_0 + \Delta \Omega \quad (20)$$

将式(20)代入式(12)中进行泰勒展开, 省略关于增量的高阶小项, 可得增量方程:

$$\Omega_0^2 \bar{M} \Delta \ddot{X} + \Omega_0 \bar{C} \Delta \dot{X} + (\bar{K} + 3\bar{K}_n) \Delta X = \mathbf{R} - (2\omega_0 \bar{M} \ddot{X}_0 + \bar{C} \dot{X}_0) \Delta \Omega \quad (21)$$

$$\mathbf{R} = \bar{F} \cos \tau - (\Omega_0^2 \bar{M} \ddot{X}_0 + \Omega_0 \bar{C} \dot{X}_0 + \bar{K} X_0 + \bar{K}_n X_0) \quad (22)$$

$$\mathbf{X}_0 = [\mathbf{q}_0^T, \bar{\mathbf{u}}_{n0}^*]^T, \Delta \mathbf{X} = [\Delta \mathbf{q}_0^T, \Delta \bar{\mathbf{u}}_n^*]^T \quad (23)$$

增量谐波平衡法的第二步为 Ritz-Galerkin 谐波平衡过程, 假设矩阵方程(12)的稳态周期解可采用一组有限项谐波叠加的形式近似表示, 并具有如下傅里叶级数形式:

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{k=1}^{N_c} a_{m(2k-1)} \cos(2k-1)\tau + \\ &\sum_{k=1}^{N_s} b_{m(2k-1)} \sin(2k-1)\tau = \mathbf{C}_s \mathbf{A}_m \\ \Delta X_k &= \sum_{k=1}^{N_c} \Delta a_{m(2k-1)} \cos(2k-1)\tau + \end{aligned} \quad (24)$$

$$\sum_{k=1}^{N_s} \Delta b_{m(2k-1)} \sin(2k-1)\tau = \mathbf{C}_s \mathbf{A}_m \quad (25)$$

其中, N_c 、 N_s 分别为余弦谐波与正弦谐波的截断阶数, \mathbf{C}_s 为谐波矩阵, \mathbf{A}_m 为谐波的傅里叶系数矩阵, $\Delta \mathbf{A}_m$ 为谐波增量的傅里叶系数矩阵, 分别为:

$$\mathbf{C}_s = [\cos \tau, \cos 3\tau, \dots, \sin \tau, \sin 3\tau] \quad (26)$$

$$\mathbf{A}_m = [a_{m1}, \dots, a_{m(2N_s-1)}, b_{m1}, \dots, b_{m(2N_s-1)}]^T \quad (27)$$

$$\Delta \mathbf{A}_m = [\Delta a_{m1}, \dots, \Delta a_{m(2N_s-1)}, \Delta b_{m1}, \dots, \Delta b_{m(2N_s-1)}]^T \quad (28)$$

令 $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_Q]^T$; $\Delta \mathbf{A} = [\Delta \mathbf{A}_1, \dots, \Delta \mathbf{A}_Q]^T$; $\mathbf{S} = \text{diag}[\mathbf{C}_s, \dots, \mathbf{C}_s]$, \mathbf{C}_s 为矩阵 \mathbf{S} 的对角线元素, 共 Q 个 \mathbf{C}_s . 系统的解以及解的增量可以表示为:

$$\mathbf{X} = \mathbf{S} \mathbf{A}, \Delta \mathbf{X} = \mathbf{S} \Delta \mathbf{A} \quad (29)$$

将式(29)代入增量方程(12)中, 并在一个时间周期内运用 Galerkin 积分过程, 可得到关于增量 $\Delta \mathbf{A}$ 和频率增量 $\Delta \omega$ 的线性代数方程组:

$$\mathbf{K}_{mc} \Delta \mathbf{A} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_{mc} \Delta \Omega \quad (30)$$

其中

$$\mathbf{K}_{mc} = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T [\Omega_0^2 \bar{M} \ddot{\mathbf{S}} + \Omega_0 \bar{C} \dot{\mathbf{S}} + (\bar{K} + 3\bar{K}_n) \mathbf{S}] d\tau \quad (31)$$

$$\mathbf{R} = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \{ \bar{F} \cos \tau - [\Omega_0^2 \bar{M} \ddot{\mathbf{S}} + \Omega_0 \bar{C} \dot{\mathbf{S}} + (\bar{K} + \bar{K}_n) \mathbf{S}] \} d\tau \mathbf{A} \quad (32)$$

$$\mathbf{R}_{mc} = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T (2\Omega_0 \mathbf{M} \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{S}}) d\tau \mathbf{A} \quad (33)$$

对方程式(30)进行求解通常采用的是 Newton-Raphson 迭代法近似数值求解, 预先对 $\Delta \Omega$ 进行取值, 此时迭代方程中只有 $\Delta \mathbf{A}$ 和 \mathbf{A}_0 是未知的, 对 $\Delta \mathbf{A}$ 假定一个初始值, 通过判定 \mathbf{R} 是否符合容差需求, 来确定此时 \mathbf{A}_0 是否为方程的解, 即 $\|\mathbf{R}\|_\infty < \epsilon_0$, 其中 ϵ_0 为容差. 若 \mathbf{R} 不满足判定条件, 使 $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0 + \Delta \mathbf{A}$ 更新, 再次通过判别式判定 \mathbf{R} 是否符合容差条件, 不断重复以上过程直至 \mathbf{R} 符合判定条件, 即可计算得到方程的解 \mathbf{A} . 利用 Newton-Raphson 迭代法对非线性方程求解过程中发现, 刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}_{mc}$ 或 \mathbf{R}_{mc} 易转变为奇异或者病态矩阵, 此时 Newton-Raphson 迭代法难以收敛而失效. 为优化这一过程, 可将增量谐波平衡法结合弧长延拓法对方程进行求解, 利用同伦思想通过引入弧长参数 Δs_i 作为辅助增量迭代求解^[17]. 对于一条完整的解曲线而言, 由于弧长是单调连续变化的, 因此该法能够

有效通过解曲线的奇异点,从而达到自动追踪解响应的目的.利用 Newton-Raphson 迭代法首先求得4个初始解,分别记为 x_0, x_1, x_2, x_3 ,则下一个点 x_4 可通过弧长增量 Δs 进行预报,若在 x_i 处弧长状态量为 v_i ,可记 $v_0=0, v_1=s_1, v_2=v_1+s_2, v_3=v_2+s_3, v_4=v_3+\Delta s$,那么 x_4 可按照以下三次外插公式计算:

$$x_4 = \sum_{i=0}^3 \left(\prod_{j \neq i}^3 \frac{v_4 - v_j}{v_i - v_j} \right) x_i \quad (34)$$

其中

$$s_i = |x_{i+1} - x_i| = \sqrt{\sum_{j=1}^{N_f+1} [x_{i+1}(j) - x_i(j)]^2} \quad (35)$$

式中, N_f 为式(27)的总自由度数, $N_f = 2(N_c + N_s)$.

计算得到式(30)的解后,利用 Floquet 理论对解的稳定性进行判定,假设 q_0 为系统某一精确周期解,那么 q_0 应满足平衡点条件:

$$\omega^2 M \ddot{q}_0 + \omega C_0 \dot{q}_0 + [K + K_N(q_0)] q_0 = \bar{F} \cos \tau \quad (36)$$

考虑外界扰动因素在 q_0 附近产生了一定的偏移量 Δq ,记

$$q = q_0 + \Delta q \quad (37)$$

将式(37)代入到式(30)中,忽略关于 Δq 的高阶小量,化简可得到以 Δq 为未知量的线性化扰动方程

$$\omega^2 M \Delta \ddot{q} + \omega C \Delta \dot{q} + [K + 3K_N(q_0)] \Delta q = 0 \quad (38)$$

根据线性化稳定性理论,周期解 q_0 的局部稳定性可以转化为其附近扰动方程(38)解的稳定性.进一步将式(38)写成状态方程组形式

$$\dot{Y} = Q(\tau) Y \quad (39)$$

其中, $Y = [\Delta q, \Delta \dot{q}]$, $Q(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ Q_{21} & -(1/\omega)M^{-1}C \end{bmatrix}$,
 $Q_{21} = -\frac{1}{\omega^2} M^{-1} [K + 3K_N(q_0)]$.

由于存在 $Q(\tau) = Q(\tau + T_0)$,根据线性微分方程组基本理论,则 $Y(\tau)$ 与 $Y(\tau + T_0)$ 与满足映射关系

$$Y(\tau + T_0) = P Y(\tau) \quad (40)$$

其中, P 为非奇异常值转移矩阵.用 Floquet 理论判断周期解的稳定性时,如果转移矩阵的所有特征

根的模值均小于1,则周期解是渐近稳定的,否则为不稳定.

增量谐波平衡法的计算精度取决于预设周期解的谐波项数,取谐波截断阶数为3时,结合式(24),则式(12)解的表达式可写为:

$$\begin{cases} q_m = a_{m1} \cos(\tau) + a_{m3} \cos(3\tau) + \\ b_{m1} \sin(\tau) + b_{m3} \sin(3\tau) \\ \bar{u}_n^* = a_{n1}^* \cos(\tau) + a_{n3}^* \cos(3\tau) + \\ b_{n1}^* \sin(\tau) + b_{n3}^* \sin(3\tau) \end{cases} \quad (41)$$

其中 $\tau = \omega t$, $a_{mp}, b_{mp}, a_{np}^*, b_{np}^*$ 为待求谐波系数, m 为简支梁参与计算的模态阶数,取值为 $1-Q$; n 为非线性振子编号; p 取值为1和3分别代表一阶和三阶谐波项的系数.

已知简支梁横向振动位移可由振型叠加的形式表示,即: $\bar{w}(\bar{x}, T) = \sum_{m=1}^Q \Phi_m(\bar{x}) q_m(T)$,结合式(41)可将简支梁横向振动位移进一步写为:

$$\begin{aligned} \bar{w}(\bar{x}, T) = \sum_{m=1}^Q [\Phi_m(\bar{x}) a_{m1} \cos(\tau) + \\ \Phi_m(\bar{x}) a_{m3} \cos(3\tau) + \Phi_m(\bar{x}) b_{m1} \sin(\tau) + \\ \Phi_m(\bar{x}) b_{m3} \sin(3\tau)] \end{aligned} \quad (42)$$

求得简支梁表面坐标 \bar{x} 处无量纲横向振动位移结果:

$$|\bar{w}| = \sum_{m=1}^Q |\Phi_m(\bar{x})| \sqrt{a_{m1}^2 + a_{m3}^2 + b_{m1}^2 + b_{m3}^2} \quad (43)$$

2 非线性振子对简支梁振动特性的影响

基于弧长延拓法和增量谐波平衡法,研究非线性振子对简支梁的影响,由矩阵方程(12)可以得到非线性振子和简支梁的耦合振动方程,通过迭代计算,可以得到耦合方程的近似周期解.以此为基础,分析非线性振子参数对简支梁横向振动特性的影响规律,给出参与计算分析的具体案例,简支梁在幅值为12.87 N激励力作用下发生振动,激励点位置为 $x_0 = 0.3$ m,振动分析点位置为 $x_c = 0.7$ m,简支梁和非线性振子各关键参数如表1和表2所示.将表1和表2所示参数依据式(4)进行无量纲变换可得无量纲参数如下: $\epsilon_n^* = 0.1, \sigma = 0.1, \xi_n^* = 0.1, \bar{k}_{1n}^* = 0, \bar{k}_{3n}^* = 30, \bar{x}_n^* = 0.7, \bar{x}_c = 0.7, \bar{x}_F = 0.3$ (力的作用位置)、 $F_0 = 5$. 分别利用增量谐波平衡法(IHB方法)和龙格库塔法(R-K方法)计算含

单个非线性振子简支梁上坐标 $\bar{x} = \bar{x}_c$ 处的频率响应曲线以验证解的准确性,再考虑未附加振子时简支梁上相同坐标位置处频率响应结果,如图 2 所示.图 2 中黑色实线为未附加振子时简支梁的幅频特性曲线,纵坐标表示梁上 \bar{x}_c 位置处的无量纲横向振动位移,可由式(43)计算得到,记为 $|\bar{w}_c|$.

表 1 简支梁的参数

Table 1 Parameters of the simply supported beam

简支梁参数	符号/单位	数值
长度	L/m	1
截面宽度	B/m	0.020
截面高度	H/m	0.002
截面积	A_b/m^2	4×10^{-5}
密度	$\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$	7930
阻尼系数	$C_b/(\text{N}\cdot\text{s}/\text{m})$	0.18
惯性矩	$I/(\text{m}^4)$	1.33×10^{-11}
弹性模量	E/Pa	1.93×10^{11}

表 2 非线性振子的参数

Table 2 Parameters of the nonlinear resonator

非线性振子参数	符号/单位	数值
质量	m_n^*/kg	0.0317
线性刚度系数	$k_{1n}^*/(\text{N}/\text{m})$	0
三次非线性刚度系数	$k_{3n}^*/(\text{N}/\text{m})$	77.20
阻尼系数	$c_n^*/(\text{N}\cdot\text{s}/\text{m})$	0.18
安装位置	x_n^*/m	0.7

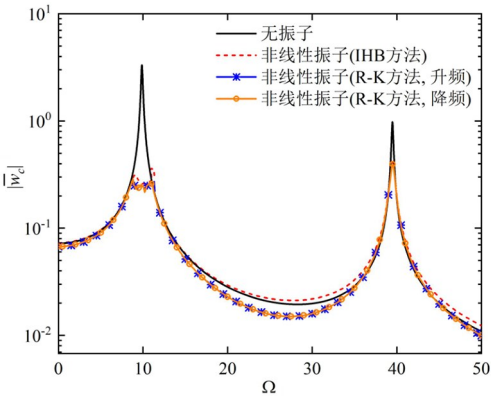


图 2 附加单个非线性振子和无振子时简支梁表面坐标处幅频特性曲线

Fig. 2 Amplitude-frequency curves at the coordinate on the surface of a simply supported beam with a single nonlinear resonator and no resonator

如图 2 所示,在 $\bar{x}_F=0.3$ 位置处的简谐激励力作用下,简支梁前两阶模态被激发出来,其固有频

率 Ω 分别为 9.87 和 39.48。为便于后续分析,将简支梁被激发的前两阶共振峰值称为其第一共振峰和第二共振峰。附加非线性振子后,简支梁在第一共振峰处($\Omega=9.87$)的无量纲位移 $|\bar{w}_c|$ 由 3.30 降低至 0.26,降低了 92.12%;简支梁在第二共振峰处($\Omega=39.48$)的无量纲位移 $|\bar{w}_c|$ 由 0.97 降低至 0.40,降低了 58.76%,值得注意的是在简支梁上附加非线性振子后抹平了第一共振峰处的振动响应幅值,且未引起新的反共振峰.此外,由增量谐波平衡法和龙格库塔法计算得到的简支梁的幅频响应结果表现出相似的规律,且在 0~50 无量纲频段平均误差约 0.06,吻合度较好,进一步验证了论文所提非线性方程求解方法的正确性.

下面重点研究非线性振子的非线性刚度、线性刚度、质量比、阻尼比及布设位置对简支梁横向振动特性的影响.基于表 2 中非线性振子的初始计算参数,首先分析非线性刚度 \bar{k}_{3n}^* 的影响,计算得到初始参数下(无量纲非线性刚度 $\bar{k}_{3n}^*=30$)简支梁横向振动的稳态响应,随后将 \bar{k}_{3n}^* 调整为 30、100、500、1000、10 000,图 3 给出了不同非线性刚度下简支梁上坐标 $\bar{x} = \bar{x}_c$ 处横向振动位移的幅频特性曲线.

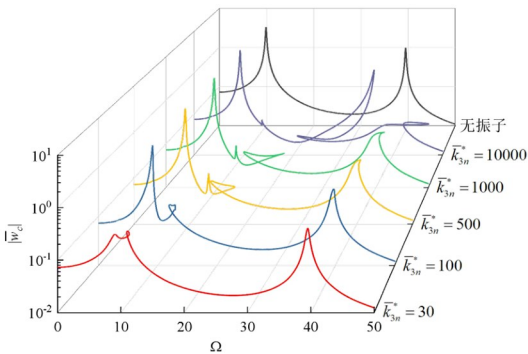


图 3 不同非线性振子的非线性刚度下简支梁幅频特性曲线

Fig. 3 Amplitude-frequency curves of the simply supported beam under different nonlinear resonators with nonlinear stiffnesses

由图 3 可知,不同非线性刚度使得简支梁在不同激励频率处出现了非线性特征,定义该激励频率为非线性刚度作用频率.当非线性刚度值增大时,其作用频率向高频方向移动.在 0~50 无量纲频率范围内,简支梁前两阶共振模态被激发出来,当非线性刚度取值 $\bar{k}_{3n}^*=30$ 时,其主要在第一阶模态($\Omega=9.87$)附近发挥抑制作用,简支梁横向位移由 3.30 降低至 0.36,降幅达 87.5%,且未引入新的反共振峰;简支梁第二共振峰幅值由 0.97 降低至

0.41, 降低了 57.73%。随着非线性刚度提升至 100~10 000 区间, 简支梁第一阶模态处开始出现新的振动响应峰值, $\bar{k}_{3n}^* = 100$ 时第一共振峰由 $\bar{k}_{3n}^* = 30$ 的 0.36 增大至 2.80; 增大非线性刚度, 其作用频率延伸至第二阶模态区域, 导致该模态共振峰出现非线性特征而向右侧偏斜, 减振效果增强 (如 $\bar{k}_{3n}^* = 10\,000$ 时, 简支梁第二共振峰由 0.98 降低至 0.062), 同时简支梁第一共振峰值增大。值得注意的是, 仅通过调节非线性刚度参数无法实现全频域振动抑制, 实际减振设计中需优先明确目标减振频段、设计可激发的最优非线性刚度参数, 同时协同考虑线性刚度等其他参数的综合影响。

由图 3 可知, 非线性刚度 \bar{k}_{3n}^* 取值 10 000 时, 简支梁横向振动位移的幅频特性曲线表现出复杂的非线性特征, 为进一步验证增量谐波平衡法 (IHB 方法) 对于求解结构复杂非线性的正确性, 再次利用龙格库塔法 (R-K 方法) 对理论求解结果进行验证, 计算 $\bar{k}_{3n}^* = 10\,000$ 时简支梁横向振动位移响应结果对比如图 4 所示。

由图 4 可知, 增量谐波平衡法和龙格库塔法在解的稳定区域表现出良好的一致性, 验证了论文中增量谐波平衡法对于处理结构复杂非线性的可行性以及求解结果正确性。

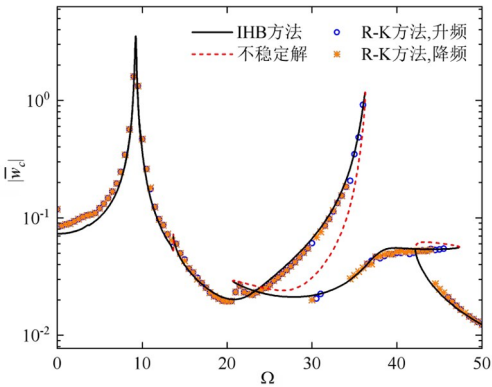
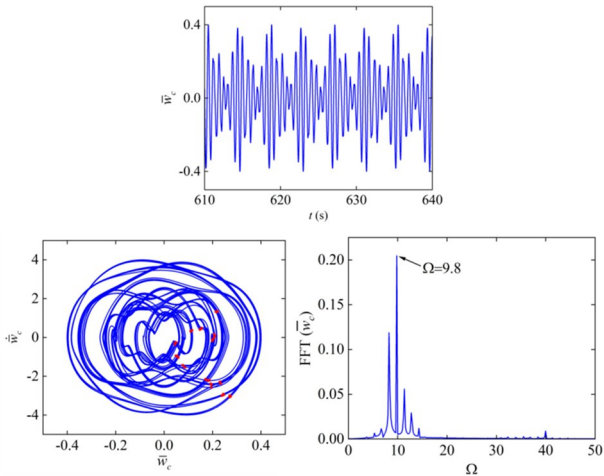


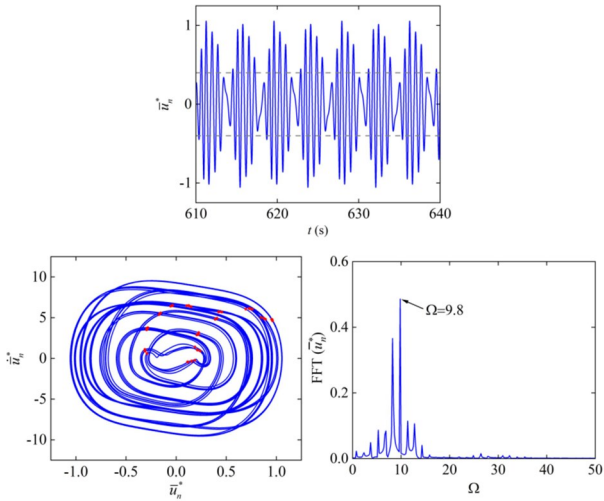
图 4 $\bar{k}_{3n}^* = 10\,000$ 时简支梁横向振动位移的增量谐波平衡法 (IHB 方法) 和龙格库塔法 (R-K 方法) 求解结果
Fig. 4 The results of the increment harmonic balance method (IHB method) and the Runge-Kutta method (R-K method) for the transverse vibration displacement of the simply supported beam when $\bar{k}_{3n}^* = 10\,000$

图 4 中, 非线性刚度 \bar{k}_{3n}^* 取值 30 时, 简支梁在一阶模态频率处 ($\Omega = 9.8$ 附近) 横向振动位移 $|\bar{w}_c|$ 受到削弱且未引入新的峰值, 此时简支梁的振动特性得到优化, 图 5 给出了简支梁和非线性振子的时

域、相图、庞加莱截面 (红色标记) 及快速傅里叶变换 (FFT) 频谱, 如图 5 所示, 在简谐激励力作用下, 简支梁和非线性振子的时域响应均表现出周期性振荡, 且振子振动位移大于简支梁的振动位移; 简支梁和非线性振子的相图均为闭合杂乱曲线, 同时庞加莱截面呈现出各点离散分布特征, 这意味着非线性振子作用频率处, 简支梁和非线性振子进入混沌运动状态; 此外, 频谱结果表明, 简支梁和非线性振子动态响应行为均以激励频率 ($\Omega = 9.8$) 为主频, 并存在各级次频谐波成分。



(a) 简支梁横向振动的时域响应、相图、庞加莱截面 (红色标记) 及频谱



(b) 非线性振子横向振动的时域响应、相图、庞加莱截面 (红色标记) 及频谱

图 5 简支梁与非线性振子的动态响应行为, $\bar{k}_{3n}^* = 30, \Omega = 9.8$
Fig. 5 Dynamic response behavior of the simply supported beam and the nonlinear oscillator, $\bar{k}_{3n}^* = 30, \Omega = 9.8$

随着非线性刚度 \bar{k}_{3n}^* 增大至 100~10 000 范围内, 其发挥作用的主导频率逐渐升高, 简支梁一阶模态频率处共振峰值增大, 且作用频率处出现分岔非线性特征, 致使简支梁横向振动位移增大, 在 \bar{k}_{3n}^* 取值 10 000 时, 于 $\Omega = 36.24$ 处简支梁振幅由

0.04 增大至 1.17. 原因在于此频率位置可能引起非线性振子复杂的非线性动态行为,从而增大了与简支梁的耦合作用,引起简支梁横向振动位移增大.图 6 给出了 $\bar{k}_{3n}^* = 10\ 000, \Omega = 36.24$ 时简支梁以及非线性振子的时域、相图、庞加莱截面(红色标记)及 FFT 频谱.图中简支梁横向振动位移幅值为 0.0353,大于振子位移幅值 0.0067,结合相图以及庞加莱截面结果可得,简支梁和非线性振子均为周期运动,具有稳定的响应结果.频谱结果中,简支梁频谱仅包含 $\Omega = 36.24$,非线性振子除 $\Omega = 36.24$ 外还显示其三倍频谱,即 $\Omega = 108.72$.

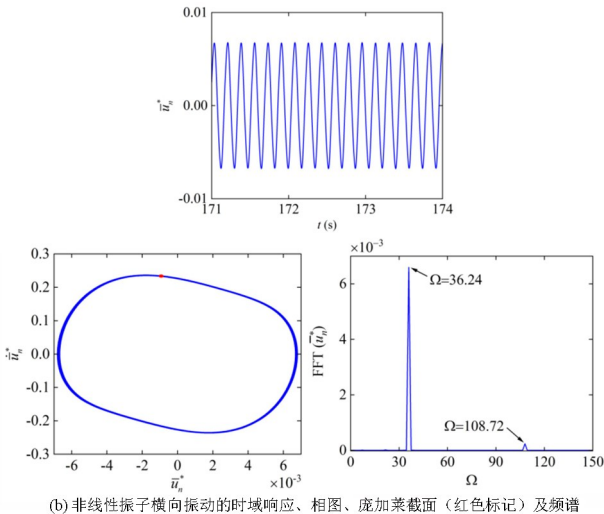
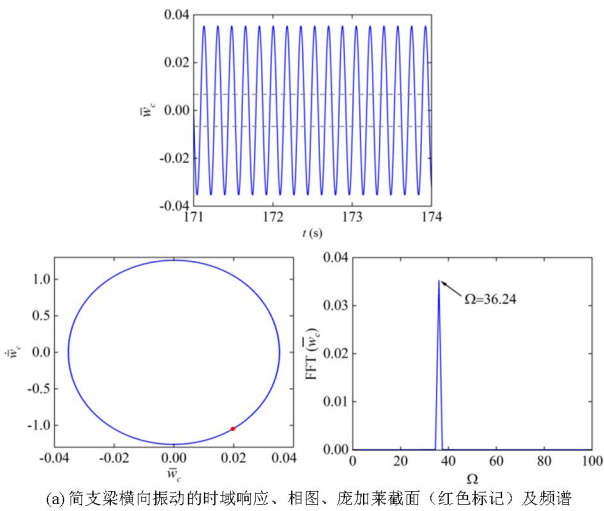


图 6 简支梁与非线性振子的动态响应行为,
 $\bar{k}_{3n}^* = 10\ 000, \Omega = 36.24$
Fig. 6 Dynamic response behavior of the simply supported beam and the nonlinear oscillator, $\bar{k}_{3n}^* = 10\ 000, \Omega = 36.24$

不同非线性刚度对简支梁振动特性影响作用频率不同,在非线性振子作用频率处其往往表现出复杂的非线性特征,具有以某频率为主导其余次频

谐波伴随的宽频响应.接着,研究线性刚度对简支梁横向振动特性的影响,在非线性刚度研究基础上,针对简支梁第一共振峰展开控制研究,取非线性刚度 \bar{k}_{3n}^* 为 30,并考虑非线性振子的初始计算线性刚度 \bar{k}_{1n}^* 为 0,减少或增大非线性振子的线性刚度数值, \bar{k}_{1n}^* 分别取值为 $-20, -10, -5, 0, 5, 10, 20$,图 7 给出了附加不同线性刚度非线性振子时简支梁坐标 $\bar{x} = \bar{x}_c$ 处横向振动位移幅频响应结果.

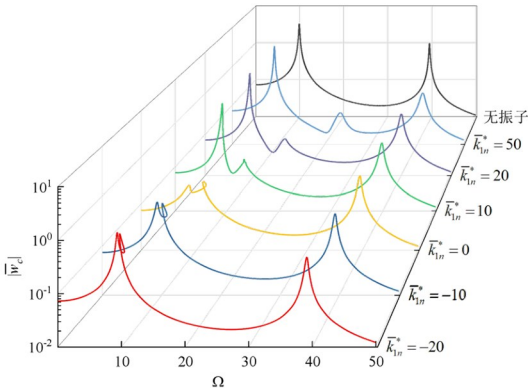


图 7 不同非线性振子的线性刚度下简支梁幅频特性曲线
Fig. 7 Amplitude-frequency curves of the simply supported beam under different nonlinear resonator linear stiffnesses

由图 7 可知,非线性振子的线性刚度取负值时,非线性振子对简支梁的作用主要体现在对简支梁第一共振峰值的抑制.此时简支梁横向振动位移逐步显现分岔等非线性特征,且并未引起新的反共振峰.随着非线性振子负刚度的降低,对简支梁第一共振峰幅值的抑制作用逐渐减弱,简支梁一阶模态处横向振动位移峰值 $|\bar{w}_c|$ 由 $\bar{k}_{1n}^* = 0$ 时的 0.36 升高至 $\bar{k}_{1n}^* = -20$ 时的 1.35;非线性振子线性刚度取正值时,随着线性刚度的增大,减振频率 Ω 由 11.15 增大至 13.91 和 20.35,且在减振频率右侧引出新的反共振峰,减振频率处简支梁横向振动位移 $|\bar{w}_c|$ 由 0.11 降低至 0.03 和 0.0075,对简支梁第二共振峰抑制作用则随线性刚度增大持续增强,该现象揭示了线性刚度对简支梁动力学振动特性的差异化影响.

非线性振子的线性刚度取负值能够抑制简支梁的横向振动位移且不会引起新的反共振峰,而正的线性刚度决定了振子的减振频率.在进行减振设计中,附加振子的质量是决定其能否实际应用的关键.因此,本节针对非线性振子的质量比继续开展振动控制研究,取非线性刚度 \bar{k}_{3n}^* 和线性刚度 \bar{k}_{1n}^*

的初始计算参数分别为 30 和 0, 分析质量比 ϵ_n^* 取值为 0.01、0.05、0.10、0.15、0.20、0.25 时简支梁的横向振动特性, 图 8 所示为附加具有不同质量比的非线性振子时简支梁横向振动幅频特性曲线。

由图 8 可知, 质量比取值 $\epsilon_n^* = 0.01$ 时, 简支梁第一共振峰值 $|\bar{w}_c|$ 从 3.30 降至 2.72, 降幅 17.60%, 而对第二共振峰的衰减更显著, 由 0.98 降低至 0.30, 降低了 69.39%, 此时简支梁振动响应具有稳定峰值。随着非线性振子质量比的增加, 简支梁第一共振峰值 $|\bar{w}_c|$ 出现先锐减后缓增的演变规律, 其峰值最小值出现在 $\epsilon_n^* = 0.1$ 时, 振幅衰减幅度 87.50%, 但同参数下第二共振峰幅值升至 1.15, 产生不利幅值增强效应。当质量比 $\epsilon_n^* > 0.1$ 后, 简支梁第一共振峰出现非线性振动特性, 共振峰向右侧偏斜, 且幅值增大, 而第二共振峰随质量比增大逐步衰减。研究表明, 质量比对简支梁多模态可产生不同的调控作用, 过大的附加质量虽可增强简支梁第二共振峰的减振效果, 却会削弱第一共振峰的幅值衰减。

接着探究非线性振子的阻尼比对简支梁横向振动特性的影响, 确定非线性振子的初始计算参数如下: 非线性刚度为 $\bar{k}_{3n}^* = 30$ 、线性刚度为 $\bar{k}_{1n}^* = 0$ 、质量比 $\epsilon = 0.1$, 考虑非线性振子的初始计算阻尼比为 $\xi_n^* = 0.01$, 逐渐增大阻尼比数值, ξ_n^* 分别取值为 0.01、0.05、0.10、0.15、1.0、10 参与计算, 附加不同阻尼比非线性振子时简支梁上坐标 $\bar{x} = \bar{x}_c$ 处横向振动位移幅频特性曲线如图 9 所示。

由图 9 可知, 当阻尼比在较小范围 ($\xi_n^* = 0.01$ 、0.05) 取值时, 简支梁在 $\Omega = 9.06$ 处呈现分岔非线性行为, 第一共振峰幅值 $|\bar{w}_c|$ 出现显著跳跃式衰减, 衰减前最大幅值约 3.09, 接近无振子简支梁振幅 3.30, 且简支梁第二共振峰向右侧偏斜。随着阻尼比 ξ_n^* 增大至 0.10 和 0.15, 简支梁第一共振峰幅值最小, 分别为 0.30 和 0.31, 降幅为 90.94% 和 90.63%。当振子阻尼比增大至 1.0 以上时, 简支梁振动响应恢复线性动力学特征, 整体减振效果减弱, 简支梁第二共振峰向低频移动, 且阻尼比 $\xi_n^* = 10$ 时简支梁横向振动位移要大于阻尼比 $\xi_n^* = 1$ 时。阻尼比过大会引起简支梁横向振动位移的异常突增, 影响简支梁横向振动特性, 而阻尼比过大会使减振效果变差且改变简支梁固有频率位置。

研究非线性振子的布设位置对简支梁横向振动特性的影响, 确定非线性刚度为 $\bar{k}_{3n}^* = 30$ 、线性刚度为 $\bar{k}_{1n}^* = 0$ 、质量比 $\epsilon_n^* = 0.1$ 、阻尼比 $\xi_n^* = 0.1$, 非线性振子的无量纲安装位置 \bar{x}_n^* 在 0.1~0.9 范围内变化, 计算不同非线性振子布设位置下简支梁上坐标 $\bar{x} = \bar{x}_c$ 处横向振动位移幅频特性曲线如图 10 所示。力的作用位置为 $\bar{x}_F = 0.7$, 测试点位置 $\bar{x}_c = 0.7$ 。

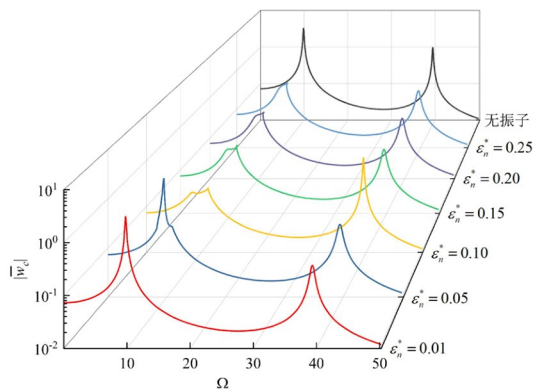


图 8 不同非线性振子的质量比下简支梁幅频特性曲线
Fig. 8 Amplitude-frequency curves of the simply supported beam under different nonlinear resonator mass ratios

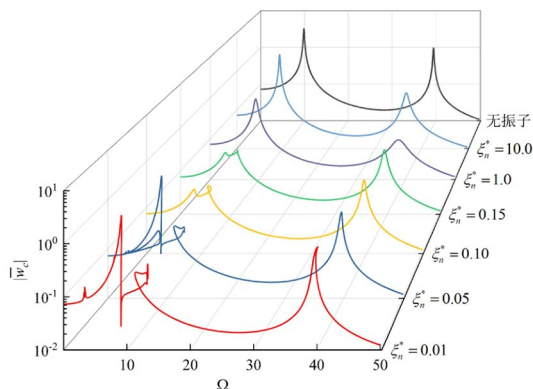


图 9 不同非线性振子的阻尼比下简支梁幅频特性曲线
Fig. 9 Amplitude-frequency curves of the simply supported beam under different nonlinear resonator damping ratios

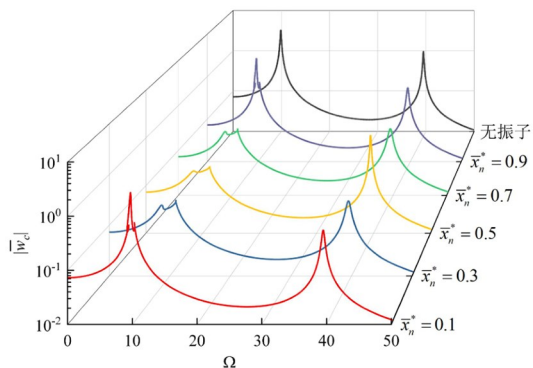


图 10 不同非线性振子的布设位置下简支梁幅频特性曲线
Fig. 10 Amplitude-frequency curves of the simply supported beam under different nonlinear resonator locations

由图 10 分析可知,随着非线性振子布设位置的变化简支梁的幅频特性曲线相对于 $\bar{x}_n^* = 0.5$ 基本上呈现出对称状态,简支梁的第一共振峰和第二共振峰均以 \bar{x}_n^* 取值为 0.5 时幅值为极值点对称变化.随着非线性振子布设位置由 $\bar{x}_n^* = 0.1$ 逐渐过渡到 $\bar{x}_n^* = 0.5$ 时,简支梁的第一共振峰分岔行为明显,出现不稳定解区域且幅值减小,在 $\bar{x}_n^* = 0.5$ 时幅值 $|\bar{\omega}_c|$ 变化至最小, $|\bar{\omega}_c| = 0.26$ 时,降低了 92.12%.此外,简支梁第二共振峰随非线性振子安装位置变化,在 $\bar{x}_n^* = 0.5$ 时幅值升至最大,具体幅值为 $|\bar{\omega}_c| = 1.15$,大于无振子简支梁的振幅 0.98.

最后,考虑在简支梁上附加多个非线性振子,研究非线性振子的数量对简支梁横向振动特性的影响,假设每个非线性振子的参数均相同,其无量纲参数具体取值为:质量比 $\epsilon_n^* = 0.1$ 、阻尼比 $\xi_n^* = 0.1$ 、线性刚度 $\bar{k}_{1n}^* = 0$ 、非线性刚度 $\bar{k}_{3n}^* = 30$,各非线性振子在简支梁上等间隔布设,图 11 给出了含不同数量非线性振子简支梁横向振动位移的幅频特性曲线.

由图 11 可知,在非线性振子参数相同的前提下,非线性振子数量的变化主要对简支梁共振峰幅值产生影响.随着非线性振子数量的增加,对简支梁第一共振峰值减振效果先增强后减弱,在 $N^* = 3$ 时减振效果最好,无量纲最大减振量为 3.07,同时含非线性振子简支梁振动响应的非线性行为更加显著.此外,随着非线性振子数量的增加,对简支梁第二共振峰值减振效果逐渐增强,无量纲最大减振量由 $N^* = 1$ 时的 0.58 提升至 $N^* = 5$ 时的 0.82.

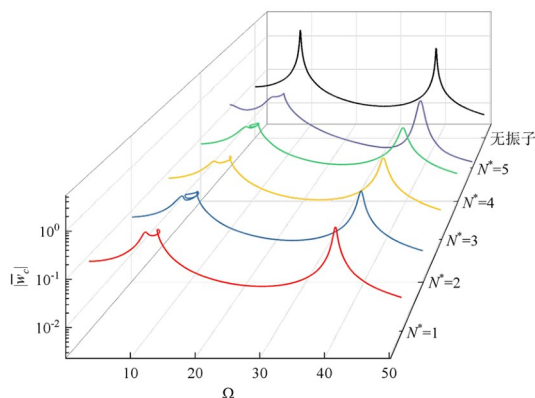


图 11 不同非线性振子的数量下简支梁幅频特性曲线

Fig. 11 Amplitude-frequency curves of the simply supported beam under different numbers of nonlinear resonators

3 结论

针对线性振子减振频带窄、频带两侧共振峰值大等问题,在简支梁结构中引入非线性振子以优化其减振性能,开展了含非线性振子简支梁横向振动特性研究,具体工作如下:

(1)建立了有限长非线性局域共振梁的动力学模型,得到了系统非线性耦合振动方程,利用增量谐波平衡法和弧长延拓法推导出了梁结构横向振动位移的理论解,并结合 Floquet 理论给出了解的稳定性判定方法.非线性振子的线性刚度 \bar{k}_{1n}^* 和非线性刚度 \bar{k}_{3n}^* 分别取值为 0 和 30 时,简支梁一阶模态无量纲峰值由 3.30 降低至 0.26,降低了 92.12%,且未引入新的共振峰.

(2)分析了非线性振子的非线性刚度、线性刚度、质量比、阻尼比、安装位置和数量对简支梁横向振动特性的影响.非线性刚度和线性刚度决定了非线性振子发挥作用的频率位置,且非线性振子中若存在线性刚度易在减振频率处引入新的共振峰.同时,非线性振子在某些参数取值下使得简支梁的横向振动出现分岔、混沌等非线性动力学行为,从而影响梁结构的振动稳定性,理论研究结果可为非线性结构的合理设计提供参考.

参考文献

- [1] 刘耀宗, 郁殿龙, 赵宏刚, 等. 被动式动力吸振技术研究进展[J]. 机械工程学报, 2007, 43(3): 14—21.
LIU Y Z, YU D L, ZHAO H G, et al. Review of passive dynamic vibration absorbers [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(3): 14—21. (in Chinese)
- [2] 郭子玉, 李静, 朱绍涛, 等. 限幅型非光滑吸振器模型的稳定性与周期运动研究[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(5): 8—15.
GUO Z Y, LI J, ZHU S T, et al. Stability and periodic motions for a non-smooth vibration absorber model with limited amplitude [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(5): 8—15. (in Chinese)
- [3] REZAEI M, TALEBITOOTI R, LIAO W H. Exploiting bi-stable magneto-piezoelectric absorber for simultaneous energy harvesting and vibration mitiga-

- tion [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, 207: 106618.
- [4] LI H Q, LI A, KONG X R, et al. Dynamics of an electromagnetic vibro-impact nonlinear energy sink, applications in energy harvesting and vibration absorption [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2022, 108(2): 1027–1043.
- [5] DING H, CHEN L Q. Designs, analysis, and applications of nonlinear energy sinks [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 100(4): 3061–3107.
- [6] OUEINI S S, CHIN C M, NAYFEH A H. Dynamics of a cubic nonlinear vibration absorber [J]. *Nonlinear Dynamics*, 1999, 20(3): 283–295.
- [7] PUN D, LIU Y B. On the design of the piecewise linear vibration absorber [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2000, 22(4): 393–413.
- [8] WALSH P L, LAMANCUSA J S. A variable stiffness vibration absorber for minimization of transient vibrations [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 158(2): 195–211.
- [9] VAKAKIS A F. Inducing passive nonlinear energy sinks in vibrating systems [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2001, 123(3): 324–332.
- [10] LI H Q, LI A, KONG X R. Design criteria of bistable nonlinear energy sink in steady-state dynamics of beams and plates [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 103(2): 1475–1497.
- [11] 王国旭, 丁虎, 陈立群. 简谐激励下双弹簧非线性能量阱的优化[J]. *动力学与控制学报*, 2021, 19(6): 46–51.
- WANG G X, DING H, CHEN L Q. Optimization of a nonlinear energy sink with double springs and harmonic excitation [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2021, 19(6): 46–51. (in Chinese)
- [12] AHMADABADI Z N, KHADEM S E. Nonlinear vibration control of a cantilever beam by a nonlinear energy sink [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2012, 50: 134–149.
- [13] 刘树勇, 位秀雷, 王基, 等. 基于双势阱系统的混沌振动研究[J]. *振动与冲击*, 2017, 36(24): 23–29, 43.
- LIU S Y, WEI X L, WANG J, et al. Chaotic vibration study based on two-well potential theory [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, 36(24): 23–29, 43. (in Chinese)
- [14] FANG X, WEN J H, YIN J F, et al. Highly efficient continuous bistable nonlinear energy sink composed of a cantilever beam with partial constrained layer damping [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 87(4): 2677–2695.
- [15] 康厚军, 尹昆, 苏潇阳, 等. 基于索-梁结构的斜拉桥非线性振动仿真研究[J]. *动力学与控制学报*, 2024, 22(5): 16–23.
- KANG H J, YIN K, SU X Y, et al. Nonlinear vibration simulation study of cable-stayed bridge based on cable-beam structure [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2024, 22(5): 16–23. (in Chinese)
- [16] 高原, 张振, 方勃. 基于负刚度惯容型非线性能量汇的整星振动抑制[J]. *动力学与控制学报*, 2024, 22(1): 87–96.
- GAO Y, ZHANG Z, FANG B. Whole-spacecraft vibration suppression based on negative stiffness inertial nonlinear energy sink [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2024, 22(1): 87–96. (in Chinese)
- [17] ZANG J, CHEN L Q. Complex dynamics of a harmonically excited structure coupled with a nonlinear energy sink [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2017, 33(4): 801–822.