

准零刚度隔振技术的曲拱—直梁实现

石匡武 徐正昊 王永[†] 黄志龙

(浙江大学 工程力学系, 杭州 310027)

摘要 既有的多数准零刚度隔振体系形式复杂,成本较高. 针对上述问题,本文以曲拱提供拟线性负刚度,以直梁提供拟线性正刚度,二者匹配得到形式简洁、成本低廉的准零刚度隔振体系. 从理论上,由能量方法导出曲拱、直梁和组合体系的刚度设计解析公式;从实验上,由静态测试得出其载荷—位移关系,并证实解析公式的有效性,由动态实验证实其良好的隔振性能以及一定的负载适应性.

关键词 振动隔离, 准零刚度, 曲拱, 直梁, 能量方法

中图分类号:TB535.1

文献标志码:A

Quasi-Zero Stiffness Vibration Isolation: An Implementation by Curved Arch and Straight Beam

Shi Kuangwu Xu Zhenghao Wang Yong[†] Huang Zhilong

(Department of Engineering Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract Most of the existing quasi-zero-stiffness vibration isolators are of complex configuration and high cost. Aiming to these drawbacks, this work adopts a curved arch to providing quasi-linear negative stiffness and a straight beam to providing quasi-linear positive stiffness; matching and combining the curved arch and straight beam constitute a quasi-zero-stiffness vibration isolator with concise configuration and cheap cost. In theory, by the energy method we derive the analytical formulas for designing the stiffness of curved arch, straight beam and the combined system. In experiments, we obtain the force-displacement relation from static testing which verifies the efficacy of the analytical formulas, and the good isolation performance and some load adaptability from dynamic testing.

Key words vibration isolation, quasi-zero-stiffness, curved arch, straight beam, energy method

引言

振动无处不在. 振动常会造成不利影响,甚至引发灾难性后果,因此,对减振技术的研究由来已久. 减振技术大致可分为抑制振源、隔振及消振三种方式^[1],依据是否需要外界能量输入作为准则,可分为主动减振与被动减振. 相较而言,“被动隔

振”技术成本低廉、设计简单,被工业界广泛采用^[2].

所谓被动隔振,即在振源体(外界环境)和减振体(减振目标)之间插入一个附加装置,把二者物理隔离开来,削弱二者之间的联系,缓和二者之间的能量传递. 最经典、最简单的被动隔振技术采用了“线弹簧”,在振源体与减振体之间插入一根或多根

线弹簧. 当环境振动频率大于 $\sqrt{2k/m}$ (k 为等效弹簧刚度, m 为减振体质量) 时, 弹簧起到隔振效果. 线弹簧隔振技术中存在着承载能力—隔振性能悖论: 隔振频宽增大, 承载能力下降; 承载能力上升, 隔振频宽减小.

为解决上述悖论, “高静低动”隔振方案应运而生^[3]——由高静刚度提供承载能力, 低动刚度保证隔振频宽. 相关实现技术统称为准零刚度隔振技术, 常通过正刚度元件和负刚度元件并联实现. 准零刚度隔振技术实现方式众多. Molyneux^[4]采用三根线弹簧来实现, 两根斜向弹簧构成负刚度元件, 单根竖弹簧构成正刚度元件, 并联形成准零刚度体系. Carrela 等^[5,6]就三弹簧体系进行了结构参数优化. 进一步地, Xu^[7]和 Zhao^[8]等设计了多弹簧体系. 针对斜弹簧受压失稳问题, Liu 等^[9,10]利用两根屈曲压杆替代斜弹簧, 构成负刚度元件, 得到了屈曲压杆—弹簧体系. Huang 等^[11]将其拓展为四根屈曲压杆, 得到了另一种变体. 此外, 还有凸轮—滑道体系^[12-14], Kresling 折纸启发^[15-17]的折纸体系, 以及利用磁铁同极相斥、异极相吸原理构造负刚度元件的永磁体系^[18]. Wu 等^[19]从能量操控角度出发, 成功设计并实现了绝对零刚度隔振体系. 上述体系均表现出良好的低频隔振性能, 但是, 它们都是由多个元件连接而成的, 这就不可避免地引入摩擦和间隙, 从而导致性能下降、可靠性降低. 于是, 人们从机构设计转向柔性机制, 旨在避免铰链等连接, 实现隔振体系的一体化设计和成型. Zhang 等^[20]通过对曲梁截面的优化设计形成准零刚度胞元, 进而构成隔振超材料. Li 等^[21]以给定力—位移曲线为目标函数, 通过拓扑优化得出材料分布, 并用 PDMS 制备了准零刚度胞元和隔振超材料. Cai 等^[22]采用折叠梁(正刚度)和曲梁(负刚度)并联构建了一种新型的准零刚度超材料, 用于获取极低频带隙, 并将一维准零刚度超材料建模为块状弹簧链, 并通过谐波平衡法进行理论求解, 揭示了其带隙特性. Zhou 等^[23]采用了凸轮—滚子—弹簧机构的模型, 研究了激振力和系统阻尼对力传递率的影响, 并验证了其隔振性能. Zhou 等^[24]设计了一种用于超低频波衰减的一维可调准零刚度超材料, 并进行了设计优化. 结果表明通过调节预压缩超材料可以实现准零刚度和超低频带隙.

机构型隔振体系元件众多, 柔性化隔振体系构

型复杂, 这就使得二者并不能真正发挥出理论上的优异性能. 据此, 我们有动机寻求全新的隔振体系设计, 要求该体系元件很少, 构型简洁. 这同时带来了高性能和低成本的优势, 对于工业化应用是极为有利的. 本文提出、设计并制备了曲拱—直梁型准零刚度隔振体系——设计曲梁, 用作负刚度元件; 设计直梁, 用作正刚度元件; 二者刚度匹配, 并联形成隔振体系. 本文第一节简述曲拱—直梁体系的几何构型; 第二节分别针对曲拱、直梁和组合体系进行理论分析, 给出刚度设计的解析公式; 第三节选择材料和几何尺寸, 制备体系, 并进行了详尽的静态和动态实验, 证实曲拱—直梁体系良好的隔振性能和一定的负载适应性; 第四节给出总结和讨论.

1 体系构想

曲拱—直梁隔振体系的构想如图 1 所示. 由两个极为简洁的构件(两端固定约束的曲拱和两端可动铰支的直梁)并联而成, 二者均工作于中点竖向载荷作用下. 两端固支曲拱在竖向载荷作用下, 首先表现出正刚度行为, 之后转变为负刚度行为; 两端可动直梁则始终表现为正刚度行为. 恰当选择材质和尺寸, 就能使得二者尺寸接近且刚度匹配, 从而使得并联体系表现出良好的准零刚度行为. 二者在跨中位置刚性连接, 从而避免了曲拱的侧向失稳问题. 这里的构想图可通过构件组合而成, 亦可通过 3D 打印技术直接成型. 下文首先给出对曲拱和直梁的理论分析, 得出解析设计公式, 并据此选择材质和几何, 确定隔振体系.

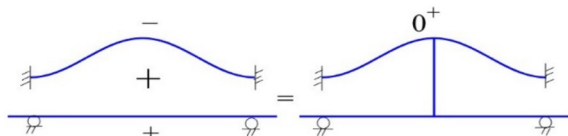


图 1 准零刚度隔振体系构想: 曲拱+直梁
Fig. 1 Quasi-zero-stiffness vibration isolation system: curved arch+straight beam

2 理论分析

本节着力于曲拱和直梁静力学行为的理论分析, 旨在给出刚度设计的解析公式. 这里强调, 当前研究涉及较大变形, 因此分析只能在非线性框架下进行.

2.1 曲拱的非线性力学行为

两端固定支撑的曲拱, 其几何尺寸标示于图 2

中,曲拱受中点竖向载荷作用,我们将确定中点竖向载荷和中点竖向位移之间的解析关系。

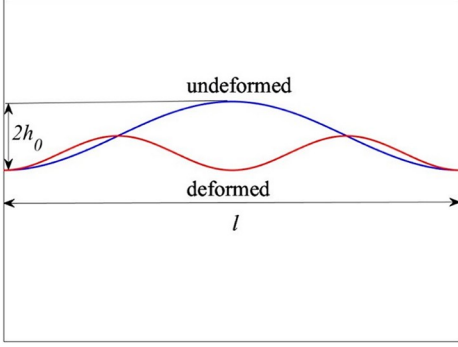


图2 曲拱构型(变形前与变形后比较)

Fig. 2 Configuration of curved arch (undeformed vs deformed)

在后续的组装或一体成型过程中,均限制曲拱不发生反对称变形,因此,只考虑其对称变形情形。为加工方便,设置曲拱中面的初始挠度为:

$$y = h_0 \left[\cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + 1 \right] \quad (1)$$

式中, l 为曲拱跨度, h_0 为一半跨高。理论分析在能量法的框架下进行,设定曲拱的变形模式,根据最小势能原理给出在给定位置处曲拱的构型曲线,进一步地,表出应变能并由卡氏定理计算载荷值。推理如下:

在载荷作用下,设定曲拱的轴线方程为:

$$y = h_2 \left[\cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + 1 \right] + b_2 \left[\cos\left(\frac{4\pi x}{l}\right) - 1 \right] \quad (2)$$

式中, h_2 为曲拱中点(集中力加载点)高度的一半。考虑到曲拱很薄,在变形过程中,轴线长度保持不变,存在约束条件:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = C \quad (3)$$

式中, C 为轴线长度。由此,给定 h_2 值就能计算得到 b_2 值,也就得到了变形后的轴线方程。曲拱的应变能表示为:

$$V(h_2) = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} EI \left[\frac{1}{\rho(x)} - \frac{1}{\rho_0(x)} \right]^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (4)$$

式中, $\rho_0(x)$ 和 $\rho(x)$ 分别为轴线的初始曲率半径和当前曲率半径。上式给出了应变能与中点高度之间的函数关系。由卡氏定理,可得力值与中点高度的关系:

$$F_2 = - \frac{dV}{d(2h_2)} \quad (5)$$

引入无量纲参数:

$$e = \frac{2h_0}{l}, \quad \bar{h}_2 = \frac{h_2}{h_0}, \quad \bar{b}_2 = \frac{b_2}{h_0}, \quad \bar{x} = \frac{2x}{l}$$

$$\bar{y} = \frac{y}{h_0}, \quad \bar{C} = \frac{C}{h_0}, \quad \frac{1}{\bar{\rho}^2} = \frac{h_0^2}{\rho^2}$$

其中, e 为初始高跨比。于是有,

$$\bar{V} = \frac{V}{\frac{EI}{h_0} \frac{1}{e}} = \int_0^1 \left(\frac{1}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\bar{\rho}_0} \right)^2 \sqrt{1 + e^2 \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \right)^2} d\bar{x}$$

$$\bar{F}_2 = \frac{F_2}{\frac{1}{2} \frac{EI}{h_0^2} \frac{1}{e}} = \frac{d\bar{V}}{d\bar{h}_2} \quad (6)$$

进一步地,引入中点的无量纲位移:

$$\bar{u}_2 = 1 - \bar{h}_2 \quad (7)$$

和无量纲刚度值:

$$\bar{K} = \frac{d\bar{F}_2}{d\bar{u}_2} \quad (8)$$

得到无量纲载荷一位移关系和无量纲刚度一位移关系,如图3和图4所示。

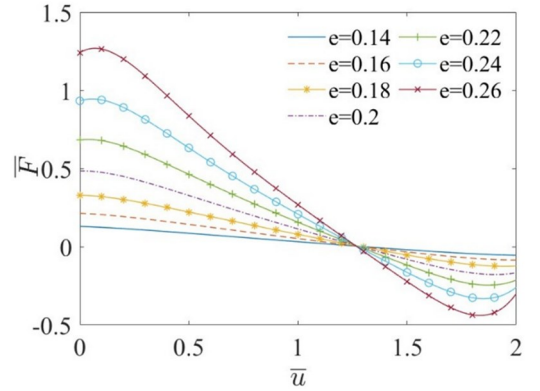


图3 无量纲载荷一位移关系

Fig. 3 Dimensionless load-displacement relation

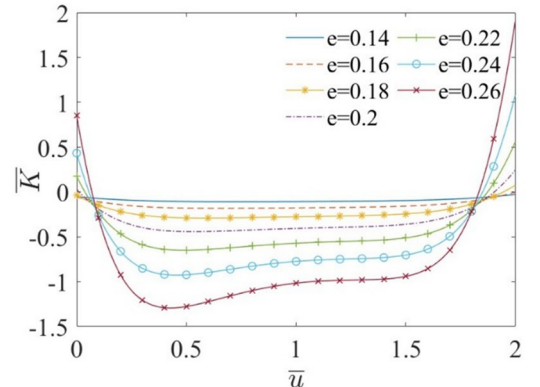


图4 无量纲刚度一位移关系

Fig. 4 Dimensionless stiffness-displacement relation

当高跨比 $0.14 \leq e \leq 0.22$ 时,曲拱表现出良好的拟线性负刚度行为。定义曲拱的拟线性负刚度为

负刚度区域起始点和结束点所确定的直线的斜率. 根据式(6)和式(8)中的分析可得, 曲拱的负刚度 k_- 与曲拱的弯曲刚度、高跨比和初始跨高有关. 分析时可通过确定高跨比和跨度的方式来确定初始跨高. 因此, 可将线性负刚度表示为如下形式:

$$k_- = \bar{k}(e) \frac{EI}{l^3} \quad (9)$$

图5画出了无量纲负刚度 $\bar{k}(e)$ 与高跨比 e 的关系. 对该曲线作三次多项式拟合, 可得线性负刚度设计公式如下:

$$k_- = (1758.1e^3 - 598.85e^2 - 2.01e + 73.25) \frac{8EI}{l^3} \quad (10)$$

在之后的设计和加工中, 限定曲梁的高跨比为 $e = 0.2$, 相应刚度值为 $k_- = 503.67 \frac{EI}{l^3}$.

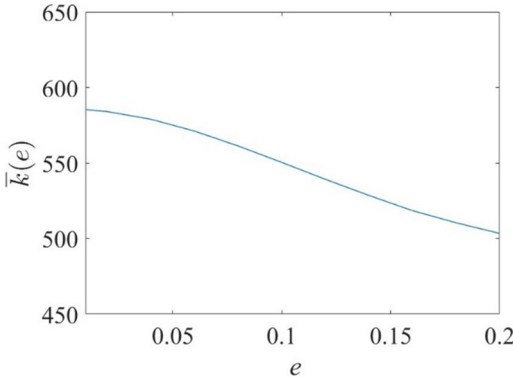


图5 无量纲负刚度 $\bar{k}(e)$ 与 e 高跨比的关系

Fig. 5 Dimensionless negative stiffness $\bar{k}(e)$ vs height-span ratio e

2.2 直梁的非线性力学行为

两侧可动铰支的直梁, 其几何尺寸标示于图6中, 直梁受中点竖向载荷作用, 我们将确定中点竖向载荷和中点竖向位移之间的解析关系.

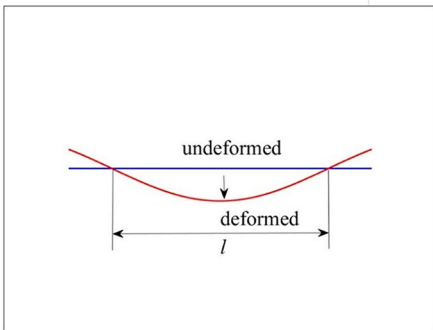


图6 直梁构型(变形前与变形后比较)

Fig. 6 Configuration of straight beam (undeformed vs deformed)

采用里兹法和卡氏定理分析, 将变形后直梁的

轴线方程近似表为傅里叶级数形式:

$$y(x) = \sum_{i=1}^N a_i \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (11)$$

梁的中点挠度为 $h = y\left(\frac{l}{2}\right) = a_1 - a_3 + a_5 - a_7 \cdots$.

由上式表出直梁的应变能:

$$V = \int_0^l \frac{1}{2} EI \left(\frac{1}{\rho} \right)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx \quad (12)$$

式中

$$\left(\frac{1}{\rho} \right)^2 = \frac{\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^3} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{i\pi x}{l} \right)^2}{\left[1 + \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{i\pi}{l} \cos \frac{i\pi x}{l} \right)^2 \right]^3},$$

$\frac{dy(x)}{dx} = \sum_{i=1}^N a_i \frac{i\pi}{l} \cos \frac{i\pi x}{l}$. 给定中点挠度 h 值, 可将一个系数用另外 $N-1$ 个系数表出. 进而, 通过应变能 V 取极值的条件来确定各系数值. 进而, 由卡氏定理导出力值和中点位移的关系:

$$F = - \frac{dV}{dh} \quad (13)$$

引入无量纲参数: $\bar{x} = \frac{x}{l}, \bar{a}_i = \frac{a_i}{l}, \bar{y} = \frac{y}{l}, \bar{h} = \frac{h}{l}$,

$\bar{V} = \frac{Vl}{EI}, \bar{\rho} = \frac{\rho}{l}, \bar{F} = \frac{Fl^2}{EI}$, 我们有:

$$\bar{F} = - \frac{d\bar{V}}{d\bar{h}} \quad (14)$$

无量纲力值和中点位移的关系如图7所示, 直梁表现出软刚度行为, 与线性小变形结果相差甚大. 直梁行程的前段呈现出拟线性行为, 因此, 选取行程 $0 \leq \bar{u} \leq 0.1$ 段为工作段, 用作正刚度元件. 对行程 $0 \leq \bar{u} \leq 0.1$ 段进行线性拟合, 根据拟合线斜率得到正刚度设计公式:

$$k_+ = 43.8 \frac{EI}{l^3} \quad (15)$$

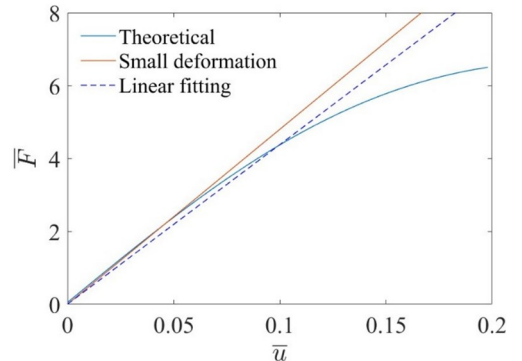


图7 直梁无量纲力值和中点位移关系

Fig. 7 Dimensionless force vs midpoint displacement of straight beam

将曲拱(正刚度元件)和直梁(负刚度元件)并联,并联体系的刚度设计公式为:

$$\begin{aligned} K &= k_- + k_+ \\ &= (1758.1e^3 - 598.85e^2 - 2.01e + 73.25) \frac{8E_1I_1}{l^3} + 43.8 \frac{E_2I_2}{l^3} \end{aligned} \tag{16}$$

据此设计曲梁的高跨比、材料和几何,直梁的材料和几何,从而达成最佳刚度匹配。

3 制备和实验

3.1 加工制备

依照设计公式(16),并考虑到实际尺寸、材料选择和制造加工等限制,选取曲拱参数为:跨度 $l=200\text{ mm}$,宽度 $b=30\text{ mm}$,厚度 $h=2\text{ mm}$,弹性模量 $E=32\text{ MPa}$,曲拱由 3D 打印制备,选用 TPU 材料。直梁全长 $L=300\text{ mm}$,跨度 $l=200\text{ mm}$,宽度 $b=75\text{ mm}$,厚度 $h=0.2\text{ mm}$,弹性模量 $E=200\text{ GPa}$,由钢片制备,选用 65Mn 弹簧钢。二者次第置入刚性框架中,曲拱两端插入预设开缝中,直梁穿过穿透性开缝,不限制水平方向移动。曲拱中点区域和直梁中点区域用刚性支柱连接,并用螺母紧固,从

而形成并联体系并抑制体系(特别是曲拱)的侧向失稳。制备完成的并联体系实物如图 8 所示。

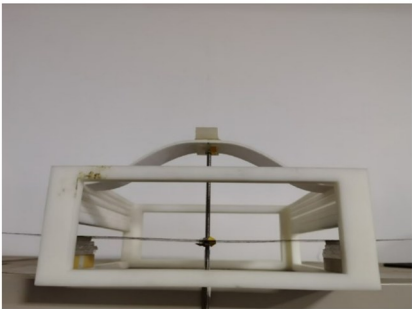


图 8 并联体系实物图
Fig. 8 Image of parallel system

3.2 静载实验

将制备完成的曲拱一直梁隔振体系置于拉伸机上,测试其静态力学行为,得出载荷—中点位移曲线。测试平台如图 9(a)所示,曲拱和直梁的载荷—位移曲线分别置于图 9(b)和图 9(c)中,并联体系的载荷—位移曲线如图 9(d)所示。由图可知,实验结果和有量纲的理论结果吻合很好。载荷—位移曲线的初始段不吻合,这是由于理论分析的变形模式设置造成的。

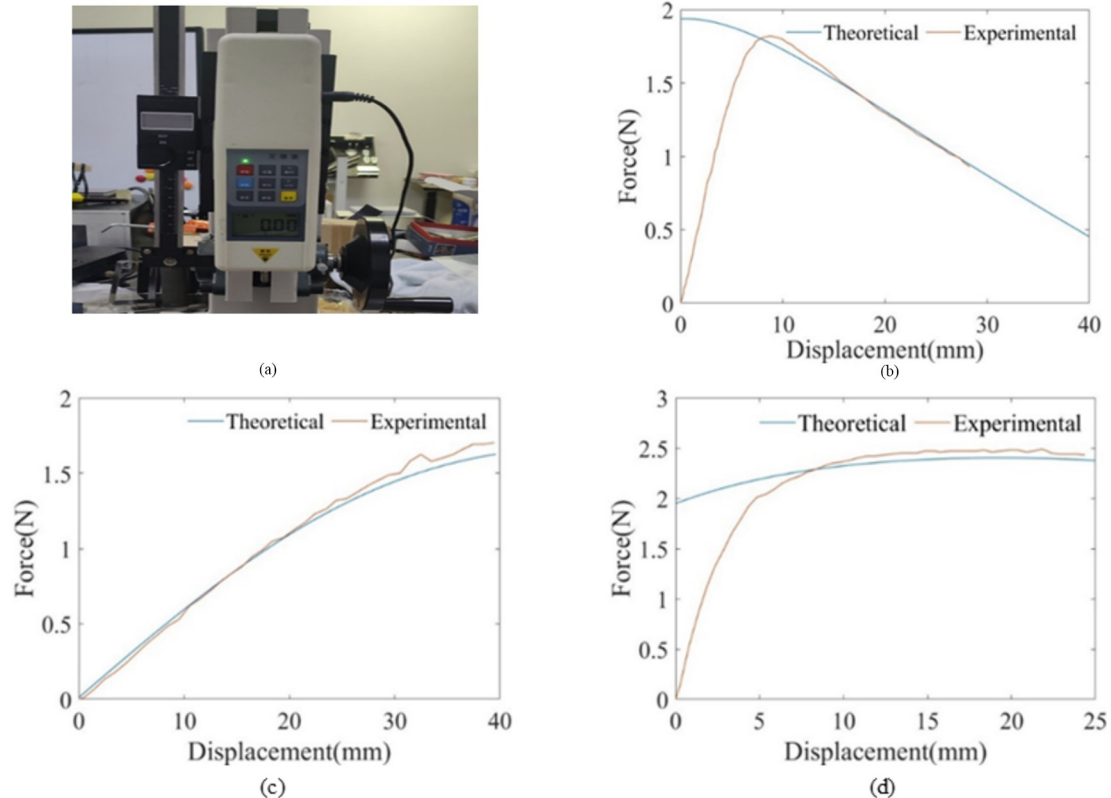


图 9 实测载荷一位移关系: (a)静载测试平台; (b)曲拱; (c)直梁; (d)并联体系
Fig. 9 Measured load-displacement relation: (a) Testing platform for static experiments; (b) Curved arch; (c) Straight beam; (d) Parallel system

3.3 有限元分析(校核)

为检查结构最大应力是否满足材料许用应力,对并联体系进行有限元分析.有限元分析采用的是Abaqus 商用有限元软件.将直梁和曲梁组成并联体系,直梁和曲梁的中点由刚性支柱连接,构型如图 8 所示.曲梁及直梁均以线弹性材料进行建模,其中曲梁采用 TPU 材料,直梁采用 65Mn 弹簧钢材料.曲梁尺寸及材料参数设置与 3.1 节中相同.采用网格单元样式为平面普通二节点线性梁单元(B21).刚性支柱的刚度远大于直梁和曲梁,在分析过程中可以视作刚体.网格单元的近似全局尺寸为 0.5 mm,单元规模为 1266.有限元分析步设置如下:

在曲梁顶点施加 y 轴负方向的位移,直至曲梁顶点与两端端点高度相同.设置初始增量步和最大增量步大小为 0.01,最小增量步为 $1e-11$,最大增量步数为 500;

分析完毕后导出加载前后体系的应力分布情况,如图 10 所示.曲梁和支柱部分的应力值较小,应力最大值出现在直梁与刚性支柱连接处,其最大应力值为 206 MPa.查询国家标准 GB/T 1222—2007 可得,65Mn 弹簧钢材料的屈服强度为 785 MPa.由此验证了加载过程中,结构最大应力满足材料许用应力.

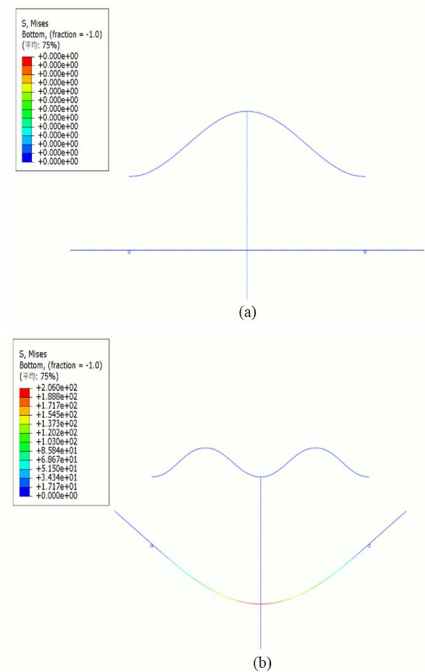


图 10 加载前后应力分布: (a) 加载前; (b) 加载后
Fig. 10 Stress distribution before and after loading:
(a) Before loading; (b) After loading

3.4 动态实验

动态测试平台构成如图 11 所示.数据分析与采集系统(LabGenius IM1280H)产生信号、采集信号并分析数据,功率放大器(Metron Technology DPM650A)放大信号并驱动激振器(TIRA S51110-M)产生加速度激励.两个加速度传感器(Dytran 3143D4)读取振源体和减振体的加速度信号,传送至数采设备以备分析.曲拱—直梁隔振体系置于激振台面上,减振体置于其上,质量为 220 g.

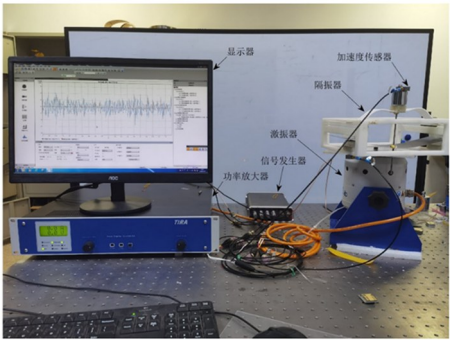
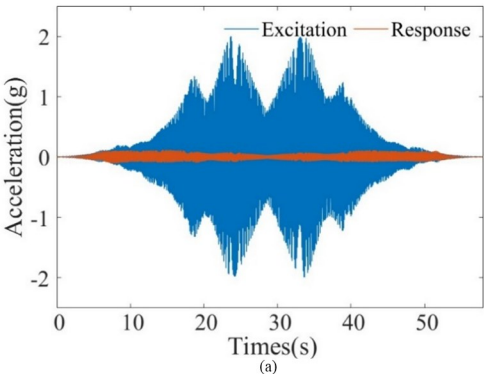


图 11 动态测试平台
Fig. 11 Testing platform for dynamic experiments

我们进行扫频实验和随机实验.在扫频实验中,设置信号发生器生成 0~25 Hz 的双向正弦扫频信号,扫频周期设为 60 s;在随机实验中,设定信号发生器产生 0~25 Hz 的限带白噪声.振源体(激励)和减振体(响应)的加速度时域信号如图 12(a)所示.由此,可以直观看出曲拱—直梁隔振体系良好的隔振性能.

从随机实验的时域数据中,通过傅里叶变换分析,立即可得隔振系统的传递率(传递率定义为 $T=20\log_{10}|A_1/A_2|$,其中 A_1 为减振体的加速度响应, A_2 为振源体的加速度响应),如图 13 所示.由图可知,隔振系统的基频约为 3.0 Hz,起始隔振频率约为 4.1 Hz.



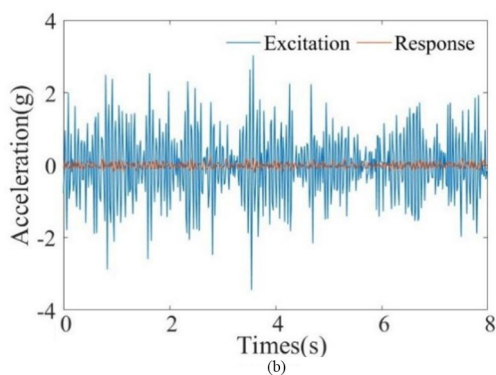


图 12 时域信号测试结果: (a) 正弦扫频; (b) 随机激励
Fig. 12 Testing results of time-domain signals:
(a) Sweep frequency excitation; (b) Sandom excitation

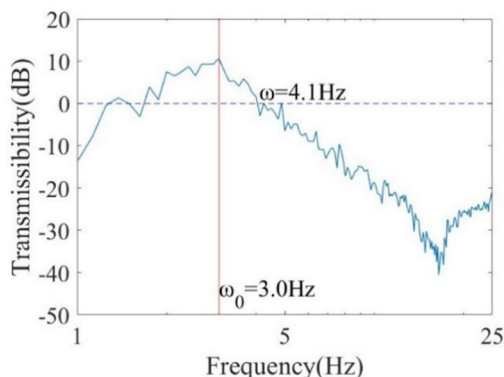


图 13 隔振系统的传递率
Fig. 13 Transmissibility of vibration isolation system

这里,我们详尽讨论隔振体系的负载适应性。一般来说,准零刚度隔振体系的负载适应性均较差,这是由于其零刚度段较短,随着负载值变动,等效刚度迅速增大,隔振效果迅速劣化。从体系的设计负载 220 g 开始,逐渐降低负载值,测试各自的传递率。测试结果如图 14 所示。总体而言,随着负载减小,隔振系统的基频和起始隔振频率逐渐增大。当负载不小于 200 g 时,基频变化不大;当负载小于 180 g 时,隔振效果明显劣化。因此,隔振体系具有一定的(约 10%)载荷适应性。

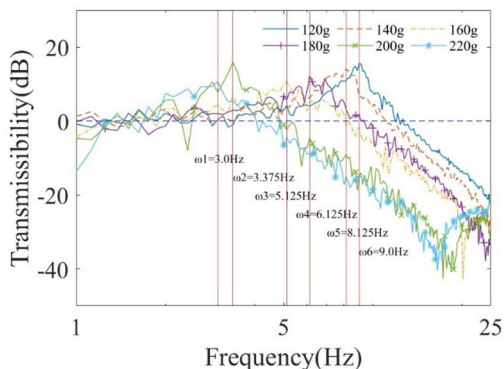


图 14 负载对隔振系统传递率的影响
Fig. 14 Effect of load on the transmissibility of isolation system

最后,将其与直梁隔振体系(正刚度隔振)进行比较,说明曲拱一直梁隔振体系(准零刚度隔振)的性能差异,或者说,讨论附加的负刚度元件对隔振性能的影响。为使直梁隔振体系与曲拱一直梁隔振体系具有相同的负载和相同的位移,我们将两个 65Mn 弹簧钢片并联,长度均 $L = 300$ mm,跨度均为 $l = 200$ mm,宽度分别为 $b_1 = 97$ mm 和 $b_2 = 135$ mm。直梁隔振系统的传递率如图 15 所示,系统基频约为 3.75 Hz,起始隔振频率约为 5.7 Hz。比较可知,曲拱一直梁隔振体系将同样负载下的基频降低了约 20%。

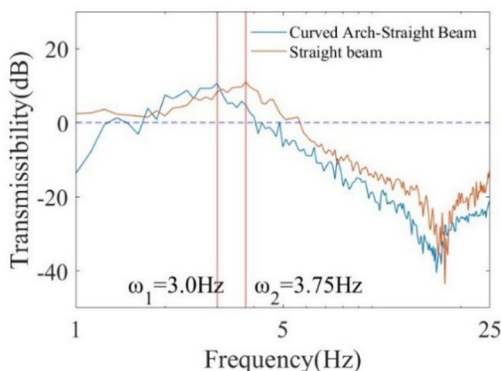


图 15 传递率比较(曲拱一直梁体系与直梁体系)
Fig. 15 Comparison of transmissibility (curved arch-straight beam system vs straight beam system)

4 总结与展望

针对既有准零刚度隔振体系存在的问题——机构型体系构件甚多、连续化体系构型复杂,本文提出了曲拱一直梁型隔振体系,以简洁的构型实现了良好的低频隔振性能。首先,从理论上导出了曲拱和直梁的刚度设计解析公式,然后设计并制备了并联隔振体系,通过静载实验和动载实验验证了其准零刚度特性和良好的隔振性能,以及一定程度上的负载适应性。此外,通过与同负载、同变形的正刚度隔振体系比较,说明了负刚度元件的显著效果。

这里指出,曲拱和直梁的设计和制备采用了不同材质和不同工艺。我们完全可以采用同种材料并以一体化方式直接成型(例如,采用 3D 打印技术)。这一方面提高了制备效率,另一方面又避免了不同材质的接触界面,从而能提高体系的可靠性。此外,隔振体系的长时间工作要求选用具有良好抗疲劳性能的材料。所有这些因素,对于隔振体系的工业应用是极为重要的,值得进一步探索。

参考文献

- [1] 丁文镜. 减振理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1988.
DING W J. Theory of vibration protection [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1988. (in Chinese)
- [2] IBRAHIM R A. Recent advances in nonlinear passive vibration isolators [J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 314(3/4/5): 371—452.
- [3] LEDEZMA-RAMÍREZ D F, TAPIA-GONZÁLEZ P E, FERGUSON N, et al. Recent advances in shock vibration isolation: an overview and future possibilities [J]. Applied Mechanics Reviews, 2019, 71(6): 060802.
- [4] MOLYNEUX W G. The support of an aircraft for ground resonance tests: a survey of available methods [J]. Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 1958, 30(6): 160—166.
- [5] CARRELLA A, BRENNAN M J, KOVACIC I, et al. On the force transmissibility of a vibration isolator with quasi-zero-stiffness [J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 322(4/5): 707—717.
- [6] CARRELLA A, BRENNAN M J, WATERS T P. Static analysis of a passive vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic [J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 301(3/4/5): 678—689.
- [7] XU D L, ZHANG Y Y, ZHOU J X, et al. On the analytical and experimental assessment of the performance of a quasi-zero-stiffness isolator [J]. Journal of Vibration and Control, 2014, 20(15): 2314—2325.
- [8] ZHAO F, JI J C, YE K, et al. An innovative quasi-zero stiffness isolator with three pairs of oblique springs [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2021, 192: 106093.
- [9] LIU X T, HUANG X C, HUA H X. On the characteristics of a quasi-zero stiffness isolator using Euler buckled beam as negative stiffness corrector [J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(14): 3359—3376.
- [10] LIU X T, ZHAO Q, ZHANG Z Y, et al. An experiment investigation on the effect of Coulomb friction on the displacement transmissibility of a quasi-zero stiffness isolator [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2019, 33(1): 121—127.
- [11] HUANG X C, LIU X T, SUN J Y, et al. Vibration isolation characteristics of a nonlinear isolator using Euler buckled beam as negative stiffness corrector: a theoretical and experimental study [J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(4): 1132—1148.
- [12] ZOU D L, LIU G Y, RAO Z S, et al. A device capable of customizing nonlinear forces for vibration energy harvesting, vibration isolation, and nonlinear energy sink [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 147: 107101.
- [13] LI M, CHENG W, XIE R L. A quasi-zero-stiffness vibration isolator using a cam mechanism with user-defined profile [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2021, 189: 105938.
- [14] GOHAROODI S K, DEKEMELE K, DUPRE L, et al. Sparse identification of nonlinear duffing oscillator from measurement data [J]. IFAC-PapersOnLine, 2018, 51(33): 162—167.
- [15] CAI J G, DENG X W, ZHOU Y, et al. Bistable behavior of the cylindrical origami structure with kresling pattern [J]. Journal of Mechanical Design, 2015, 137(6): 061406.
- [16] ISHIDA S, SUZUKI K, SHIMOSAKA H. Design and experimental analysis of origami-inspired vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2017, 139(5): 051004.
- [17] ISHIDA S, UCHIDA H, SHIMOSAKA H, et al. Design and numerical analysis of vibration isolators with quasi-zero-stiffness characteristics using bistable foldable structures [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2017, 139(3): 031015.
- [18] CARRELLA A, BRENNAN M J, WATERS T P, et al. On the design of a high-static-low-dynamic stiffness isolator using linear mechanical springs and magnets [J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 315(3): 712—720.
- [19] WU L L, WANG Y, ZHAI Z R, et al. Mechanical metamaterials for full-band mechanical wave shielding [J]. Applied Materials Today, 2020, 20: 100671.
- [20] ZHANG Q, GUO D K, HU G K. Tailored mechanical metamaterials with programmable quasi-zero-stiffness features for full-band vibration isolation [J]. Advanced Functional Materials, 2021, 31(33): 2101428.

[21] LI W C, WANG F W, SIGMUND O, et al. Digital synthesis of free-form multimaterial structures for realization of arbitrary programmed mechanical responses [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2022, 119(10): e2120563119.

[22] CAI C Q, ZHOU J X, WU L C, et al. Design and numerical validation of quasi-zero-stiffness metamaterials for very low-frequency band gaps [J]. Composite Structures, 2020, 236: 111862.

[23] ZHOU J X, WANG X L, XU D L, et al. Nonlinear dynamic characteristics of a quasi-zero stiffness vibration isolator with cam-roller-spring mechanisms [J]. Journal of Sound and Vibration, 2015, 346: 53—69.

[24] ZHOU J X, PAN H B, CAI C Q, et al. Tunable ultralow frequency wave attenuations in one-dimensional quasi-zero-stiffness metamaterial [J]. International Journal of Mechanics and Materials in Design, 2021, 17(2): 285—300.