

# 基于对偶四元数的机器人运动学手眼标定<sup>\*</sup>

刘澄霖 王笑 宋汉文<sup>†</sup>

(同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092)

**摘要** 如今工业机器人有着愈发广泛的应用,其中融合了视觉系统的机器人可以高效执行多种任务.手眼融合系统的核心在于通过手眼标定建立机器人与视觉系统之间的变换关系.尽管已有研究通过多种数学工具提出了手眼标定方程的封闭解及优化方法,本研究针对分步法中存在的误差传递和奇异问题,提出一种基于对偶四元数的分步求解方法.利用对偶矩阵和对偶四元数的性质,将四元数解耦原理扩展至对偶四元数域,实现了基于对偶四元数的分步求解,推导出封闭解及奇异性判定条件,重构了平移向量求解方程,优化了误差传递路径.对比已有的方法,包括基于四元数的分步方法和基于对偶四元数的同步方法,该方法在旋转与平移求解中均表现出更低误差.通过设计 Eye-in-hand 实验平台并配合高精度视觉测量系统,验证了基于对偶四元数的分步求解方法的可行性、鲁棒性及低误差优势.实验结果表明,该方法可将手眼标定精度提升至旋转误差  $0.1994^\circ$  和 平移误差  $1.1126\text{ mm}$ .

**关键词** 手眼标定, 对偶四元数, 奇异性分析, 机器人运动学标定, 几何力学

**中图分类号:**

**文献标志码:**A

## Robot Kinematics Hand-Eye Calibration Based on Dual Quaternion<sup>\*</sup>

Liu Chenglin Wang Xiao Song Hanwen<sup>†</sup>

(School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract** Nowadays, industrial robots are increasingly widely used, and robots that integrate visual systems can efficiently perform a variety of tasks. The core of the hand-eye fusion system is to establish the transformation relationship between the robot and the visual system through hand-eye calibration. Although previous studies have proposed closed solutions and optimization methods for the hand-eye calibration equation through a variety of mathematical tools, this study proposes a two-step solution method based on dual quaternions to address the error transmission and singularity problems in the two-step method. By using the properties of the dual matrix and dual quaternion, the quaternion decoupling principle is transferred to the dual quaternion domain, and the two-step solution based on the dual quaternion is realized. The closed solution and singularity judgment conditions are derived; the translation vector solution equation is reconstructed, and the error transmission path is optimized. Compared with existing methods, including the two-step method based on quaternions and the one-step method based on dual quaternions, this method shows lower errors in both rotation and translation solutions. By designing an Eye-in-hand experiment platform and combining it with a high-precision visual measurement system, the feasibility and robustness of this method are verified, and it has the advantage of low error. Experiment results show that this method can improve the hand-eye calibration accuracy to a rotation error of

2025-03-21 收到第 1 稿,2025-05-03 收到修改稿.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目(12272266, U2441202, 12402003), National Natural Science Foundation of China (12272266, U2441202, 12402003).

<sup>†</sup> 通信作者 E-mail: hwsong@tongji.edu.cn

0.1994° and a translation error of 1.1126 mm.

**Key words** hand-eye calibration, dual quaternion, singularity analysis, robot kinematics calibration, geometric mechanics

## 引言

随着智能化技术的快速发展,以工业机器人为核心的智能系统已广泛应用于智能制造、医疗及服务领域<sup>[1-4]</sup>.尤其是随着视觉系统软硬件的发展和实际应用的需求,需要把作为“手”的机器人和作为“眼”的视觉系统融合应用,其中关键的一步是得到机器人与视觉传感器之间的变换关系,即手眼标定.

1989年 Tsai<sup>[1]</sup>和 Shiu<sup>[5]</sup>提出了手眼标定问题,并给出了经典的  $AX=XB$  型手眼标定方程.随着机器人使用场景的变化,Zhuang<sup>[6]</sup>提出了进一步的  $AX=YB$  型手眼—世界标定方程,即机器人外部标定.

在引入型  $AX=XB$  方程后,Tsai等<sup>[1]</sup>提出基于旋转轴的旋转矩阵表示法,并通过最小二乘法求解,奠定了经典解法基础;Chen<sup>[7]</sup>使用螺旋运动表示旋转矩阵,通过等效的刚体变换求解;Shiu<sup>[5]</sup>给出了旋转矩阵  $R_X$  的特解,再利用特解给出  $R_X$  通解,但特解要求  $R_X$  的旋转角度不为 0°或 90°;Horaud等<sup>[8]</sup>引入了变形后的  $MY=M'YB$  型方程,使用四元数建立误差函数,并且给出了两种方法,分别是先后求解旋转、平移以及同时求解;Danilidis等<sup>[9]</sup>使用了对偶四元数证明了对偶四元数和螺旋运动的等价性,将手眼标定方程转化为线性方程组,并使用奇异值分解同时求出了未知对偶四元数的主部和对偶部;Park等<sup>[10]</sup>利用李群给出了无噪声下的封闭解,以及有噪声时的迭代解.

$AX=YB$  型手眼—世界标定方程不仅可以得到手眼关系,还可以得到世界坐标系和机器人基础坐标系之间的关系.Zhuang<sup>[6]</sup>使用四元数来表示旋转矩阵,将  $AX=YB$  转化为齐次线性方程组,并通过奇异值分解来求解这个齐次线性方程组.Dornaika等<sup>[11]</sup>使用了四元数,利用四元数矩阵的正交性给出了封闭解,还给出了一种非线性的优化解;Shah等<sup>[12]</sup>使用张量积和奇异值分解实现了分步法求解;李爱国等<sup>[13]</sup>提出了基于对偶四元数和张量积的同步方法;Wang等<sup>[14]</sup>给出了基于对偶四元数的封闭解,并分析了误差传递路径.

为了降低噪声干扰,有学者提出了一系列基于

迭代的优化方法.Zhang等<sup>[15]</sup>在使用对偶四元数解耦的基础上,引入两步迭代,做到了高效收敛;Zhao等<sup>[16]</sup>同样使用对偶四元数解耦,但使用了可替代线性规划,避免了局部极小值.随着新型群体优化方法诞生,Zhao等<sup>[17]</sup>在对偶四元数解耦矩阵方程的基础上,使用了超参数优化(HPO)方法将有约束问题转化为无约束问题,实现了手眼标定方程的高效求解;Hua等<sup>[18]</sup>则在对偶四元数基础上使用凸松弛全局优化求解.

但在上述已有方法中,仍然有一些问题没有被很好地解决,包括误差传递路径问题、噪声敏感性问题以及奇异性问题等.传统分步法将旋转与平移分步求解,误差会通过线性方程组传递至平移解,并且传递过程中误差可能被放大,造成误差累积;同步方法避免了误差传递,但得到的线性化方程维度较大,对测量噪声更敏感;一些经典方法<sup>[1,5]</sup>要求旋转角度避开 0°或 90°,此类方法会限制机器人运动范围,否则易触发奇异性问题.而迭代解法可能会受初始值的影响陷入局部最优或不收敛,因此较高精度的封闭解可以为迭代解法提供适合的初值,进一步提高最终的标定精度<sup>[19]</sup>.

本文提出一种基于对偶四元数的分步求解策略,通过扩展四元数解耦原理至对偶四元数,利用对偶四元数和对偶矩阵性质重构平移求解方程,改变了分步方法中的误差传递路径,并分析奇异条件以规避病态解,推导了基于对偶四元数的分步求解方法,实现了高精度求解手眼标定方程的目标,以期后续实验提供理论支持.

第一节描述了手眼—世界标定问题,并对四元数和对偶四元数加以介绍;第二节阐明了如何从已有四元数方法扩展到对偶四元数方法,并给出了详细的数学推导过程;第三节为实验,包括了实验方法及实验结果;最后一节给出结论.

## 1 机器人手眼系统模型及四元数的数学表述

### 1.1 机器人手眼系统模型

在手眼—世界标定问题中,手眼—世界标定方

程可以表示为如下形式：

**AX=YB**

(1)

式中，矩阵 **A** 描述从机器人基座标系到机器人末端工具坐标系的变换，由机器人几何参数和 D-H 模型得到；矩阵 **B** 描述相机坐标系到世界坐标系的变换，由视觉测量系统得到，**A** 和 **B** 为已知量；矩阵 **X** 描述从机器人末端工具坐标系到相机坐标系的变换，矩阵 **Y** 描述从机器人基座标系到世界坐标系的变换，**X** 和 **Y** 为待求未知量。手眼—世界标定方程描述了一个运动学回路，各个矩阵所描述的变换关系如图 1 所示。

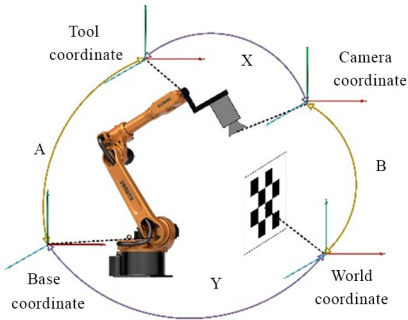


图 1 机器人手眼—世界标定  
Fig. 1 Robot Hand-Eye-World Calibration

1.2 四元数

四元数是一种数学工具，是复数概念的延伸，最早由爱尔兰数学家 Hamilton<sup>[20]</sup> 在 1843 年作为复数的推广提出，其形式如下：

$q = q_0 + \vec{q} = q_0 + q_x i + q_y j + q_z k$

(2)

式中， $\vec{q}$  为一个三维向量， $q_0$ 、 $q_x$ 、 $q_y$ 、 $q_z$  为实数， $i$ 、 $j$ 、 $k$  为笛卡尔空间中三个互相正交的基矢量。

四元数的运算法则如表 1 所示。

表 1 四元数运算  
Table 1 Quaternion operation

| Operation                | Mathematical representation                                             |
|--------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| Addition and subtraction | $q_1 \pm q_2 = (q_{01} \pm q_{02}) + (\vec{q}_1 \pm \vec{q}_2)$         |
| Conjugation              | $q^* = q_0 - \vec{q}$                                                   |
| Norm                     | $\ q\  = \sqrt{q_0^2 + \ \vec{q}\ ^2}$                                  |
| Inverse                  | $q^{-1} = q^* / \ q\ $<br>$q_1 \circ q_2 = Q_L(q_1)q_2 = Q_R(q_2)q_1$   |
| Multiplication           | (The symbol "o" is used to represent the multiplication of quaternions) |

其中， $Q_L(q_1)$  是四元数  $q_1$  的左乘矩阵， $Q_R(q_2)$  是四元数  $q_2$  的右乘矩阵，它们分别由两个四元数的元素构成，可以写为：

$$Q_L(q_1) = \begin{bmatrix} q_{01} & -q_{x1} & -q_{y1} & -q_{z1} \\ q_{x1} & q_{01} & -q_{z1} & q_{y1} \\ q_{y1} & q_{z1} & q_{01} & -q_{x1} \\ q_{z1} & -q_{y1} & q_{x1} & q_{01} \end{bmatrix}$$

和

$$Q_R(q_2) = \begin{bmatrix} q_{02} & -q_{x2} & -q_{y2} & -q_{z2} \\ q_{x2} & q_{02} & q_{z2} & -q_{y2} \\ q_{y2} & -q_{z2} & q_{02} & q_{x2} \\ q_{z2} & q_{y2} & -q_{x2} & q_{02} \end{bmatrix}$$

可以证明，四元数的左乘矩阵和右乘矩阵满足正交性，是一个单位正交矩阵。

特别地，如果某四元数模长为 1，即  $\|q\| = 1$ ，则该四元数为单位四元数；若某四元数的实数部分为 0，即  $q_0 = 0$ ，则该四元数为纯四元数。对于单位四元数  $q$ ，有如下性质：

$qq^{-1} = q^{-1}q = 1$

(3)

一个单位四元数可以表示空间中的任意定轴旋转，该单位四元数可以和旋转矩阵等价变换。要得出与旋转矩阵对应的单位四元数，需先将旋转矩阵转换为旋转角度和旋转轴：

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right)$$

(4)

$$n = \frac{1}{2\sin\theta} \begin{Bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{Bmatrix}$$

(5)

进一步地，Shoemake<sup>[21]</sup> 给出了单位四元数与旋转轴角的关系：

$q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} n$

(6)

此时，可以用一个单位四元数描述任意一个旋转矩阵。注意到，函数  $y = \cos^{-1}(x)$  在定义域内会对应两个函数值，即  $\theta$  和  $2\pi - \theta$ 。物理意义是，绕旋转轴逆时针旋转  $\theta$  的效果等同于顺时针旋转  $2\pi - \theta$ 。此时，由于  $\sin(2\pi - \theta) = -\sin(\theta)$ ，此时在计算  $q$  时，会得到两个值与之对应。这表明，对于一个旋转矩阵 **R**，存在两个单位四元数： $q_1$  和  $q_2$ ，与之对应，这种现象称为四元数对旋转矩阵的双覆盖。

1.3 对偶四元数

1871 年，Clifford<sup>[22]</sup> 提出了对偶数的概念，包括了对偶数、对偶复数和对偶四元数。对偶四元数 (dual quaternion) 是一种结合四元数和对偶数理

论的数学工具,相比于四元数,对偶四元数同时体现出了对偶数和四元数的特性;四元数仅可描述齐次矩阵中的旋转矩阵,对偶四元数则还可用于对偶部描述平移向量.对偶四元数  $\hat{q}$  形式为:

$$\hat{q} = q + \epsilon q' \tag{7}$$

式中,使用“ $\sim$ ”符号表示该四元数为对偶四元数, $q$  为主部, $q'$  为对偶部,两部均为四元数; $\epsilon$  表示与实数域垂直的维度,且满足  $\epsilon \neq 0, \epsilon^2 = \epsilon^3 = \dots = 0$ .

对偶四元数的运算法则如表 2 所示.

表 2 对偶四元数运算  
Table 2 Dual quaternion operation

| Operation                | Mathematical representation                                                                                                                                                           |
|--------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Addition and subtraction | $\hat{q}_1 \pm \hat{q}_2 = (q_1 \pm q_2) + \epsilon(q'_1 \pm q'_2)$                                                                                                                   |
| Conjugation              | $\hat{q}^* = q^* + \epsilon q'^*$                                                                                                                                                     |
| Norm                     | $\ \hat{q}\  = \sqrt{q^* \cdot q}$                                                                                                                                                    |
| Inverse                  | $\hat{q}^{-1} = \hat{q}^* / \ \hat{q}\ ^2$                                                                                                                                            |
| Multiplication           | $\hat{q}_1 \circ \hat{q}_2 = (q_1 + \epsilon q'_1) \circ (q_2 + \epsilon q'_2)$<br>$= q_1 \circ q_2 + \epsilon(q'_1 \circ q_2 + q_1 \circ q'_2)$<br>or represented by the dual matrix |
|                          | $\hat{q}_1 \circ \hat{q}_2 = \underline{Q}_L(q_1) \hat{q}_2 = \underline{Q}_R(q_2) \hat{q}_1$                                                                                         |

与四元数的左乘和右乘矩阵类似,可以证明对偶四元数的左乘和右乘矩阵也为一单位正交对偶矩阵,仍然具有类似的正交性.

若有一齐次矩阵,可以先提取其旋转矩阵计算对偶四元数的主部  $q$ ,Daniilidis<sup>[9]</sup> 给出了计算对偶部的公式:

$$q' = \frac{1}{2}(t \circ q) \tag{8}$$

式中,  $t = 0 + t_x i + t_y j + t_z k$ ,是用齐次矩阵中平移向量构造的四元数.根据计算公式,若对偶部  $q' = 0$ ,表示纯旋转;若主部  $q = 0$  表示纯平移.因此,一个对偶四元数等价于一个齐次变换矩阵,对偶四元数的主部等价于齐次矩阵的旋转矩阵,而平移向量可以由对偶四元数的对偶部得到.

对偶四元数的主部  $q$  和对偶部  $q'$  满足正交性,即  $q^T q' = 0$ .

2 基于对偶四元数的分步求解法

引言中对当前已有的手眼标定方法进行了总结,注意到已经有学者提出了基于四元数和对偶四元数的求解方法.本文提出的基于对偶四元数法的分步求解法,利用了类似的思路得到了最后的可以求解的线性方程组,并对奇异性做出类似的讨论,

两种方法的对照关系如图 2 所示.

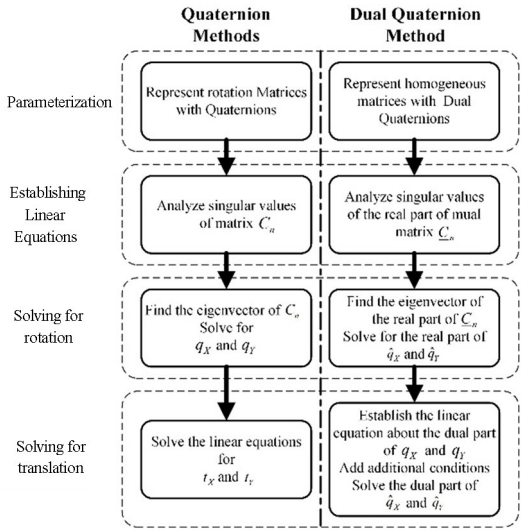


图 2 两种方法的对照关系  
Fig. 2 Comparison of the two methods

2.1 对当前已有方法的讨论

Dornaika 利用单位四元数将手眼一世界标定方程参数化,再利用左乘和右乘矩阵的正交性给出了一种基于单位四元数求解手眼一世界标定方程的分步求解方法<sup>[11]</sup>.对于手眼一世界标定方程

$$A_i X = Y B_i \tag{9}$$

齐次矩阵包含了旋转矩阵和平移向量,将旋转和平移解耦为旋转方程和平移方程得到:

$$\begin{cases} R_{A_i} R_X = R_Y R_{B_i} \\ R_{A_i} t_X + t_{A_i} = R_Y t_{B_i} + t_Y \end{cases} \tag{10}$$

用单位四元数表示旋转方程为:

$$Q_L(q_{A_i}) q_X = Q_R(q_{B_i}) q_Y \tag{11}$$

其中矩阵  $Q_R(q_{B_i})$  是单位正交矩阵,所以:

$$[Q_R(q_{B_i})]^T Q_L(q_{A_i}) q_X = \underbrace{[Q_R(q_{B_i})]^T Q_R(q_{B_i})}_{I_{4 \times 4}} q_Y \tag{12}$$

有  $n$  个位姿时,上述方程构造为如下形式:

$$\underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^n [Q_R(q_{B_i})]^T Q_L(q_{A_i}) \right\}}_{C_n} q_X = n q_Y \tag{13}$$

式(13)可写为:

$$C_n q_X = \lambda q_Y \tag{14}$$

式中  $\lambda = n$ ,物理意义是参与计算的总位姿数.同理,有

$$C_n^T q_Y = \lambda q_X \tag{15}$$

联立式(14)和式(15),可得

$$\begin{cases} C_n^T C_n q_X = \lambda^2 q_X \\ C_n C_n^T q_Y = \lambda^2 q_Y \end{cases} \tag{16}$$



此时,矩阵  $C_n^T C_n$  有一个特征值为  $\lambda^2$ , 对应一个特征向量  $q_X$ ; 矩阵  $C_n C_n^T$  有一个特征值为  $\lambda^2$ , 对应一个特征向量  $q_Y$ . 进一步地, 矩阵  $C_n$  有一个奇异值为  $\lambda$ . 此时由于  $C_n$  已知, 故可以求解出  $q_X$  和  $q_Y$ , 并进一步得到旋转矩阵  $R_X$  和  $R_Y$ .

当旋转矩阵已知  $R_X$  和  $R_Y$  时, 式(10)下式退化为一个关于  $t_X$  和  $t_Y$  的线性方程组, 可以用最小二乘法求出平移向量  $t_X$  和  $t_Y$ .

## 2.2 基于对偶四元数的分步求解法

Dornaika 提出的基于四元数性质的框架利用了四元数的性质, 即可以将旋转矩阵参数化, 又能利用正交性建立封闭解. 本文进一步拓展了这个封闭解框架, 基于对偶四元数的相似性质, 即对偶四元数可以将齐次矩阵参数化, 又能利用正交性获得类似的封闭解.

对于原始待求解的手眼—世界标定方程, 如果有组位姿, 可以写为:

$$A_i X = Y B_i \quad (17)$$

将矩阵转化为对偶四元数表示:

$$\hat{q}_{A_i} \circ \hat{q}_X = \hat{q}_{Y_i} \circ \hat{q}_B \quad (18)$$

$$\underline{Q}_L(\hat{q}_{A_i}) \hat{q}_X = \underline{Q}_R(\hat{q}_{B_i}) \hat{q}_Y \quad (19)$$

这里使用“ $\underline{M}$ ”符号表示矩阵  $M$  为对偶矩阵. 矩阵  $\underline{Q}_R(\hat{q}_{B_i})$  是单位正交对偶矩阵, 所以参考式(12)的变换, 将四元数左乘及右乘矩阵的正交性质推广到对偶四元数, 得到

$$[\underline{Q}_R(\hat{q}_{B_i})]^T \underline{Q}_L(\hat{q}_{A_i}) \hat{q}_X = \underbrace{[\underline{Q}_R(\hat{q}_{B_i})]^T \underline{Q}_R(\hat{q}_{B_i})}_{I_{8 \times 8}} \hat{q}_Y \quad (20)$$

即

$$[\underline{Q}_R(\hat{q}_{B_i})]^T \underline{Q}_L(\hat{q}_{A_i}) \hat{q}_X = I_{8 \times 8} \hat{q}_Y \quad (21)$$

将  $n$  个上述方程构造为如下形式:

$$\underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^n [\underline{Q}_R(\hat{q}_{B_i})]^T \underline{Q}_L(\hat{q}_{A_i}) \right\}}_{C_n} \hat{q}_X = n \hat{q}_Y \quad (22)$$

记,  $C_n = \sum_{i=1}^n [\underline{Q}_R(\hat{q}_{B_i})]^T \underline{Q}_L(\hat{q}_{A_i})$ , 而  $C_n = C_n + \epsilon C'_n$ , 则式(22)可以写为:

$$C_n \hat{q}_X = \lambda \hat{q}_Y \quad (23)$$

式中  $\lambda = n$ , 物理意义仍是参与计算的总位姿数. 将矩阵  $C_n$  的主部和对其主部进行判断, 方法与  $C_n$  一致.

为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} C_n & \mathbf{0}_{4 \times 4} \\ C'_n & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_X & \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ q'_X & q_X \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} q_Y & \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ q'_Y & q_Y \end{bmatrix} \quad (24)$$

展开得:

$$\begin{cases} C_n q_X = n q_Y \\ C'_n q_X + C_n q'_X = n q'_Y \end{cases} \quad (25)$$

式中

$$C'_n = \sum_{i=1}^n [\underline{Q}_R^T(\hat{q}'_{B_i}) \underline{Q}_L^T(\hat{q}_{A_i}) + \underline{Q}_R^T(\hat{q}_{B_i}) \underline{Q}_L^T(\hat{q}'_{A_i})]$$

对于分步求解法而言, 需要先利用式(25)的上式求解旋转部分, 注意到此时方程形式与式(14)一致, 故可以使用类似的方法解出旋转矩阵  $R_X$  和  $R_Y$ .

## 2.3 奇异性分析

由式(4)可得, 由于四元数对旋转矩阵的双覆盖, 因此在利用累加计算得到矩阵  $C_n$  时, 会出现一种非理想情况, 即累加前后旋转矩阵描述的旋转方向不一致, 这会造成矩阵的病态, 无法得到正确的  $C_n$ . 因此, 在每次进行加法计算时, 需进行判断, 以避免病态情况的发生.

根据式(15),  $C_n$  存在一个奇异值为  $\lambda$ , 且  $q_X$  和  $q_Y$  为矩阵  $C_n$  的左右奇异值向量; 当计算  $C_{n+1}$  时, 由于双覆盖的存在,  $C_{n+1}$  的奇异值可能为  $\lambda + 1$  或  $\lambda - 1$ , 此时就需要对  $C_{n+1}$  的奇异值进行判断, 选择奇异值是  $\lambda + 1$  的  $C_{n+1}$ , 并依此类推. 对于对偶矩阵  $C_n$ , 由于其奇异值为对偶数, 故仅对其主部进行判断, 方法与  $C_n$  一致.

## 2.4 求解平移向量

求解平移向量实际上就是求解未知对偶四元数的对偶部, 式(8)表明如果已知主部和对偶部, 就可以求得平移向量.

根据得到  $C_n \hat{q}_X = \lambda \hat{q}_Y$  的路径, 可以得到另一式  $C_n^T \hat{q}_Y = \lambda \hat{q}_X$ , 并将这两式联立得:

$$\begin{cases} C_n C_n^T \hat{q}_Y = \lambda^2 \hat{q}_Y \\ C_n^T C_n \hat{q}_X = \lambda^2 \hat{q}_X \end{cases} \quad (26)$$

改写为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} C_n C_n^T & \mathbf{0}_{4 \times 4} \\ C_n^T C_n & C_n C_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_Y & \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ q'_Y & q_Y \end{bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} q_Y & \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ q'_Y & q_Y \end{bmatrix} \quad (27)$$

展开得:

$$\begin{cases} \mathbf{C}_n \mathbf{C}_n^T \mathbf{q}_Y = \lambda^2 \mathbf{q}_Y \\ \mathbf{C}'_n \mathbf{C}'_n{}^T \mathbf{q}_Y + \mathbf{C}_n \mathbf{C}_n^T \mathbf{q}'_Y = \lambda^2 \mathbf{q}'_Y \end{cases} \quad (28)$$

由式(28)上式得:

$$(\mathbf{C}_n \mathbf{C}_n^T - \lambda^2 \mathbf{I}_{4 \times 4}) \mathbf{q}_Y = \mathbf{0}_{4 \times 1} \quad (29)$$

因为  $\mathbf{q}_Y$  不为零,所以当且仅当  $\mathbf{C}_n \mathbf{C}_n^T - \lambda^2 \mathbf{I}_{4 \times 4}$  矩阵行不满秩时式(29)才成立,故此处  $\mathbf{C}_n \mathbf{C}_n^T - n^2 \mathbf{I}_{4 \times 4}$  矩阵行不满秩. 所以对于式(28)下式,有

$$(\mathbf{C}_n \mathbf{C}_n^T - n^2 \mathbf{I}_{4 \times 4}) \mathbf{q}'_Y = -\mathbf{C}'_n \mathbf{C}'_n{}^T \mathbf{q}_Y \quad (30)$$

该方程没有唯一解. 要想得到唯一解,需要加入补充约束条件,即对偶四元数主部和主部相互正交,  $\mathbf{q}_Y^T \mathbf{q}'_Y = 0$ . 此时式(30)补充为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_n \mathbf{C}_n^T - n^2 \mathbf{I}_{4 \times 4} \\ \mathbf{q}_Y^T \end{bmatrix} \mathbf{q}'_Y = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}'_n \mathbf{C}'_n{}^T \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} \end{bmatrix} \mathbf{q}_Y \quad (31)$$

该方程有唯一  $\mathbf{q}'_Y$ , 进而可以求得齐次矩阵  $Y$  的平移向量  $t_Y$ . 求解  $t_X$  的方法与之相同.

补充条件的物理意义是,因为单位对偶四元数可以表示空间中任意运动,该运动有 6 个自由度,而对偶四元数有 8 个分量,需要补充 2 个约束条件才能得到唯一一对单位对偶四元数以描述该任意运动. 在用单位四元数表示空间旋转时,已经使用单位四元数的单位性作为补充条件,所以此处需要补充对偶四元数的正交性作为第 2 个补充条件.

3 实验与结果

3.1 实验方案

本文提出了一种基于对偶四元数的分步求解手眼—世界标定方程方法,并通过构造特有的平移向量求解方程,尽管旋转矩阵的求解方程来自已有的方法,因此有必要对比该方法与现有方法<sup>[11]</sup>. 同时,选择没有传递误差的、基于对偶四元数的同步法<sup>[23]</sup>作为对比. 实验共涉及三种方法,所得解均为封闭解,参考表 3.

表 3 方法对比  
Table 3 Comparison of methods

| Method/Name                         | Abbreviation |
|-------------------------------------|--------------|
| Dual quaternion<br>Two-steps method | DQ           |
| Quaternion<br>Two-steps method      | Qua          |
| Dual quaternion<br>One-steps method | DQ_st        |

实验采用了 Eye-in-hand 方式基准实验方案,将相机固定于机器人末端. 实验采用 GSK RB03 六自由度工业机器人(DH 参数见表 4),搭载 Photonfocus-MV1-D2048 相机及 Computar 8 mm 广角镜头,光源为双 150W LED 阵列(实验环境见图 3). 相机标定通过 MATLAB 相机标定工具箱<sup>[24]</sup>和 Zhang 标定方法<sup>[25]</sup>完成. 实验共有两组,均采用单元格为 15 mm 的棋盘格标定板进行,但每组的相机采样分辨率和使用的棋盘格不相同,相机标定后重投影误差不超过 0.1 像素. 如表 5 所示.

表 4 机器人 DH 参数  
Table 4 Robot DH parameters

| Joint number | $\alpha_{i-1}/(^{\circ})$ | $a_{i-1}/\text{mm}$ | $d_i/\text{mm}$ |
|--------------|---------------------------|---------------------|-----------------|
| 1            | 0                         | 0                   | 0               |
| 2            | -90                       | 155                 | 0               |
| 3            | 0                         | 360                 | 0               |
| 4            | -90                       | 100                 | 365             |
| 5            | 90                        | 0                   | 0               |
| 6            | -90                       | 0                   | 116             |

表 5 实验组采样分辨率、棋盘格设置和相机标定结果  
Table 5 Sampling resolution and checkerboard settings of the experiment groups

| Experiment group | Sampling resolution/pixel | Check board | Reprojection error/pixel |
|------------------|---------------------------|-------------|--------------------------|
| 1                | 1800×960                  | 7×15        | 0.09                     |
| 2                | 1080×960                  | 7×10        | 0.10                     |

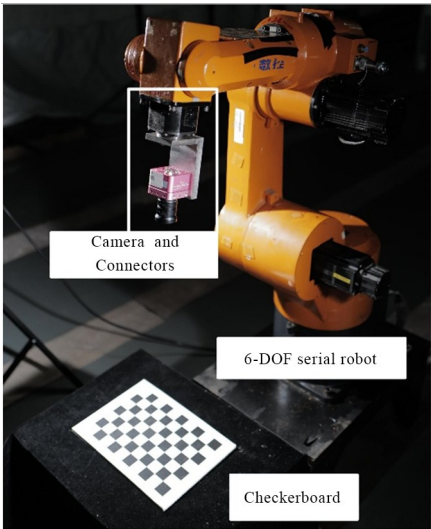


图 3 实验环境  
Fig. 3 Experiment environment

3.2 实验过程

每个实验组都包含 1 个计算组和验证组,分别包含 40 个和 100 个位姿.实验流程如下:

(1)计算组数据采集.控制机器人在 40 个随机位姿下停留,在每个位姿处做 3 s 的停留让视觉系统完成测量,通过 Zhang 标定法获取相机外参矩阵  $B_C$ ;从示教器中读取机器人各个关节角,基于 D-H 模型<sup>[19]</sup>计算机器人末端位姿矩阵  $A_C$ .

(2)解算验证.将矩阵  $A_C$  和  $B_C$  代入对偶四元数分步方法(DQ)、四元数分步法(Qua)及对偶四元数同步法(DQ\_st),分别求解计算组的手眼变换矩阵  $X$  和世界变换矩阵  $Y$ .

(3)验证组数据采集.控制机器人在 100 个随机位姿下停留,重复步骤 1,得到验证组的  $A_V$  和  $B_V$ .

(4)误差评估.采用 100 组验证位姿数据,以旋转误差与平移误差的均方根(RMS)作为精度指标,以比较每个实验组中计算组结果和验证组结果的近似程度.理想情况下,对于每个位姿,均应满足:

$$A_V = YB_VX^{-1}$$

(32)

由于误差和测量噪声的存在,上式显然不可能成立,因此定义存在实验误差的  $\tilde{A}_V$ :

$$\tilde{A}_V = YB_VX^{-1}$$

(33)

定义误差  $\tilde{E}$  为:

$$\tilde{E} = \tilde{A}_V\tilde{A}^{-1}V$$

(34)

矩阵  $\tilde{E}$  为齐次矩阵,从中提取旋转矩阵  $\tilde{R}$  和平移向量  $\tilde{t}$ ,并进一步得到旋转矩阵对应的  $\tilde{\theta}$ ,将  $\tilde{\theta}$  和  $\tilde{t}$  作为每个验证位姿下的误差.对于有 100 个位姿的验证组数据,计算  $\tilde{\theta}$  和  $\tilde{t}$  的均方根(RMS),为每组实验的误差,以此作为精度评估的依据:

$$\begin{cases} E_{\text{RMS}}(\theta) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tilde{\theta})^2} \\ E_{\text{RMS}}(t) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(t - \tilde{t})^2]} \end{cases}$$

(35)

式中  $n=100$ ,通过对比  $E_{\text{RMS}}(\theta)$  和  $E_{\text{RMS}}(t)$  来定量描述每组实验中使用不同求解方法所得结果的精度,其值越低,则表明该方法效果更好.整个实验流程如图 4 所示.

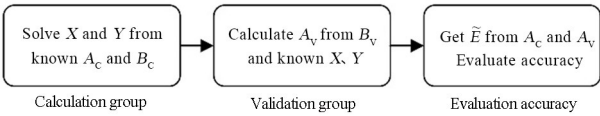


图 4 实验流程图  
Fig. 4 Flow chart of experiment

3.3 实验结果

实验结果如表 6 和表 7 所示,分别展示了求解旋转时的  $E_{\text{RMS}}(\theta)$  和求解平移时的  $E_{\text{RMS}}(t)$ ,以此评估不同方法的精度.加粗数据为本组实验内最优数据.

表 6 旋转误差  
Table 6-1 Rotation error

| Experiment group | DQ             | Qua            | DQ_st   |
|------------------|----------------|----------------|---------|
| 1                | <b>0.1994°</b> | <b>0.1994°</b> | 0.2177° |
| 2                | <b>0.3401°</b> | <b>0.3401°</b> | 0.3796° |

表 7 平移误差  
Table 7 Translation error

| Experiment group | DQ               | Qua              | DQ_st     |
|------------------|------------------|------------------|-----------|
| 1                | <b>1.1126 mm</b> | 1.2660 mm        | 1.2242 mm |
| 2                | 2.1301 mm        | <b>2.1077 mm</b> | 2.4067 mm |

旋转求解精度对比:对偶四元数分步方法(DQ)在实验组 1 与实验组 2 中分别取得 0.1994° 与 0.3401° 的旋转误差,均优于对偶四元数同步法(DQ\_st)的 0.2177° 与 0.3796°,表明分步法通过降低线性方程组维数,求解旋转时噪声敏感度更低,有效降低了旋转求解误差,如图 5 所示.同时注意到,由于 DQ 法和 Qua 法具有相同的旋转求解方程,因此旋转求解精度完全相同.

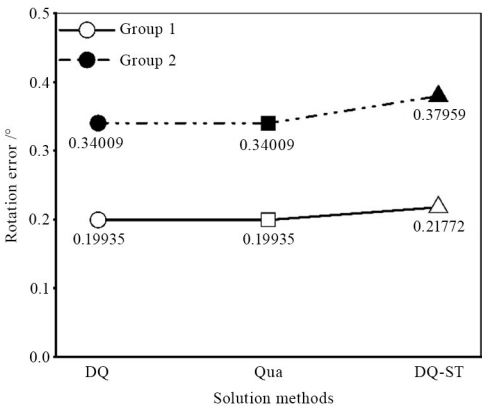


图 5 旋转误差对比  
Fig. 5 Rotation error comparison

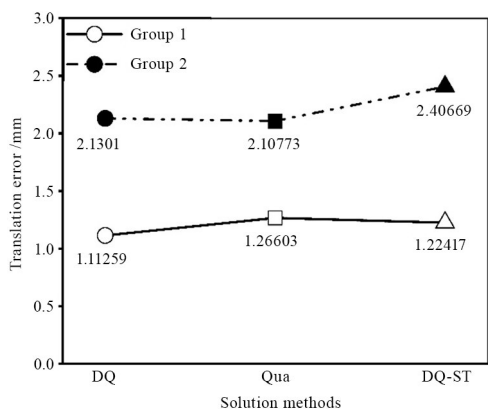


图6 平移误差对比

Fig. 6 Translation error comparison

平移求解精度对比:在实验组1中,DQ方法的求解误差比 Qua 方法低约 12.12%;实验组2中 DQ 方法的求解误差仅比 Qua 法高约 1.06%。综合以上实验结果,证明平移方程重构策略改变了误差传递路径,提升了平移求解鲁棒性,且 DQ 和 Qua 两种方法的噪声敏感性存在差异,在不同实验组不同的测量噪声影响下求解精度对比呈现一定的差异。

注意到,尽管同步求解方法不会引入传递误差,但是同步方法本身的求解精度较低,不及另外两种分步方法;基于对偶四元数的分步求解法在求解旋转时理论上具有和基于四元数的分步求解法相同的结果,实验中证明了这一点;而在求解平移时,实验表明,不同方法的精度差异源于误差传递路径的不同和对不同的测量噪声有着不同的噪声敏感性:基于对偶四元数的方法通过修正平移求解方程,有效抑制了传递误差的累积,一定程度上提高了手眼标定精度。

## 4 结论

手眼标定是机器人在研究和应用中涉及的基础问题,核心是求解手眼标定方程。本文提出了一种基于对偶四元数的求解方法,通过将四元数解耦框架扩展至对偶四元数域,并结合对偶矩阵正交性重构平移向量求解方程。该方法给出了封闭解及奇异性判定条件,并通过重构平移求解方程优化了误差传递路径。实验表明,相较于基于四元数的分步法及对偶四元数同步法,基于对偶四元数的分步求解法显著降低了标定误差,旋转与平移精度分别达到  $0.1994^\circ$  和  $1.1126\text{ mm}$ ,验证了方法的有效性。通过 Eye-in-hand 实验平台验证了方法的鲁棒性,

为工业机器人、医疗导航等复杂场景下的高精度手眼标定提供了理论支持与实用工具。

## 参考文献

- [1] TSAI R Y, LENZ R K. A new technique for fully autonomous and efficient 3D robotics hand/eye calibration [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1989, 5(3): 345–358.
- [2] 柯恺宸,金士博,高博扬,等. 基于强化学习的机器人多接触交互任务控制[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(12): 53–69.
- [3] 闵熔祺,张舒. 多移动机械臂系统动力学建模以及稳定性分析[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(12): 107–113.
- [4] 蔡国平,刘晓峰,刘元卿. 空间机器人捕获动力学与控制[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(12): 22–36.
- [5] SHIU Y C, AHMAD S. Calibration of wrist-mounted robotic sensors by solving homogeneous transform equations of the form  $AX = XB$  [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1989, 5(1): 16–29.
- [6] ZHUANG H Q, ROTH Z S, SUDHAKAR R. Simultaneous robot/world and tool/flange calibration by solving homogeneous transformation equations of the form  $AX = YB$  [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1994, 10(4): 549–554.
- [7] CHEN H H. A screw motion approach to uniqueness analysis of head-eye geometry[C]//Proceedings of 1991 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. New York: IEEE, 2002: 145–151.
- [8] HORAUD R, DORNAIKA F. Hand-eye calibration



- [J]. The International Journal of Robotics Research, 1995, 14(3): 195–210.
- [9] DANIILIDIS K, BAYRO-CORROCHANO E. The dual quaternion approach to hand-eye calibration [C]//Proceedings of 13th International Conference on Pattern Recognition. New York: IEEE, 2002: 318–322.
- [10] PARK F C, MARTIN B J. Robot sensor calibration: solving  $AX=XB$  on the Euclidean group [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1994, 10(5): 717–721.
- [11] DORNAIKA F, HORAUD R. Simultaneous robot-world and hand-eye calibration [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1998, 14(4): 617–622.
- [12] SHAH M. Solving the robot-world/hand-eye calibration problem using the kronecker product [J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2013, 5(3): 031007.
- [13] 李爱国, 胡英, 马孜. 标定方程  $AX=ZB$  的两种新解法[J]. 系统仿真学报, 2008, 20(14): 3670–3674.
- LI A G, HU Y, MA Z. Two solutions for calibration equation  $AX=ZB$  [J]. Journal of System Simulation, 2008, 20(14): 3670–3674. (in Chinese)
- [14] WANG X, HUANG J S, SONG H W. Robot-world and hand-eye calibration based on quaternion: a new method and an extension of classic methods, with their comparisons [J]. Mechanism and Machine Theory, 2023, 179: 105127.
- [15] ZHANG Z Q, ZHANG L, YANG G Z. A computationally efficient method for hand-eye calibration [J]. International Journal of Computer Assisted Radiology and Surgery, 2017, 12(10): 1775–1787.
- [16] ZHAO Z J. Simultaneous robot-world and hand-eye calibration by the alternative linear programming [J]. Pattern Recognition Letters, 2019, 127: 174–180.
- [17] ZHAO Y T, LI W, LI W G. Dual quaternion hand-eye calibration algorithm for hunter-prey optimization based on twice opposition-learning and random differential variation [J]. Applied Soft Computing, 2024, 154: 111249.
- [18] HUA J, SU Y H, XIN D X, et al. A high-precision hand-eye coordination localization method under convex relaxation optimization [J]. Sensors, 2024, 24(12): 3830.
- [19] Wodtko T, Horn M, Buchholz M, et al. Globally optimal multi-scale monocular hand-eye calibration using dual quaternions [C]//2021 International Conference on 3D Vision (3DV). New York: IEEE, 2021: 249–257
- [20] HAMILTON W R. II. On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra [J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1844, 25(163): 10–13.
- [21] SHOEMAKE K. Animating rotation with quaternion curves [C]//Proceedings of the 12th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Technique. New York, : ACM, 1985: 245–254.
- [22] CLIFFORD. Preliminary sketch of biquaternions [J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1871, 1(1): 381–395.
- [23] WANG X, SONG H W. One-step solving the robot-world and hand-eye calibration based on the principle of transference [J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2025, 17(3): 031014.
- [24] BOUGUET J Y. Camera calibration toolbox for MATLAB [EB/OL]. (2014-05-30)[2025-03-21]. [http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib\\_doc/](http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/).
- [25] ZHANG Z. A flexible new technique for camera calibration [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(11): 1330–1334.